高等工科院校教材

工程数学

GONGCHENG SHUXUE

主　编　吴宗翔
副主编　吴彦强　范胜君　张祥芝　胡志刚　严兴杰

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

J材

工 程 数 学

主　编　吴宗翔
副主编　吴彦强　范胜君　张祥芝
　　　　胡志刚　严兴杰

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书根据教育部高等教育本科复变函数与积分变换课程的基本要求，结合作者多年教授工程数学的教学体会编写而成的，是普通高等工科院校专业基础课教材，主要内容包括复变函数、矢量分析与场论和积分变换等三部分的知识，具体内容为复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、矢量分析与场论、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。每章末附有习题，便于读者检查自己对相应章节内容的掌握情况。本书在编写过程中注重对学生解题方法的指导和思维能力的培养，力争做到重点突出、条理清晰。

本书可作为高等院校工科专业的教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 / 吴宗翔主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2017.9

ISBN 978-7-5646-3705-7

Ⅰ.①工… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①工程数学－高等学校－教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 217532 号

书　　名 工程数学
主　　编 吴宗翔
责任编辑 王加俊
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本 787×960　1/16　**印张** 10.5　**字数** 200 千字
版次印次 2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 25.00 元

前　言

工程数学是普通高等院校工科专业的一门重要基础课程，是现代科学理论基础的重要组成部分。它也是解决实际问题的一门重要工具，特别是在信息与控制等专业的基础课的学习中，积分变换是需要熟练掌握的内容。

本书是根据教育部高等教育本科复变函数与积分变换课程的基本要求，综合作者多年的教学经验，结合工程数学教学团队多年教学的一些心得体会而编写的一本教材。为满足各类专业及不同层次的需求，并体现理论联系实际的原则，本书强化了实用性内容，以更利于学生学以致用。在编写过程中力争做到重点突出、条理清晰，并且注重对学生解题方法的指导和思维能力的培养。

本书主要内容包括复变函数、矢量分析与场论和积分变换等三部分的知识，具体内容为复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、场论、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。每章末附有习题，以便于读者能够检查自己对相应章节内容的掌握情况。

本书第 1 章和第 2 章由范胜君编写，第 3 章由吴彦强编写，第 4 章和第 5 章由吴宗翔编写，第 6 章由张祥芝编写，第 7 章由胡志刚编写，第 8 章由严兴杰编写。全书由吴彦强统稿。

本书的编写得到了国家自然基金(项目编号:11501560)的资助。在编写过程中，中国矿业大学数学学院的多位教师对书稿提出了很多的宝贵意见和建议，在此由衷地表示感谢。

在编写过程中，作者力求内容完整，避免谬误，但由于水平有限，不足之处难免，恳请读者在使用过程中，不吝赐教，多多指正。

编　者

2017 年 8 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数，它是本课程的研究对象. 由于在中学阶段已经学习过复数的概念和基本运算，本章将在原有的基础上作简要的复习和补充；然后再介绍复平面上的区域以及复变函数的极限和连续性等概念，为进一步研究解析函数的理论和方法奠定必要的基础.

§ 1.1　复数及其运算

1. 复数的三种表示式

每个复数 z 都具有 $x+\mathrm{i}y$ 的形状，称为复数的一般表示式，其中 x 和 y 为实数，$\mathrm{i}^2=-1$；x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部，分别记作 $x=\mathrm{Re}z$ 及 $y=\mathrm{Im}z$，i 被称为虚数单位. 当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$，我们把它看作是实数 x. 如果两个复数 z_1 和 z_2 的实部和虚部分别相等，那么称这两个复数相等. 与实数不同，一般来说，任意两个复数不能比较大小.

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上点的全体成一一对应关系，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点表示，这是复数的一个常用表示方法. 此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面. 这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且把“点 z”作为“数 z”的同义词，从而使我们能借助几何语言和方法研究复变函数的问题，也为复变函数应用于实际奠定了基础.

在复平面上，复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应，因此复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1-1). 向量的长度称为 z 的模或绝对值，记作 $|z|$ 或 r，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-1}$$

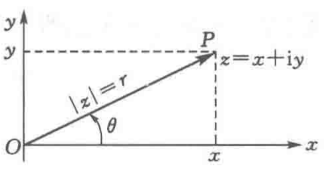

图 1-1

显然，下列各式成立：$|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，

$|z|\leqslant|x|+|y|$.

在 $z\neq 0$ 的情况，以正实轴为始边，以 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记作 θ. 显然 θ 有无穷多个不同的值，把它们记作

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi \tag{1-2}$$

这里 k 为任意整数.

$\operatorname{Arg} z$ 中只有一个值 θ_0 满足条件 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$，它叫作 z 的辐角主值，记作 $\arg z$. 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角任意. 下面是对辐角主值公式的一个总结：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{若 } x>0, y \text{ 任意;}\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } x=0, y\neq 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{若 } x<0, y>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{若 } x<0, y<0;\\ \pi, & \text{若 } x<0, y=0.\end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

利用直角坐标与极坐标的关系：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，还可以把 z 表示成下面的形式：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-3}$$

它称为复数的三角表示式，再利用欧拉公式①：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，我们又可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-4}$$

它称为复数的指数表示式. 复数的三种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要.

【例 1-1】 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z=-3-4\mathrm{i}$;　　(2) $z=-\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然，$r=|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 由于 z 在第三象限，则 z 对应的起点在原点的向量与负实轴所夹的锐角为：

$$\theta=\arctan\frac{|-4|}{|-3|}=\arctan\frac{4}{3}.$$

---

① 其实，它是欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$（$z$ 为任意复数）的特殊情况，这个公式的来源参见第 2 章 §2.3 公式(2-7).

因而 z 的辐角主值为 $\arg z=\arctan\frac{4}{3}-\pi$，故 z 的三角表示式为：

$$z=5\left[\cos\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\right].$$

z 的指数表示式为：

$$z=5\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\mathrm{i}}.$$

(2) 显然，$r=|z|=1$，由于 z 在第二象限，则 z 对应的起点在原点的向量与负实轴所夹的锐角为：

$$\theta=\arctan\frac{\left|\cos\frac{\pi}{5}\right|}{\left|-\sin\frac{\pi}{5}\right|}=\arctan\left[\cot\frac{\pi}{5}\right]=\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\frac{3}{10}\pi.$$

因而 z 的辐角主值为：$\arg z=\pi-\theta=\frac{7}{10}\pi$. 故 z 的三角表示式为：

$$z=\left[\cos\frac{7}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{10}\pi\right].$$

z 的指数表示式为：

$$z=\mathrm{e}^{\frac{7}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

2. 复数的运算

对复数引进加、减、乘、除运算. 设 x_1,x_2,y_1,y_2 均为实数. 复数的加法和乘法运算由下列等式定义：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2). \tag{1-5}$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2). \tag{1-6}$$

在式(1-6)中，把乘积展成“变数 i”的多项式，然后用 -1 代替 i^2，就得到右边的结果. 减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算. 我们有

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2). \tag{1-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}&=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}\\&=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\quad(x_2^2+y_2^2\neq 0).\end{aligned} \tag{1-8}$$

可以证明，复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则.

两复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 称为是(相互)共轭的. 如果其中之一用 z 表示，另一个则为 $\bar{z}$. 显然，点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称，且若 $y\neq 0$ 时，$\arg z=-\arg\bar{z}$，另外，$z\bar{z}=|z|^2=|zz|$. 共轭复数还有如下性质，请读者自己去证明：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

(2) $\overline{\overline{z}}=z$；

(3) $\overline{z}z=[\mathrm{Re}\ z]^2+[\mathrm{Im}\ z]^2$；

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\ z, z-\overline{z}=2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ z$.

【例 1-2】 设 $z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}\ z$，$\mathrm{Im}\ z$ 与 $z\overline{z}$.

解 因为
$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$$
$$=\mathrm{i}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

所以 $\mathrm{Re}\ z=\frac{3}{2}$，$\mathrm{Im}\ z=-\frac{1}{2}$，$z\overline{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

容易验证，根据复数加减法的定义，复数 z_1 及 z_2 相加减与向量 $\boldsymbol{z}_1$ 及 $\boldsymbol{z}_2$ 相加减的规律一致，即满足平行四边形法则和三角形法则(图 1-2). 在物理学中，如力、速度、加速度等都可用向量来表示，这就说明了复数可以用来表示实有的物理量.

另外，若把 z_1 及 z_2 看作是复平面上的两点，不难看出，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 及 z_2 之间的距离(图 1-3)，因此由图 1-2 和图 1-3，我们有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \quad (\text{三角不等式}). \tag{1-9}$$
$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1-10}$$

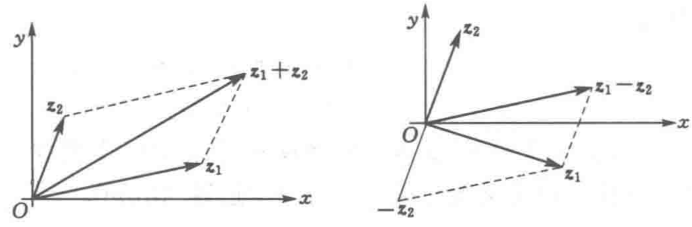

图 1-2

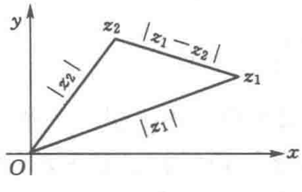

图 1-3

【例 1-3】 设 z_1, z_2 为两个任意的复数，试用复数的运算证明式(1-9).

证 因为

$$
\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&=z_1\,\overline{z_1}+z_2\,\overline{z_2}+z_2\,\overline{z_1}+z_1\,\overline{z_2}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+\overline{z_1\,\overline{z_2}}+z_1\,\overline{z_2}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\,\overline{z_2})\\
&\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\,\overline{z_2}|\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\,|z_2|\\
&=(|z_1|+|z_2|)^2.
\end{aligned}
$$

故上式两边开方，就得到所要证明的三角不等式.

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么由乘法的定义得：

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\\
&\quad\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].
\end{aligned}
\tag{1-11}
$$

如果用指数形式表示复数：

$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

那么式(1-11)可以简明地表示为：

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1-12}$$

同样由除法的定义我们可以证明：

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}\quad(r_1\neq0). \tag{1-13}$$

现在我们考虑复数的乘幂和方根. 设 n 是正整数，n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n. 若 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，那么由式(1-12)递推可得：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1-14}$$

如果我们定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，那么当 n 为负整数时上式也是成立的. 作为练习，请读者自己证明. 特别，在式(1-14)中取 $r=1$，我们就得到著名的棣莫弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1-15}$$

如果 $n(\geqslant2)$ 是正整数，定义 $\sqrt[n]{z}$ 是满足 $\omega^n=z$ 的复数 ω，那么由式(1-14)可导出：

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right). \tag{1-16}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根，当 k 以其他整数值代入时，这些

根又重复出现. 在几何上,不难看出$\sqrt[n]{z}$的 n 个值就是以原点为中心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

【例 1-4】 求$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的所有值.

解 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$,我们有

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}&=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]\\&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\quad(k=0,1,2,3).\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\omega_0,\mathrm{i}\omega_0,-\omega_0,-\mathrm{i}\omega_0,$$

其中

$$\omega_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

3. 复数方程

下面的两个例子表明,很多平面图形能用复数形式的方程(或不等式)来表示,也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

【例 1-5】 将通过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程表示.

解 我们知道,通过点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的直线可以用参数方程表示为:

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

因此,它的复数形式的参数方程为:

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\quad(-\infty<t<+\infty).$$

由此可知由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程可以写成:

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

取 $t=\frac{1}{2}$,得知线段$\overline{z_1z_2}$的中点为:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

【例 1-6】 求下列方程所表示的曲线:(1) $|z+\mathrm{i}|=2$; (2) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

解 (1) 在几何上不难看出,方程$|z+\mathrm{i}|=2$ 表示所有与点$-\mathrm{i}$距离为 2 的点的轨迹,即中心为$-\mathrm{i}$、半径为 2 的圆[图 1-4(a)]. 下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，方程变为 $|x+(y+1)\mathrm{i}|=2$，也就是 $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$ 或 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) 设 $z=x+y\mathrm{i}$，那么 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$，从而立即可得所求曲线的方程为 $y=-3$，这是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-4(b) 所示.

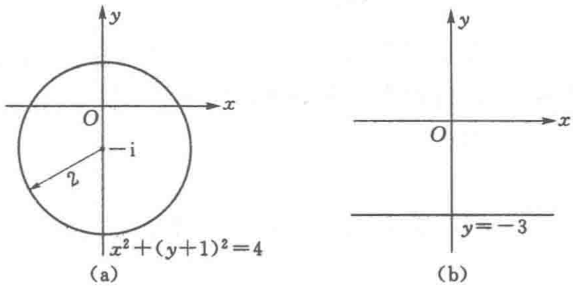

图 1-4

4. 复球面①

在上文中，我们引进了复平面，现在要作出复数在球面上的几何表示. 在点坐标是 (x,y,u) 的三维空间中，把 xoy 平面看作是 $z=x+\mathrm{i}y$ 平面，考虑球面：$x^2+y^2+(u-1)^2=1$，取定球面上的一点 $N\ (0,0,2)$，称为球极，作连接 N 与 xoy 平面上任一点 $A\,(x,y,0)$ 的直线，并且设这直线与球面的交点是 $A'(x',y',u')$，那么 A' 称为 A 在球面上的球极射影. 复平面上一点 z 的模愈大，那么它的球极射影就愈接近于 N，由于球上只有一个球极 N，我们约定复平面上有一个理想的点，称为无穷远点，其球极射影为 N.

这样，我们就建立了球面上的点 A' 与复平面上的点 A 之间的一一对应关系，同时也就与复数的全体建立了一一对应关系. 无穷远点及 N 分别可看作一个新引进的非正常复数无穷大（即 ∞）在平面及球面上的几何表示. 我们把包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面；不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或者称为复平面.

对于复数 ∞，实部和虚部以及辐角的概念都没有意义；至于它的模，则约定为 $+\infty$（$|\infty|=+\infty$）. 而对于任何正常的复数 z，$|z|<+\infty$.

① 球极射影最初是在天文学中引进的，后来又应用在地理学中. 应用球极射影可以把天球或地球表示在平面上.

为了以后需要，我们引进下列运算的意义：设 α 为有限复数，那么

$$\alpha\pm\infty=\infty\pm\alpha=\infty;$$

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty\quad(\alpha\neq0);$$

$$\frac{\alpha}{0}=\infty\quad(\alpha\neq0),\ \frac{\alpha}{\infty}=0\quad(\alpha\neq\infty).$$

运算 $\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{0}{0}$ 以及 $\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义.

这里我们引进扩充复平面与无穷远点，在很多讨论中，能够带来方便和和谐. 但在本书以后各处，除特别声明外，所谓“平面”一般仍指有限复平面，所谓“点”仍指有限复平面上的点.

§1.2 区　　域

现在，我们来研究复变数的问题. 同实变数一样，每一个复变数都有自己的变化范围. 在今后的讨论中，所遇到的变化范围主要就是所谓区域.

1. 区域的概念

平面上以 z_0 为中心，δ（任意的正数）为半径的圆：$|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域①，而称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集为 z_0 的去心邻域. 如果平面点集 D 中的任意一点都有全部含于 D 的邻域存在，那么称 D 为开集. 如果 D 中的任何两点都可以用完全属于 D 的折线连接起来（图 1-5），那么称 D 是连通的. 连通的开集称为区域. 如果区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，那么称 D 为有界区域，否则称 D 为无界区域. 如果平面上的点 $P\notin D$ 的任意小的邻域内总有区域 D 中的点，这样的点 P 称为 D 的边界点，D 的所有边界点组成 D 的边界，区域 D 与它的边界一起构成闭区域，记作 $\overline{D}$.

例如，满足不等式 $r_1<|z-z_0|<r_2$ 的所有点构成一个有界区域，区域的边界由两个圆周 $|z-z_0|=r_1$ 和 $|z-z_0|=r_2$ 组成[图 1-6(a)]，称为圆环域. 如果在圆环域内去掉一个（或几个）点，它仍然构成区域，只是区域的边界由两个圆周和一个（或几个）孤立的点组成[图 1-6(b)]. 这两个区域都是有界的，而圆的外部 $|z-z_0|>R$，上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$，角形域 $0<\arg z<\varphi$ 及带形域 $0<\mathrm{Im}\,z<b$

① 包括无穷远点自身在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，其中实数 $M>0$，称为无穷远点的邻域. 换句话说，无穷远点的邻域是包括无穷远点自身在内的圆 $|z|=M$ 的外部. 不包括无穷远点自身在内的圆 $|z|=M$ 的外部的点的集合，称为无穷远点的去心邻域，它可表示为 $M<|z|<+\infty$.

等都是无界区域.

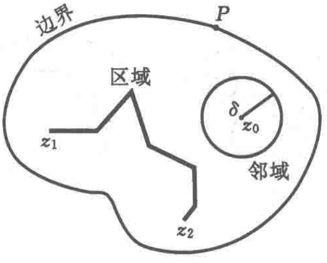

图 1-5

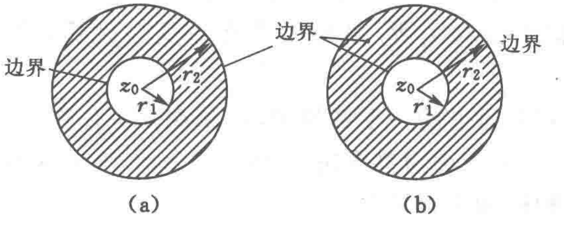

图 1-6

2. 单连通域与多连通域

先介绍几个有关平面曲线的概念. 我们知道,如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数,那么方程组

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

代表一条平面曲线,称为连续曲线. 如果令 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$,那么该曲线就可以用一个方程

$$z=z(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

来代表,这就是平面曲线的复数表示式. 如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的,且对于 t 的每一个值,有 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$,那么这曲线称为光滑的. 由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

设 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 为一条连续曲线,$z(a)$ 和 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点. 对于满足 $a<t_1<b, a<t_2<b$ 的 t_1 和 t_2,当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时,点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点,没有重点的曲线,称为简单曲线或若尔当(Jordan)曲线. 如果简单曲线 C 的起点和终点重合,即 $z(a)=z(b)$,那么曲线 C 称为简单

闭曲线[图 1-7(a)]. 由此可知，简单曲线自身不会相交. 图 1-7(c)和图 1-7(d)所示都不是简单曲线.

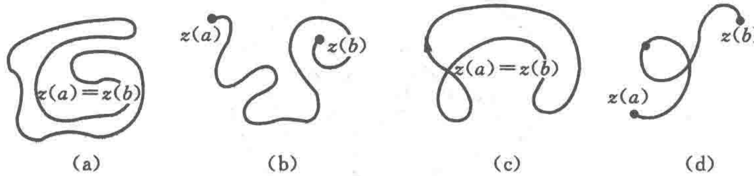

图 1-7

任意一条简单闭曲线 C 把整个复平面唯一地分成三个互不相交的点集，其中除去 C 以外，一个是有界区域，称为 C 的内部，另一个是无界区域，称为 C 的外部，C 为它们的公共边界. 简单闭曲线的这一性质，其几何意义是很清楚的.

定义 1.1 复平面上的一个区域 B，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于 B，就称为单连通域[图 1-8(a)]. 一个区域如果不是单连通域，就称为多连通域[图 1-8(b)].

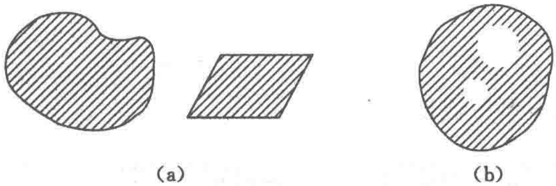

图 1-8

一条简单闭曲线的内部是单连通域[图 1-8(a)]. 单连通域 B 具有这样的特征：属于 B 的任意一条简单闭曲线，在 B 内可以经过连续的变形而缩成一点，而多连通域就不具有这样的特征.

§1.3 复变函数的定义、极限和连续性

1. 复变函数的定义

定义 1.2 设 G 是一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合. 如果有一个确定的法则存在，按照这一法则，对于集合 G 中的每一个复数 z，就有一个或几个复数 $\omega=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，那么称复变数 ω 是复变数 z 的函数(简称复变函数)，记作 $\omega=$

$f(z)$.

如果 z 的一个值对应着 ω 的一个值，那么我们称函数 $f(z)$ 是单值的；如果 z 的一个值对应着 ω 的两个或两个以上的值，那么我们称函数 $f(z)$ 是多值的. 集合 G 称为 $f(z)$ 的定义集合，对应于 G 中所有 z 的一切 ω 值所成的集合 G^* 称为函数值集合.

在以后的讨论中，定义集合 G 是一个平面区域，称之为定义域. 并且，如无特别声明，所讨论的函数均为单值函数.

由于给定了一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就相当于给定了两个实数 x 和 y，而复数 $\omega=u+\mathrm{i}v$ 亦同样地对应着一对实数 u 和 v，所以复变函数 ω 和自变量 z 之间的关系 $\omega=f(z)$ 就相当于两个关系式：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数，分别称为实部函数和虚部函数.

例如，考察函数 $\omega=z^2$. 令 $z=x+\mathrm{i}y$，$\omega=u+\mathrm{i}v$，那么

$$u+\mathrm{i}v=(x+y\mathrm{i})^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}.$$

因而函数 $\omega=z^2$ 就对应于两个二元实变函数：$u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

在《高等数学》中，我们常把实变函数用几何图形来表示，这些几何图形，可以直观地帮助我们理解和研究函数的性质. 对于复变函数，由于它反映了两对变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系，因而无法用同一个平面内的几何图形表示出来，必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，而用另一个平面（ω 平面）上的点表示函数 ω 的值，那么函数 $\omega=f(z)$ 在几何上就可以看成是把 z 平面上的一个点集 G（定义集合）变到 ω 平面上的一个点集 G^*（函数值集合）的映射（或变换）. 这个映射通常简称为由函数 $\omega=f(z)$ 所构成的映射. 如果 G 中的点 z 被映射 $\omega=f(z)$ 成 G^* 中的点 ω，那么 ω 称为 z 的象，而 z 称为 ω 的原象. 今后我们不再区分函数和映射（变换）.

2. 复变函数的极限

定义 1.3 设函数 $\omega=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内. 如果有一确定的数 A 存在，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$（$0<\delta\leqslant\rho$），使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，那么称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，或记作当 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$（图 1-9）.

这个定义的几何意义是：当变点 z 进入 z_0 的充分小的 δ 去心邻域时，它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的预先给定的 ε 邻域中. 跟一元实变函数极限的几何意义相比十分类似，只是这里用圆形域代替了那里的区间.