普通高等教育农业部“十二五”规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科系列教材

高等数学

下册

董　磊◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科系列教材

高等数学

下册

董　磊　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／董磊主编．—北京：中国农业出版社，2014.8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材　普通高等教育“十二五”应用型本科系列教材

ISBN 978-7-109-19246-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①董…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 159163 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　魏明龙

新华书店北京发行所发行

14 年 8 月北京第 1 次印刷

1/16　　印张：9.75

千字

00 元

，请向出版社发行部调换）

编审人员名单

主　编　董　磊

副主编　刘惠清　范彦方　王会英

　　　　甄新武

参　编　（按姓名拼音排序）

　　　　崔春红　付君丽　刘瑞英

　　　　刘　云　聂立川　王丽娟

　　　　王　阳　吴长刚　朱　莹

审　稿　张丽娜

前言

简单地说，数学的研究对象是“数”和“图形”。公元前7世纪之前，数学主要是关于“数”的研究，即对计数、初等算术和算法的研究。自公元前7世纪开始，由于古希腊数学家（泰勒斯、毕达哥拉斯等）的贡献，在数学中，加大了对“图形”研究的比重。“数”与“图形”的研究相辅相成、并行发展，勾股定理（又称“毕达哥拉斯定理”）就是数与形结合的一个完美例子。到了17世纪，在笛卡儿等人的启迪下，牛顿和莱布尼茨等人的部分研究成果发展成现代形式的解析几何学，使数与形的结合更臻于完美。

17世纪和18世纪，伴随资本主义的兴起和发展而来的是数学家们对自然界中运动与变化的极大关注。而牛顿和莱布尼茨创立的微积分给行星运动、机械运动、流体运动和动植物生长等的研究提供了最有力的工具和方法。从此，数学成了研究数、形以及运动和变化的学问，数学自初等数学时期进入了高等数学时期。由于运动和变化的数学描述仍然离不开数与形，所以19世纪时，恩格斯还是这样给数学下定义：数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的一门科学。这一定义即使在今天看来也不过时。

我们这本书主要讲述微积分这一高等数学的基本内容和方法。全书分上下两册，上册主要讲述一元函数的微积分，内容涉及一元函数的极限、导数、积分和微分方程，下册主要讲述多元函数的微积分，内容涉及多元函数的极限和微积分。细心地读者可以发现极限这一概念贯穿了全书的始终，所以有人把极限概念的形成作为初等数学和高等数学的“分水岭”。在学习高等数学的过程中，注重极限概念的理解和特殊极限（如导数、定积分等）的处理方法会达到事半功倍的学习效果。

在积累了多年的教学经验的基础上，本书针对文管类学生的特点和对数学基础的需求，积极对教材内容进行了组织，增加了教材内容的系统性、实用性和趣味性。为了增加读者对数学思想和数学发展史的了解，本书简要介绍了牛顿、莱布尼茨、拉格朗日、柯西和罗尔等数学家的生平和数学贡献，目的在于“抛砖引玉”，对此有兴趣的读者可参考本书后参考文献中的相关书籍，进一步了解这方面的知识。

我们特别感谢河北农业大学教务处相关领导、理学院各位领导、系领导贾鹂和数学系全体教师，没有他们的努力和付出，这本书是不可能出现的。感谢审稿人张丽娜教授，她仔细地审阅了全书，指出了若干疏漏和需改进的地方，提出了建议，为本书增色不少。

在本书的编写过程中，我们参考了许多优秀教材，从中受益匪浅，在此对这些教材的著作者表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中定有许多不妥的地方，敬请读者指正。

编　者

2014 年 3 月于河北农业大学

目录

第七章　向量代数　空间解析几何

在平面解析几何中，我们建立了平面图形和二元方程之间的关系．空间解析几何的任务就是建立空间图形（平面、曲面、空间直线和空间曲线等）与三元方程（组）之间的关系，这样做的目的是为研究多元函数的微积分做准备，而向量代数可以帮助建立空间图形与三元方程（组）之间的关系．

第一节　向量及其线性运算

一、向量

既有大小，又有方向的量称为**向量**（或**矢量**），如力、速度、加速度和位移等．

在数学上，常用一条有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，如图 7－1 所示，以 A 为始点、B 为终点的**向量**，记作$\overrightarrow{AB}$，还可以用一个黑斜体字母如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 等表示向量．

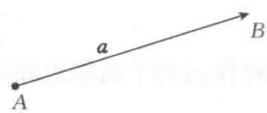

图 7－1

本书中讨论的向量都是只考虑其大小和方向，而不考虑其始点，这样的向量称为**自由向量**（以下简称**向量**）．如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等、方向相同，我们就说 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$．模为 1 的向量称为**单位向量**．模为 0 的向量称为**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$，由于零向量的始点和终点重合，其方向可以看作是任意的．

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平移，使其始点重合设为 O，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的终点分别设为 A 和 B（图 7－2），则称$\angle AOB$ $(0\leqslant\angle AOB\leqslant\pi)$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

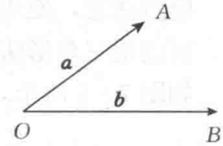

图 7－2

如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果$(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$，则称**向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，故可以认为零向量与任一向量都垂直，也可以认为零向量与任一向量都平行.

当两个平行向量经过平移使其始点重合时，它们的终点和公共始点在一条直线上，因此两向量平行又称**两向量共线**. 如图 7－3 所示平行四边形 $ABCD$ 中，向量$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{CB}$共线，向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DC}$也共线.

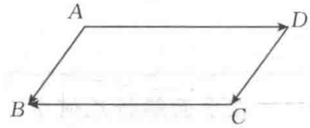

图 7－3

设有 $n(n\geqslant 3)$个向量，如果经过平移使它们的始点重合后，它们的终点和公共始点在一个平面上，那么就称这 n **个向量共面**. 图 7－3 中的向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DC}$就是共面的.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为始点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 A、C 得向量$\overrightarrow{AC}$(图 7－4)，则称向量$\overrightarrow{AC}$为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种作出两个向量之和的方法叫作**向量相加的三角形法则**.

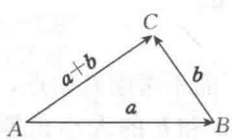

图 7－4

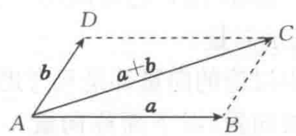

图 7－5

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行，我们还可以给出作出两个向量之和的另一种方法——**平行四边形法则**，即先作出$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，再以 AB、AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$，则向量$\overrightarrow{AC}$就等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 7－5).

应该注意，使用平行四边形法则求两个向量之和时，要求这两个向量不共线，而使用三角形法则求两个向量之和时则无此限制.

如图 7－5 所示，按照三角形法则，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

故
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$
在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的情况下，我们仍能证明上面等式，所以说**向量的加法满足交换律**.

如图 7-6 所示，易见
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$
对于 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的各种可能情况(如共线、共面等)，均可证明上面等式成立，所以说**向量的加法满足结合律**.

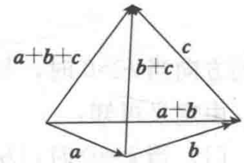

图 7-6

由于向量的加法满足交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$($n\geqslant 3$)相加时，不管顺序如何，也不管哪两个向量先相加，其结果都是一样的，可以记为
$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$
由向量相加的三角形法则，可得 $n(n\geqslant 3)$个向量相加的法则．以 $n=4$ 为例，向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 相加时，在空间任取一点，将 $\boldsymbol{a}_1$ 平移使其始点与空间选定的这一点重合，而后平移 $\boldsymbol{a}_2$ 使其始点与 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点重合，再平移 $\boldsymbol{a}_3$ 使其始点与 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点重合，再平移 $\boldsymbol{a}_4$ 使其始点与 $\boldsymbol{a}_3$ 的终点重合，最后连接 $\boldsymbol{a}_1$ 的始点与 $\boldsymbol{a}_4$ 的终点，得到一个以 $\boldsymbol{a}_1$ 的始点为始点、以 $\boldsymbol{a}_4$ 的终点为终点的向量，该向量就是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$(图 7-7).

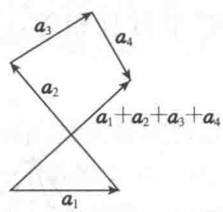

图 7-7

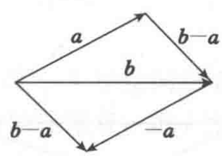

图 7-8

称与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-8).

由图 7-8 还可看出，如果把向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 经平移，使其始点重合，那么 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 就是以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为始点、$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量．特别地，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

利用三角形两边之和大于第三边，对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，可以证明
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|，且|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$
上面第一个式子中等号当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时成立，第二个式子中等号当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时成立．

2. 向量与实数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 k 的乘积记作 $k\boldsymbol{a}$，规定 $k\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模为

$$|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $k>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $k<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

由定义可知：

(1) 当 $k=0$ 时，$|k\boldsymbol{a}|=|0||\boldsymbol{a}|=0$，即 $k\boldsymbol{a}$ 为零向量；

(2) 当 $k=1$ 时，$|k\boldsymbol{a}|=|1||\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$，而 $1\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，即 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(3) 当 $k=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与实数的乘积符合下列运算规律：对任意实数 k、l，和任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，有

(1) 结合律：$k(l\boldsymbol{a})=l(k\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律：$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$；$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

以上运算规律的证明从略.

向量的加法以及向量与实数的乘法统称为**向量的线性运算**.

例 1 证明对角线互相平分的四边形为平行四边形.

证明 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相平分，即 $|OD|=|OB|$，$|OC|=|OA|$（图 7-9），于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC},$$

这说明四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 与 DC 平行且相等，从而是平行四边形.

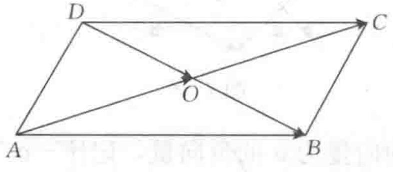

图 7-9

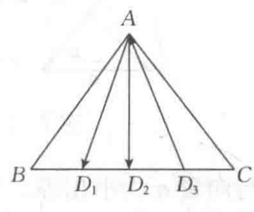

图 7-10

例 2 如图 7-10 所示，把三角形 ABC 的边 BC 四等分，设分点依次为 D_1、D_2 和 D_3，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD_1}$、$\overrightarrow{AD_2}$ 和 $\overrightarrow{D_3A}$.

解 注意到 $\overrightarrow{BD_1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_3B}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{c}$，于是

$$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AD_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

当实数 $k\neq 0$ 时，规定 $\frac{1}{k}\boldsymbol{a}$ 可以写成 $\frac{\boldsymbol{a}}{k}$. 设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

定理　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一的实数 k 使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

证明　先证条件的必要性．设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $|k|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则显然 $k=0$；如果 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则规定当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，k 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，k 取负值，于是 k 就是使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 成立的一个实数．

再证 k 的唯一性．设还有一个实数 l 满足 $\boldsymbol{b}=l\boldsymbol{a}$，则

$$(k-l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

从而

$$|k-l||\boldsymbol{a}|=0,$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|k-l|=0$，即 $k=l$.

条件的充分性由 $k\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$ 立即可得．

定理证毕．

上述定理是我们建立数轴的理论依据．给定一个单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和空间一个点 O，就可以建立一个数轴．方法如下：以 O 为坐标原点，把 $\boldsymbol{i}$ 经平移使其始点与 O 重合，其终点就是数轴上坐标为 1 的点．这样有了原点、单位长度和正方向(就是 $\boldsymbol{i}$ 的方向)，数轴就建立起来了．对数轴上任意一点 P，由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，故存在唯一一个实数 x 使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，这个 x 就是点 P 的坐标(图 7 - 11).

图 7 - 11

习　题　7 - 1

1. 证明：三角形的任意两边中点的连线的长是第三边长的一半．
2. 证明：梯形两腰中点的连线的长是上底与下底的长度之和的一半．

第二节　空间直角坐标系　向量的坐标

一、空间直角坐标系

将两两垂直的三个单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 进行平移使它们的始点重合，设这个公共始点为 O，则由 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 确定的三条以 O 为坐标原点的两两垂直的数轴就构成一个**空间直角坐标系**．由 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 确定的三条数轴分别称为 x **轴**（**横轴**）、y **轴**（**纵轴**）**和** z **轴**（**竖轴**），它们统称为**坐标轴**，由它们构成的空间直角坐标系称为 $Oxyz$ **坐标系**．在 $Oxyz$ 坐标系中，通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，三条坐标轴的正向通常符合右手规则：即以右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．这种空间直角坐标系也称为**右手系**（图 7－12）．

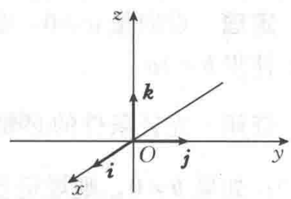

图 7－12

由三条坐标轴中的每两条都可以确定一个平面，这样确定的三个平面统称为**坐标面**，由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy **面**，其他两个坐标面分别是 yOz **面**和 zOx **面**．三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**．回忆一下平面直角坐标系上象限的定义，如图 7－13 所示，注意到坐标轴上的点不属于任何一个象限．在 $Oxyz$ 坐标系中，xOy 面配置在水平面上，z 轴正向铅直向上（x 轴、y 轴和 z 轴的正向符合右手规则），在 xOy 面上第一、第二、第三和第四象限的上方的空间部分分别称为第一、第二、第三和第四卦限，第一、第二、第三和第四象限的下方的空间部分分别称为第五、第六、第七和第八卦限（图 7－14）．这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ和Ⅷ表示．应该注意坐标面上的点不属于任何一个卦限．

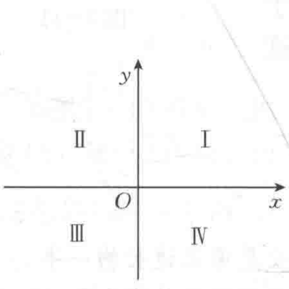

图 7－13

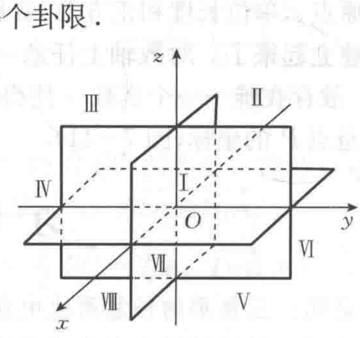

图 7－14

二、向量的坐标

任给一个空间向量 $\boldsymbol{r}$，将其平移使它的始点与空间直角坐标系的坐标原点 O 重合，记其终点为 M，即 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 作以 OM 为对角线的长方体 $RHMK-OPNQ$(图 7-15)，具体作法如下：过点 M 作 xOy 面的垂线，垂足(垂线与 xOy 面的交点)为 N，再过 N 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，它们分别与 x 轴和 y 轴交于 P 和 Q 两点，再过点 P 作与 MN 平行的线段 PH，使得 $|PH|=|MN|$，再过 H 作 x 轴的平行线交 z 轴于点 R，再过点 R 作平行于 y 轴的线段 RK 使得 $|RK|=|OQ|$，最后连接 HM、MK 和 QK 即可.

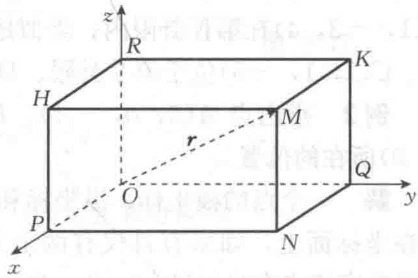

图 7-15

由图7-15 易见

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

根据上节定理，可设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上面式子称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$ 分别称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量**.

按照上面的作法，给定向量 $\boldsymbol{r}$ 后，就有唯一确定的三个有序实数 x，y 和 z 与之对应. 另一方面，如果给了三个有序实数 x，y 和 z，我们就可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别找到三个点 P、Q 和 R 使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

再以 OP、OQ 和 OR 为三个邻边可以作出一个长方体 $RHMK-OPNQ$，其对角线 OM 对应的向量 $\overrightarrow{OM}$ 满足 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这正好是 $\boldsymbol{r}$.

综上，我们建立了向量 $\boldsymbol{r}$、空间一点 M 和有序三元数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系：

$$\boldsymbol{r}\leftrightarrow M\leftrightarrow(x, y, z).$$

据此，定义：(x, y, z) 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，(x, y, z) 也称为**点 M 的坐标**，记作 $M(x, y, z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.

例 1　在空间直角坐标系中，点 $A(1, -3, 4)$、$B(2, -3, -1)$、$C(1,$