

21

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

信号与系统

(第四版)

张小虹 编著

胡建萍 主审

XINHAOYUXITONG



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

内容简介

信号与系统

(第四版)

张小虹 编著

胡建萍 主审

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书以三大变换(拉普拉斯变换、傅里叶变换和 z 变换)为主线,描述了信号与系统的基本理论和分析方法;同时将经典理论与现代计算技术相结合,提高了授课效率,以期增强和加快读者对本课程知识点的理解与掌握。本书在原版的基础上进行了修订,新增了 MATLAB 内容,以帮助读者尽快掌握和应用 MATLAB 知识,提高计算和作图能力。

本书概念清晰、系统性强、特色鲜明,符合当前强调素质教育的教学改革要求。全书叙述流畅,深入浅出,使用方便,利于自学。

本书可作为高校通信、自动控制、电子信息类专业本科或大专教材,对相关专业的工程技术人员也是一本有益的自学教材和参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/张小虹编著. —4版. —西安:西安电子科技大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5606-4880-4

I. ①信… II. ①张… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 036557 号

策 划 马乐惠

责任编辑 陈 婷

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2018年3月第4版 2018年3月第13次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 20.5

字 数 487千字

印 数 54 001~57 000册

定 价 44.00元

ISBN 978-7-5606-4880-4/TN

XDUP 5182004 - 13

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

“信号与系统”是以信号特性和处理等工程问题为背景，经数学抽象及理论概括而形成的专业基础课程。其基本任务是研究确定信号通过线性时不变系统进行传输、处理的基本理论和基本分析方法。

“信号与系统”课程的内容仍以传统和经典为主。现有的教材大都注重内容的严谨与完整(加有不少相关专业的内容)，在实际教学过程中，尤其是授课时数有限的情况下，很难按照教材完全实施，达不到预期目的。编者根据多年的教学实践和教改要求修订了本教材。本书以基本原理和基本方法为主导，以三大变换为主线，精选课程的基本内容，删繁就简，突出物理概念。

感谢读者的厚爱，《信号与系统》第四版即将出版。本版除了保留了经典理论与现代计算技术相结合的特色，重点对后续课程涉及的内容及一些扩展内容作了删减，例如相关、功率谱与能量谱等；为了便于具体概念的理解，对应地增加了少量的例题及例题详解；对习题进行了进一步的归纳增减优化，有利于读者练习时分析比较，更好地巩固课堂学习的基本概念。编者在编写过程中考虑到了接受对象的不同，采取了宽口径的处理原则，书中打*的部分可供有不同教学要求的学校或教师选用。若读者还需深入了解相关专业知识，可参阅相关专业书籍。

本书概念清晰、系统性强、特色明显，尤其是引入现代教学思想与工具，使本书不仅非常适合作为电子信息类专业本科及大专学生的教材，也可作为计算机科学与技术等相关专业学生的教材。对相关专业的工程技术人员来说，本书也是一本较好的自学教材和参考用书。

很高兴有两位年轻的同行荣传振、朱莹参加了本版的部分纠错工作。

在编写过程中，还得到了陆军工程大学通信工程学院关宇教授的大力支持和帮助，编者在此表示深深的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在一些疏漏，恳请广大读者不吝赐教。

作者 2018 年 1 月修改于南京

目 录

第一章 信号与系统	1	第二章 连续时间信号和系统的时域分析	46
1.1 信号与系统概述	1	2.1 LTI 系统的数学模型与传输算子	46
1.2 信号及其分类	1	2.1.1 建立 LTI 系统的数学模型	46
1.3 典型信号	4	2.1.2 用算子符号表示微分方程	47
1.3.1 常用连续信号	4	2.1.3 用算子电路建立系统数学模型	49
1.3.2 奇异信号	7	2.1.4 传输(转移)算子 $H(p)$	51
1.4 连续信号的运算	13	2.2 LTI 因果系统的零输入响应	52
1.4.1 时移、折叠、尺度	13	2.2.1 零输入响应	52
1.4.2 微分与积分	15	2.2.2 初始条件标准化	55
1.4.3 信号的加(减)、乘(除)	16	2.3 LTI 因果系统的零状态响应	57
1.5 连续信号的分解	17	2.3.1 单位冲激响应 $h(t)$	57
1.5.1 规则信号的分解	17	2.3.2 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$	59
1.5.2 信号的直流与交流分解	18	2.4 卷积及其性质	60
1.5.3 信号的奇偶分解	18	2.4.1 卷积	60
1.5.4 任意信号的分解	20	2.4.2 任意函数与 $\delta(t)$ 、 $u(t)$ 卷积	61
1.6 系统及其响应	21	2.4.3 卷积的性质	62
1.6.1 系统的定义	21	2.4.4 卷积的图解法	63
1.6.2 系统的初始状态	22	2.4.5 卷积的微分与积分性质	65
1.6.3 系统的响应	23	2.5 LTI 因果系统的全响应及其经典方法求解	67
1.7 系统的分类	24	2.5.1 全响应	67
1.7.1 动态系统与静态系统	24	2.5.2 全响应的其他分解	68
1.7.2 因果系统与非因果系统	25	* 2.5.3 经典法求解系统微分方程	69
1.7.3 连续时间系统与离散时间系统	25	2.6 基于 MATLAB 的时域分析	71
1.7.4 线性系统与非线性系统	26	2.6.1 求系统的冲激响应与阶跃响应	71
1.7.5 时变系统与非时变系统	27	2.6.2 利用扩展函数 convwthn 求时域卷积	71
1.8 LTI 系统分析方法	28	2.6.3 响应时域求解的 MATLAB 程序	74
1.8.1 LTI 系统模型	28	习题	74
1.8.2 LTI 系统分析方法	29	第三章 连续时间信号和系统的频域表示与分析	80
1.8.3 LTI 系统的微、积分性质	29	3.1 周期信号的傅里叶级数分析	80
1.9 基于 MATLAB 的信号描述及其运算	30		
1.9.1 常用信号的 MATLAB 程序	30		
1.9.2 信号运算的 MATLAB 程序	36		
习题	41		

3.1.1	三角形傅里叶级数	81	4.1.2	常用函数的单边拉普拉斯变换	165
3.1.2	指数形式的傅里叶级数	83	4.1.3	双边拉普拉斯变换	167
3.1.3	周期矩形脉冲频谱	85	4.1.4	拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	169
3.1.4	周期 T 及脉冲宽度 τ 对频谱的影响	87	4.2	拉普拉斯变换的性质与定理	169
3.1.5	周期信号的频谱特点	87	4.3	拉普拉斯反变换	180
* 3.2	周期信号的对称性	88	4.3.1	部分分式展开法	181
3.2.1	信号对称性与傅里叶级数系数关系	88	4.3.2	留数法	184
3.2.2	坐标轴的影响	93	4.4	LTI 系统的拉普拉斯变换分析法	187
3.3	非周期信号的频谱——傅里叶变换	95	4.4.1	用拉普拉斯变换求解线性微分方程	187
3.3.1	从傅里叶级数到傅里叶变换	95	4.4.2	s 域的网络模型——运算电路法	191
3.3.2	常用函数的傅里叶变换对	97	4.5	系统函数与复频域分析法	195
3.3.3	傅里叶系数 F_n 与频谱函数 $F(\omega)$ 的关系	101	4.5.1	系统函数 $H(s)$	195
3.4	傅里叶变换性质及定理	102	4.5.2	系统函数的零、极点	196
3.5	LTI 系统的频域分析	118	4.5.3	零、极点分布与时域特性	197
3.5.1	系统的频响函数	118	4.5.4	零、极点与各响应分量	198
3.5.2	系统的频域分析	121	4.5.5	零、极点分布与系统频域特性	200
3.6	无失真传输系统	123	* 4.5.6	全通系统与最小相移系统的零、极点分布	202
* 3.7	理想低通滤波器与物理可实现系统	126	4.6	连续时间系统的模拟及信号流图	203
3.7.1	理想低通滤波器及其冲激响应	127	4.6.1	连续时间系统的模拟(仿真)	204
3.7.2	理想低通滤波器的阶跃响应	127	4.6.2	系统模拟的直接(卡尔曼)形式	205
3.7.3	频带宽度	132	4.6.3	其他形式的模拟	207
3.7.4	物理可实现系统	133	4.6.4	连续系统的信号流图表示	210
3.8	时域采样与恢复(插值)	134	4.7	LTI 连续系统的稳定性	211
3.8.1	时域采样	135	4.7.1	系统稳定性分类	212
3.8.2	采样定理	136	4.7.2	$H(s)$ 中 m 、 n 之间的限制	212
3.8.3	原信号的恢复	137	4.7.3	稳定系统与系统函数分母多项式系数的关系	213
3.9	基于 MATLAB 的频域分析	139	4.7.4	罗斯稳定性准则	215
3.9.1	周期信号的傅里叶级数展开与合成	139	4.8	基于 MATLAB 的复频域分析	216
3.9.2	常用信号傅里叶正、反变换 MATLAB 程序	142	4.8.1	拉氏变换的 MATLAB 程序	216
3.9.3	傅里叶变换性质的 MATLAB 程序	146	4.8.2	拉氏反变换的 MATLAB 程序	216
3.9.4	时域采样与恢复的 MATLAB 程序	150	4.8.3	部分分式展开的 MATLAB 程序	217
习题		152	4.8.4	求系统零极点的 MATLAB 程序	219
第四章 连续时间信号和系统的复频域表示与分析		163	4.8.5	系统频响作图的 MATLAB 程序	219
4.1	拉普拉斯变换	163	4.8.6	系统模拟的 MATLAB 程序	221
4.1.1	单边拉普拉斯变换	163	4.8.7	反馈系统的 MATLAB 程序	223

4.8.8 根轨迹的 MATLAB 程序	223	习题	270
习题	224	第六章 z 变换及其应用	277
第五章 离散时间系统的时域分析	233	6.1 z 变换的定义	277
5.1 离散序列与基本运算	233	6.2 z 变换收敛区及典型序列 z 变换	278
5.1.1 离散时间信号——序列的描述	233	6.2.1 z 变换的收敛区	278
5.1.2 常用典型序列	234	6.2.2 典型序列的 z 变换	282
5.1.3 序列的运算	237	6.3 z 变换的性质与定理	283
5.2 LTI 离散时间系统的数学模型及 其求解方法	239	6.4 逆 z 变换	289
5.2.1 LTI 离散系统	240	6.4.1 留数法	290
5.2.2 LTI 离散系统的数学模型—— 差分方程	241	6.4.2 幂级数展开法	290
5.2.3 线性差分方程的求解方法	243	6.4.3 部分分式法	291
5.3 离散时间系统的零输入响应	243	6.5 离散系统的复频域分析	294
5.3.1 一阶线性时不变离散系统的 零输入响应	244	6.5.1 利用 z 变换求解差分方程	294
5.3.2 N 阶线性时不变离散系统的 零输入响应	244	6.5.2 z 变换与拉普拉斯(傅里叶) 变换的关系	296
5.4 离散时间系统的零状态响应	247	6.6 系统函数与系统特性	297
5.4.1 离散系统的转移(传输)算子	247	6.6.1 系统函数	297
5.4.2 单位脉冲响应 $h(n)$	248	6.6.2 $H(z)$ 的零、极点分布与 时域特性	299
5.4.3 零状态响应	251	6.6.3 系统的因果稳定性	300
5.5 离散序列卷积(和)	251	6.7 离散系统的模拟	301
5.5.1 卷积的性质	251	6.7.1 IIR 系统的直接(卡尔曼)形式	301
5.5.2 卷积的运算	252	6.7.2 IIR 系统的级联形式	303
5.6 离散时间系统的完全响应与 系统特性	254	6.7.3 IIR 系统的并联形式	305
5.6.1 系统完全响应的时域求解方法	254	6.7.4 FIR 系统的直接形式(横截型、 卷积型)	306
5.6.2 用经典法求解完全响应	255	6.7.5 FIR 系统的级联形式	307
5.6.3 系统完全响应分解	257	6.8 基于 MATLAB 的离散频域分析	307
5.6.4 系统特性	259	6.8.1 z 变换的 MATLAB 程序	307
5.7 基于 MATLAB 的离散时域分析	259	6.8.2 z 反变换的 MATLAB 程序	308
5.7.1 序列的 MATLAB 程序	259	6.8.3 求解系统响应及作图的 MATLAB 程序	308
5.7.2 序列运算的 MATLAB 扩展程序	264	6.8.4 求系统零点及作图的 MATLAB 程序	311
5.7.3 序列运算的 MATLAB 程序	264	6.8.5 系统模拟的 MATLAB 程序	312
5.7.4 序列能量的 MATLAB 程序	267	习题	314
5.7.5 系统响应求解的 MATLAB 程序	267	参考文献	320

第一章 信号与系统

1.1 信号与系统概述

现代的人每天都会与各种各样载有信息的信号密切接触。例如,听广播、看电视是接收带有信息的信息;发短信、打电话是为了把带有信息的信息借助一定形式的信号传送出去。信号是各类信息的运载工具,是某种变化的物理量,如电话铃声,交通红绿灯,收音机、电视机、手机收到的电磁波等,这些信号分别称之为声信号、光信号、电信号。不同的声、光、电信号都包含有一定的意义,这些意义统称为信息。信息中有意义或实质性的内容可以用信息量度量。

在自然科学、社会等诸多领域中,系统的概念与方法被广泛应用。系统泛指由若干相互作用、相互关联的事物组合而成的,具有特定功能的整体。通信、控制系统是信息科学与技术领域的重要组成部分,它们还可以组合成更复杂的系统。

本书所研究的是信号通过系统进行传输、处理的基本理论和基本分析方法,通常可由图 1.1-1 所示的方框图表示。其中 $f(\cdot)$ 是系统的输入(激励), $y(\cdot)$ 是系统的输出(响应), $h(\cdot)$ 是系统特性的一种描述。“ \cdot ”是信号的自变量,可以是连续变量 t ,也可以是离散变量 n 。

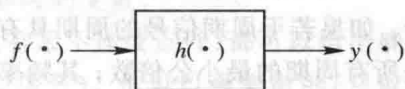


图 1.1-1 信号与系统分析框图

图 1.1-1 所示信号与系统分析框图中,有激励、系统特性、响应三个变量。描述它们的有时域、频域、复频域三种方法。研究各变量的不同描述方法之间的转换关系以及三个变量之间的关系(已知其中两个求解出第三个),是“信号与系统”课程研究的主要问题。

因为存在连续与离散两类不同的信号的描述,所以有连续与离散两类不同的传输、处理系统。本书采用先连续信号与系统分析,后离散信号与系统分析的顺序编排。

1.2 信号及其分类

人们用来传递信息的信号主要是电信号。电信号有许多众所周知的优点,传播速度快、传播方式多:有线、无线、微波、卫星等。日常许多非电的物理量如压力、流速、声音、图像等都可以利用转换器变换为电信号进行处理、传输。本书讨论的电信号,一般是指随时间变化的电压或电流,有时也可以是电荷或磁通。

为了对信号进行处理或传输,要对信号的特性进行分析研究。这既可以从信号随时间变化的快、慢、延时来分析信号时间特性,也可以从信号所包含的主要频率分量的振幅大小、相位的变化来分析信号的频率特性。当然,不同的信号具有不同的时间特性与频率特性。

信号随时间变化的关系,可以用数学上的时间函数来表示,所以有时亦称信号为函数 $f(t)$,离散信号为序列 $x(n)$ 。因此本书中信号与函数、序列这几个名词通用。信号的函数关系可以用数学表达式、波形图、数据表等表示,其中数学表达式、波形图是最常用的表示形式。

各种信号可以从不同角度进行分类,常用的有以下几种。

1. 确定性信号与随机信号

信号可以用确定的时间函数来表示的是确定性信号,也称规则信号。如正弦信号、单脉冲信号、直流信号等。

信号不能用确定的时间函数来表示,只知其统计特性(如在某时刻取某值的概率)的是随机信号。

从常识上讲,确定性信号不包括有用的或新的信息。但确定性信号作为理想化模型,其基本理论与分析方法是研究随机信号的基础,在此基础上根据统计特性可进一步研究随机信号。本书只涉及确定性信号。

2. 周期信号与非周期信号

周期信号是依一定的时间间隔周而复始、无始无终的信号,一般表示为

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (1.2-1)$$

其中 T 为最小重复时间间隔,也称周期。不满足式(1.2-1)这一关系的信号为非周期信号。如果若干周期信号的周期具有公倍数,则它们叠加后仍为周期信号,叠加信号的周期是所有周期的最小公倍数;其频率为周期的倒数。只有两项叠加时,若 T_1 、 T_2 与 ω_1 、 ω_2 分别是两个周期信号的周期与角频率。叠加后信号的角频率、周期的计算为

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{N_1} = \frac{\omega_2}{N_2}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad T = N_1 T_1 = N_2 T_2 \quad (1.2-2a)$$

其中 N_1 、 N_2 为不可约的正整数。若是大于两项叠加时,信号的角频率、周期的计算为

$$\omega_1 = \frac{N_1}{N_0}, \omega_2 = \frac{N_2}{N_0}, \dots, \omega_n = \frac{N_n}{N_0}, \quad T = N_1 T_1 = N_2 T_2 = N_3 T_3 \dots = N_n T_n$$

其中, N_1, N_2, \dots, N_n 为正整数。若 N_1, N_2, \dots, N_n 无公因子,则

$$\omega_0 = \frac{1}{N_0} \quad (1.2-2b)$$

若有正整数公因子 N , 则

$$\omega_0 = \frac{N}{N_0} \quad (1.2-2c)$$

例 1.2-1 判断下列信号是否为周期信号?若是,求出其周期。

(1) $f_1(t) = a \sin 5t + b \cos 8t$;

(2) $f_2(t) = 3 \sin 1.2t - 5 \sin 5.6t$ 。

解 (1) 方法一:

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5}{8}$ 为有理数,且无公因子,所以,

$$\omega_0 = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = 1, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$$

方法二:

$$T_1 = \frac{2\pi}{5}, T_2 = \frac{2\pi}{8}$$

$$5T_1 = 8T_2 = 2\pi = T$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

(2) 方法一:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1.2}{5.6} = \frac{3}{14} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\omega_0 = \frac{1.2}{3} = \frac{5.6}{14} = 0.4, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$$

方法二:

$$T_1 = \frac{2\pi}{1.2}, T_2 = \frac{2\pi}{5.6}, 3T_1 = 14T_2 = 5\pi = T$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5} = 0.4$$

3. 连续时间信号与离散时间信号

按函数的独立变量(自变量)取值的连续与否,可将信号分为连续信号与离散信号。本书默认独立变量(自变量)为时间,实际工程应用中可为非时间变量。

连续时间信号在所讨论的时间内,对任意时间值(除有限不连续点外)都可以给出确定的函数值。连续时间信号的幅值可以是连续的(也称模拟信号),也可以是离散的(只取某些规定值),如图 1.2-1 所示。

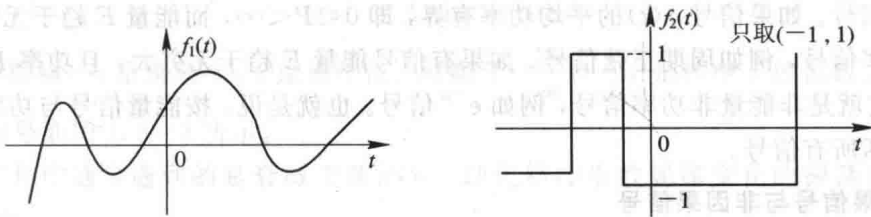


图 1.2-1 连续时间信号

离散信号亦称序列,其自变量 n 是离散的,通常为整数。若是时间信号(可为非时间信号),它只在某些不连续的、规定的瞬时给出确定的函数值,其他时间没有定义,其幅值可以是连续的也可以是离散的,如图 1.2-2 所示。

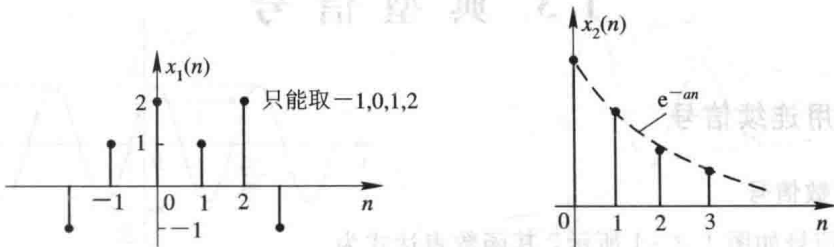


图 1.2-2 离散时间信号

图 1.2-2 中,

$$x_1(n) = \begin{cases} -1 & n = -2, 3 \\ 1 & n = -1, 1 \\ 2 & n = 0, 2 \\ 0 & n \text{ 为其他} \end{cases}, \quad x_2(n) = \begin{cases} e^{-an} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$x_1(n)$ 还可简写为

$$x_1(n) = [-1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad -1]$$

↑

式中小箭头标明 $n=0$ 的位置。

离散信号的幅值被量化, 即只能取某些规定值(并被编码)时, 称为数字信号, 例如图 1.2-2 中的 $x_1(n)$ 。本书如不特别说明, 一般离散信号与数字信号通用。

4. 能量信号与功率信号

为了了解信号能量或功率特性, 常常研究信号 $f(t)$ (电压或电流) 在单位电阻上消耗的能量或功率。

在 $(-T/2, T/2)$ 区间实功率信号的平均功率 P 为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1.2-3)$$

在 $(-\infty, \infty)$ 区间实能量信号的能量 E 为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (1.2-4)$$

如果信号 $f(t)$ 的能量有界, 即 $0 < E < \infty$, 而平均功率 $P=0$, 则它就是能量信号, 例如单脉冲信号。如果信号 $f(t)$ 的平均功率有界, 即 $0 < P < \infty$, 而能量 E 趋于无穷大, 那么它就是功率信号, 例如周期正弦信号。如果有信号能量 E 趋于无穷大, 且功率 P 趋于无穷大, 那么它就是非能量非功率信号, 例如 e^{-at} 信号。也就是说, 按能量信号与功率信号分类并不能包括所有信号。

5. 因果信号与非因果信号

按信号所存在的时间范围, 可以把信号分为因果信号与非因果信号。当 $t < 0$ 时, 连续信号 $f(t)=0$, 信号 $f(t)$ 是因果信号, 反之为非因果信号; 当 $n < 0$ 时, 离散信号 $x(n)=0$, 则信号 $x(n)$ 是因果信号, 反之为非因果信号。

1.3 典型信号

1.3.1 常用连续信号

1. 实指数信号

实指数信号如图 1.3-1 所示, 其函数表达式为

$$f(t) = Ae^{at} \quad (1.3-1)$$

式中, $a > 0$ 时, $f(t)$ 随时间增长; $a < 0$ 时, $f(t)$ 随时间衰减; $a = 0$ 时, $f(t)$ 不变, 是直流

电源的数学模型。

常数 A 表示 $t=0$ 时的初始值； $|a|$ 的大小反映信号随时间增、减的速率。

通常还定义时间常数 $\tau=1/|a|$ ， τ 越小，指数函数增长或衰减的速率越快，如图 1.3-1 所示。实际上遇到的多是如图 1.3-2 所示的单边指数信号，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.3-2)$$

特别地，若 $f(0)=A$ ，当 $t=\tau$ 时

$$f(\tau) = f(t) \Big|_{t=\tau} = \frac{A}{e} = 0.368A$$

即经过时间 τ 后，信号衰减为初始值的 36.8%。

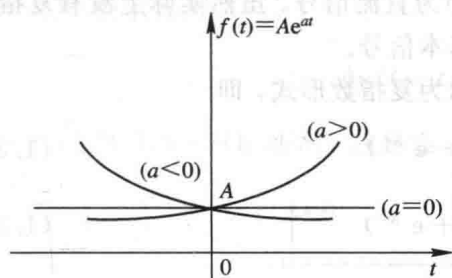


图 1.3-1 实指数信号

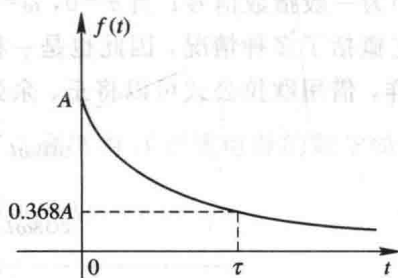


图 1.3-2 单边指数信号

2. 正弦信号

正弦信号也包括余弦信号，因为两者只在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$ ，一般正弦信号表示为

$$f(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1.3-3)$$

其中， A 是振幅， ω 是角频率， θ 是初相位。周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ ，是频率 f 的倒数。

正弦信号如图 1.3-3 所示。

实际工作中通常遇到的是衰减正弦信号，即包络按指数规律变化的振荡信号，如图 1.3-4 所示。

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-at} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0) \quad (1.3-4)$$

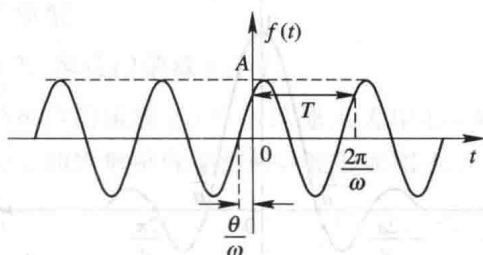


图 1.3-3 正弦信号

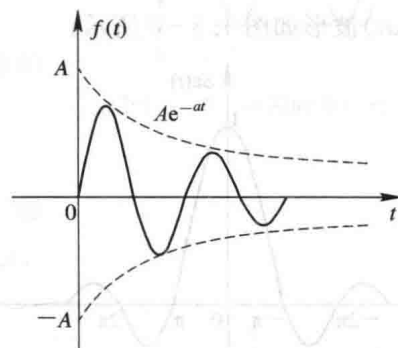


图 1.3-4 单边衰减振荡信号

3. 复指数信号

$$f(t) = Ae^{st} \quad (1.3-5)$$

其中, $s = \sigma + j\omega$ 为复数, σ 为实部系数, ω 为虚部系数。

借用欧拉公式:

$$Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t} = Ae^{\sigma t} \cos\omega t + jAe^{\sigma t} \sin\omega t \quad (1.3-6)$$

复指数信号可分解为实部与虚部。实部为振幅随时间变化的余弦函数, 虚部为振幅随时间变化的正弦函数。可分别用波形画出实部、虚部变化的情况。 σ 表示了正、余弦信号振幅随时间变化的情况; ω 是正、余弦信号的角频率。特别地, 当 $\sigma > 0$ 时, 正、余弦信号是增幅振荡; 当 $\sigma < 0$ 时, 正、余弦信号是减幅振荡; 当 $\sigma = 0$ 时, 正、余弦信号是等幅振荡。当 $\omega = 0$ 时, $f(t)$ 为一般指数信号; 当 $\sigma = 0, \omega = 0$ 时, $f(t)$ 为直流信号。虽然实际上没有复指数信号, 但它概括了多种情况, 因此也是一种重要的基本信号。

同样, 借用欧拉公式可以将正、余弦信号表示为复指数形式, 即

$$\sin\omega t = \frac{1}{j2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (1.3-7)$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (1.3-8)$$

4. Sa(t) 信号(抽样信号)

Sa(t) 信号定义为

$$f(t) = \text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1.3-9)$$

不难证明, Sa(t) 信号是偶函数, 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, 振幅衰减, 且 $f(\pm n\pi) = 0$, 其中 n 为整数。Sa(t) 信号还有以下性质

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.3-10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (1.3-11)$$

Sa(t) 信号如图 1.3-5 所示。

实际遇到的多为 Sa(at) 信号, 表达式为

$$\text{Sa}(at) = \frac{\sin at}{at} \quad (1.3-12)$$

Sa(at) 波形如图 1.3-6 所示。

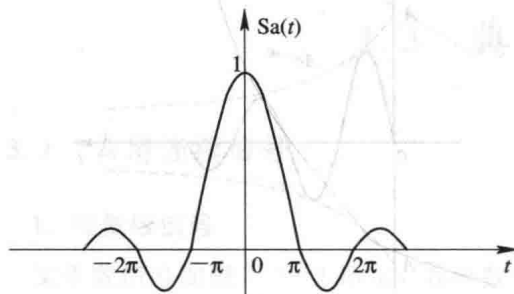


图 1.3-5 Sa(t) 信号

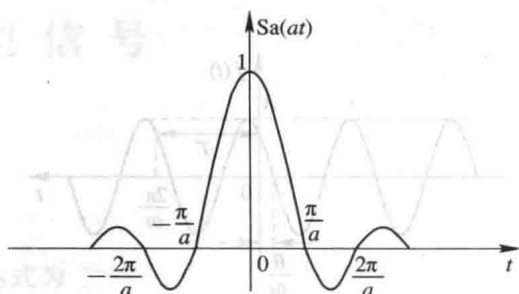


图 1.3-6 Sa(at) 信号

常常会遇到一些信号或其导数、积分有间断(跳变)点,这样的信号也称为奇异信号。下面介绍几个典型的奇异信号。

1.3.2 奇异信号

1. 单位阶跃信号 $u(t)$

定义

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1.3-13)$$

单位阶跃信号 $u(t)$ 如图 1.3-7(a) 所示。描述幅度为 A 、 t_0 时刻的阶跃信号记为 $Au(t-t_0)$, 表示式为

$$Au(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ A & t > t_0 \end{cases}$$

$Au(t-t_0)$ 如图 1.3-7(b) 所示, 这是表示 t_0 时刻接入幅度为 A 直流电源的数学模型。

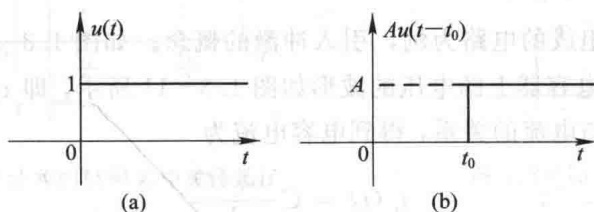


图 1.3-7 单位阶跃信号 $u(t)$ 和阶跃信号 $Au(t-t_0)$

利用单位阶跃信号 $u(t)$ 可以很方便地用数学函数来描述信号的接入(开关)特性或因果(单边)特性。

$$f(t)u(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.3-14)$$

例 1.3-1 用阶跃信号表示如图 1.3-8 所示的有限时宽正弦信号。

解
$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & 0 < t < 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

$$= \sin \omega t \cdot [u(t) - u(t-2T)]$$

有限时宽正弦信号是具有开关功能的正弦电源的数学模型。

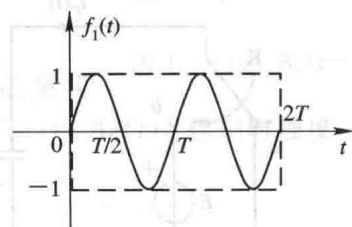


图 1.3-8 有限时宽正弦信号

2. 单位门函数 $g_\tau(t)$

单位门函数 $g_\tau(t)$ 是以原点为中心, 时宽为 τ 、幅度为 1 的矩形单脉冲信号, 波形如图 1.3-9(a) 所示。

$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} = \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1.3-15)$$

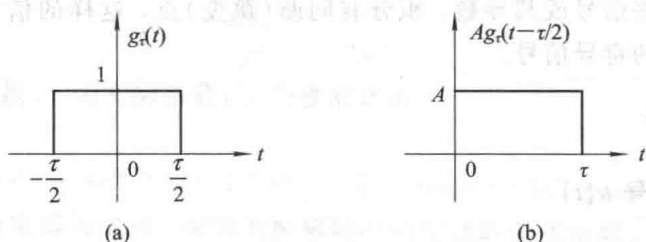


图 1.3-9 单位门函数及 $Ag_\tau(t-\tau/2)$

描述幅度为 A 、时刻 $t=0$ 时开始的门函数记为 $Ag_\tau(t-\tau/2)$ ，波形如图 1.3-9(b) 所示，表示式为

$$Ag_\tau(t-\tau/2) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ 或 } t > \tau \\ A & 0 < t < \tau \end{cases}$$

门函数是具有开关功能直流电源的数学模型。

3. 单位冲激函数 $\delta(t)$

可以用理想元件组成的电路为例，引入冲激的概念。如图 1.3-10 所示电路，当 $t=0$ 时，开关 K 由 $a \rightarrow b$ ，电容器上的电压的波形如图 1.3-11 所示，即 $v_C(t) = Eu(t)$ 。

由电容器上电压与电流的关系，得到电容电流为

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

当 $t > 0$ 或 $t < 0$ 时，不难得到流过电容器的电流 $i_C(t)$ 为零。而在 $t=0$ 时，电容器电压 $v_C(t)$ 突变为 E ，我们知道这时的电流一定不为零。可以认为在 $t=0$ 瞬间，有一无穷大的电流流过电容器，将电荷瞬间转移到电容器上，完成了对电容器的充电，使得电容电压在这一时刻发生了跳变。这种电流持续时间为零，电流幅度为无穷大，但电流的时间积分有限的物理现象可以用冲激函数 $\delta(t)$ 来描述。

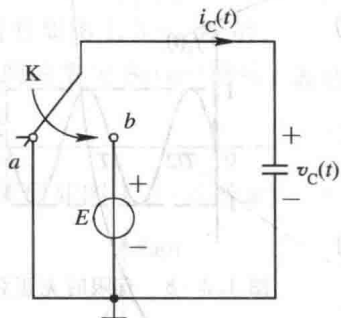


图 1.3-10 理想电路

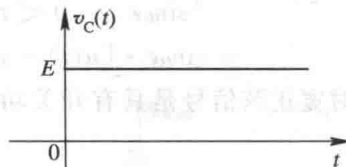


图 1.3-11 $v_C(t)$

有若干不同定义冲激信号 $\delta(t)$ 的方法，最常见的是利用面积为 1 的门函数取极限，思路可用图 1.3-12 说明。这是一个宽度为 τ ，幅度为 $1/\tau$ 的偶对称矩形脉冲信号。当保持矩形脉冲面积 $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$ 不变，而令宽度 $\tau \rightarrow 0$ 时，其幅度 $\frac{1}{\tau}$ 趋于无穷大，这个极限即为单位冲激函数，亦称为狄拉克函数，记为 $\delta(t)$ 。由对矩形脉冲取极限表示的单位冲激函数为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1.3-16)$$

单位冲激函数更一般的定义是

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.3-17)$$

单位冲激函数的波形用箭头表示,如图 1.3-13 所示。

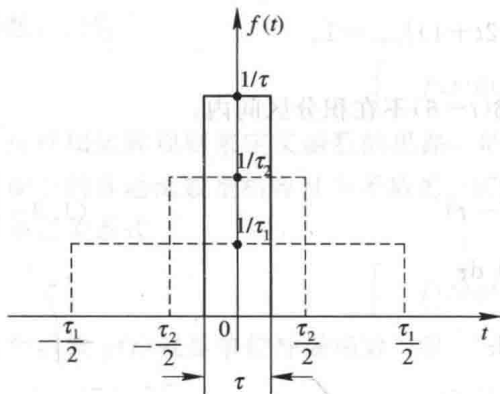


图 1.3-12 矩形脉冲的极限为冲激函数

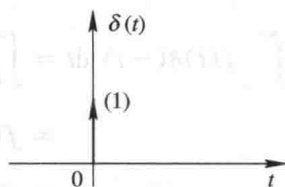


图 1.3-13 冲激函数

还有一些面积为 1 的偶函数,如三角形脉冲函数、双边指数脉冲函数、钟形脉冲函数等,当其宽度趋于 0 时的极限,也可以用来定义 $\delta(t)$ 函数,有兴趣的读者可参阅有关参考书,在这里就不一一介绍了。

描述任一时刻 $t=t_0$ 时的冲激函数记为 $\delta(t-t_0)$, 表示式为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1.3-18)$$

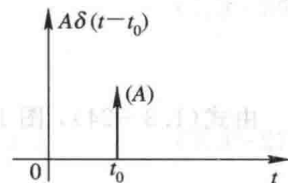


图 1.3-14 $A\delta(t-t_0)$

由于冲激函数的幅值为无穷,因此冲激函数能比较的是其强度。定义式(1.3-17)的积分值(面积)为冲激强度,如 $4\delta(t)$ 、 $A\delta(t)$ 。作图时强度一般标在箭头旁,如图 1.3-14 所示 $A\delta(t-t_0)$ 。

冲激函数还具有如下运算性质。

1) 取样性或“筛选”

若 $f(t)$ 是在 $t=0$ 及 $t=t_0$ 处连续的有界函数,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t) dt = f(0) \quad (1.3-19)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (1.3-20)$$

式(1.3-20)表明冲激函数具有取样(筛选)特性。如果要从连续函数 $f(t)$ 中抽取任一时刻的函数值 $f(t_0)$, 则只要乘以 $\delta(t-t_0)$, 并在 $(-\infty, \infty)$ 区间积分即可。同理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_1)\delta(t-t_0) dt = f(t_0-t_1) \quad (1.3-21)$$

例 1.3-2 计算

(1) $\cos t \delta(t)$;

(2) $(t-1)\delta(t)$;

(3) $\int_{-5}^5 (t^2 + 2t + 1)\delta(t) dt$;

(4) $\int_{-5}^5 (t^2 + 2t + 1)\delta(t-6) dt$ 。

解 (1) $\cos t \delta(t) = \delta(t)$, 因为 $\cos 0 = 1$ 。

(2) $(t-1)\delta(t) = -\delta(t)$, 因为 $(t-1)|_{t=0} = -1$ 。

(3) $\int_{-5}^5 (t^2 + 2t + 1)\delta(t) dt = 1$, 因为 $(t^2 + 2t + 1)|_{t=0} = 1$ 。

(4) $\int_{-5}^5 (t^2 + 2t + 1)\delta(t-6) dt = 0$, 因为 $\delta(t-6)$ 不在积分区间内。

2) 偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1.3-22)$$

证
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)\delta(\tau) d\tau \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau \\ &= f(0) \end{aligned}$$

结果与式(1.3-19)相同。

3) 与单位阶跃函数 $u(t)$ 互为积分、微分关系

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1.3-23)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (1.3-24)$$

由式(1.3-24), 图 1.3-10 电路的电容电流 $i_c(t)$ 可以用 $\delta(t)$ 函数描述为

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = CE\delta(t)$$

4) 尺度特性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.3-25)$$

证 $a > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt$, 令 $at = \tau$, $dt = \frac{1}{a} d\tau$, $t = \infty \rightarrow \tau = \infty$; $t = -\infty \rightarrow \tau = -\infty$; 代入式中得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{a}$$

$a < 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt$, 同 $a > 0$, 令 $at = \tau$, $dt = \frac{1}{a} d\tau$ 。但 $t = \infty \rightarrow \tau = -\infty$, $t = -\infty \rightarrow \tau = \infty$; 代入上式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau) d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = -\frac{1}{a}$$

综合 $a > 0$ 、 $a < 0$ 两种情况, 得