

中国空气动力研究与发展中心系列图书

邓小刚院士 研究论文选集

刘 刚 陈坚强 张来平 毛枚良 刘 伟 编



科学出版社

邓小刚院士研究 论文选集

刘 刚 陈坚强 张来平 毛枚良 刘 伟 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书选编了作者及研究团队多年来在算法方面具有代表性的论文,主要涉及高精度有限差分格式构造方法及理论、高精度格式推广及应用技术等内容。前言简要介绍了作者本人以及所带领的研究团队开展研究工作的情况,第一部分主要是作者在高精度有限差分算法研究方面的综述性文章,第二部分为高精度格式及其构造理论,包括高精度有限差分格式的设计方法、频谱分析方法以及几何守恒律理论;第三部分为高精度格式推广和应用技术研究,主要包括如何将标量方程下设计的高精度格式推广到多维贴体坐标下的流动方程求解,如何在高性能计算机上进行高效并行计算等;第四部分为高精度格式的具体应用,主要介绍采用自主设计的 HDCS 格式和 WCNS 格式对典型复杂流动的精细模拟。附录罗列了邓小刚院士及合作者发表的部分论文。

本书可供从事计算流体力学的研究人员、高校流体力学专业的学生和教员阅读,也可作为航空航天相关领域工程技术人员的工具书和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

邓小刚院士研究论文集/刘刚等编. —北京:科学出版社,2018.10

ISBN 978-7-03-058923-1

I. ①邓… II. ①刘… III. ①流体力学-数值模拟-文集 IV. ①O35-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 219406 号

责任编辑:赵敬伟 / 责任校对:胡庆家
责任印制:肖 兴 / 封面设计:耕者工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 10 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018 年 10 月第一次印刷 印张:34 1/2 插页:24

字数:696 000

定价:280.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本文集选编了邓小刚院士研究工作中具有代表性的论文, 主要涉及高精度格式构造理论及方法、高精度格式推广应用技术等主题, 重点展示了他在高精度数值模拟方法方面取得的丰硕成果。

邓小刚院士长期从事空气动力学数值模拟研究和应用工作, 是我国高精度数值方法研究的杰出代表, 在计算流体力学 (CFD) 理论方法研究、大型软件研制和解决国家重大项目中关键空气动力学问题等方面, 做出了系统的创新成果。针对湍流、转捩、噪声和激波等跨尺度复杂流动数值模拟的需要, 创立了高精度非线性紧致格式设计方法, 解决了高精度紧致格式捕捉激波产生非物理波动的难题; 在实现高精度数值方法工程化应用方面, 发现并突破了几何守恒律、跨边界保持高精度和网格中奇点高精度处理等诸多难题; 主持研制了高精度数值风洞 (TH-HiNWT) 及我国第一个具有自主知识产权的高超声速 CFD 软件平台 (CHANT), 其应用解决了我国航空航天飞行器大量关键气动问题。

邓小刚院士研究兴趣广泛, 除高精度算法方面的研究外, 其研究工作还涉及高超声速复杂流动机理、网格生成技术、湍流数值模拟、等离子体流动控制等诸多领域。在多个领域均取得了不少创新性成果, 不完全统计, 到目前为止, 在国内外重要学术期刊发表论文 120 余篇。限于篇幅, 本文集仅选编约 30 篇代表作, 其他论文列于最后的发表论文目录之中。

目 录

前言

综述与进展

高精度加权紧致非线性格式的研究进展 (邓小刚, 刘昕, 毛枚良, 张涵信) 3

基于 HDCS-E8T7 格式的气动噪声数值模拟方法研究进展

..... (姜屹, 邓小刚, 毛枚良, 刘化勇) 14

计算流体力学中的验证与确认 (邓小刚, 宗文刚, 张来平, 高树椿, 李超) 30

高精度格式及其构造理论

High-order accurate dissipative weighted compact nonlinear schemes.....

..... (DENG Xiaogang) 43

Developing High-Order Weighted Compact Nonlinear Schemes.....

..... (Xiaogang Deng, Hanxin Zhang) 58

Geometric conservation law and applications to high-order finite difference

schemes with stationary grids.....

(Xiaogang Deng, Meiliang Mao, Guohua Tu, Huayong Liu, Hanxin Zhang) 81

A family of hybrid cell-edge and cell-node dissipative compact schemes satisfying

Geometric conservation law.....

(Xiaogang Deng, Yi Jiang, Meiliang Mao, Huayong Liu, Song Li, Guohua Tu) 97

Further studies on Geometric Conservation Law and applications to high-order

finite difference schemes with stationary grids..... (Xiaogang Deng,

Yaobing Min, Meiliang Mao, Huayong Liu, Guohua Tu, Hanxin Zhang) 114

On the freestream preservation of finite volume method in curvilinear coordinates

..... (Dan Xu, Xiaogang Deng, Yaming Chen, Yidao Dong, Guangxue Wang) 136

Reevaluation of high-order finite difference and finite volume algorithms with

freestream preservation satisfied.....

..... (Yidao Dong, Xiaogang Deng, Dan Xu, Guangxue Wang) 149

高精度格式推广/应用技术研究

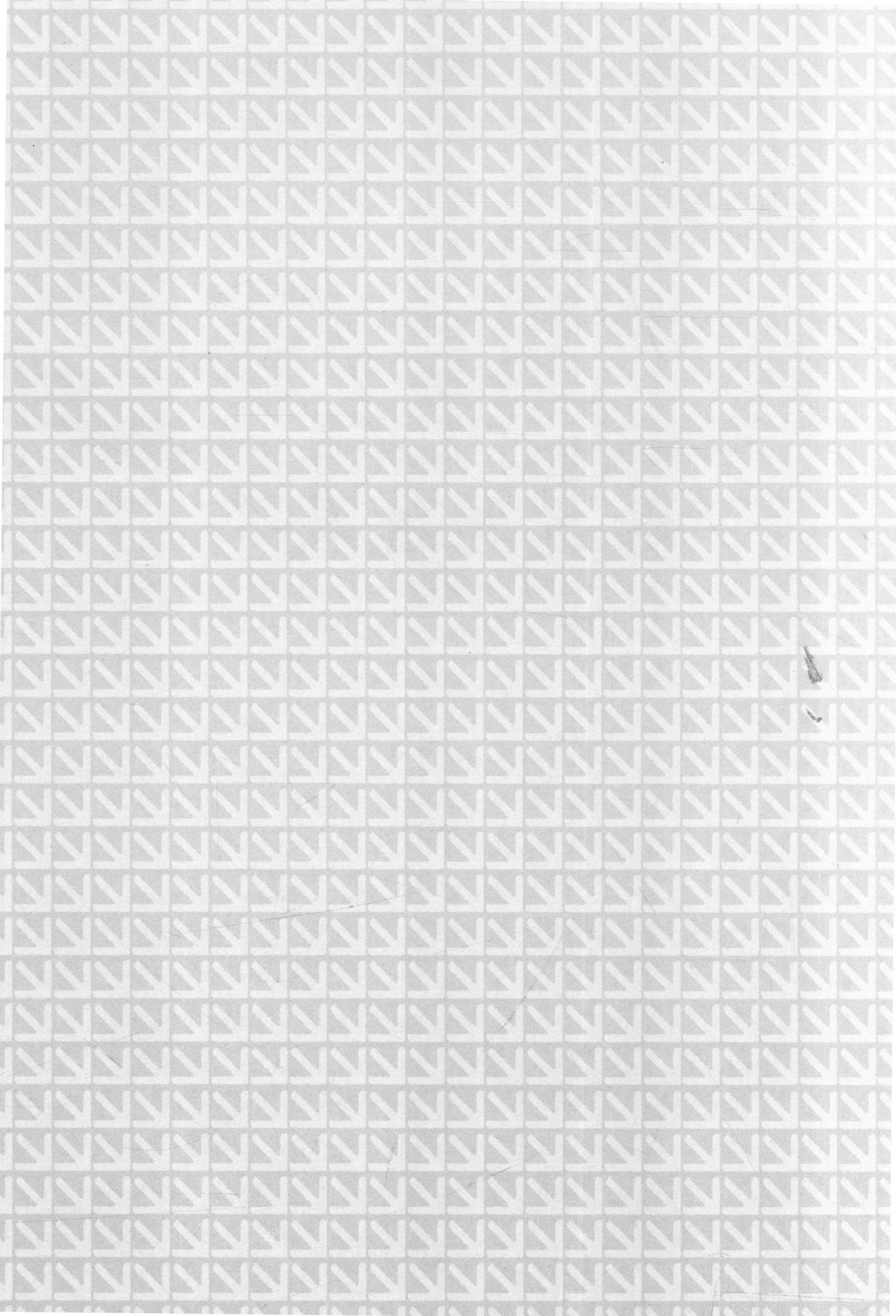
Extending Weighted Compact Nonlinear Schemes to Complex Grids with

Characteristic-Based Interface Conditions·····	
····· (Xiaogang Deng, Meiliang Mao, Guohua Tu, Yifeng)	161
High-Order Behaviors of Weighted Compact Fifth-Order Nonlinear Schemes·····	
····· (Liu Xin, Deng Xiaogang, Mao Meiliang)	173
Large eddy simulation on curvilinear meshes using seventh-order dissipative compact scheme·····	
(Yi Jiang, Meiliang Mao, Xiaogang Deng, Huayong Liu)	178
Developing a hybrid flux function suitable for hypersonic flow simulation with high-order methods·····	
····· (Dongfang Wang, Xiaogang Deng, Guangxue Wang, Yidao Dong)	189
Efficiency benchmarking of seventh-order tri-diagonal weighted compact nonlinear scheme on curvilinear mesh·····	
(Shengye Wang, Xiaogang Deng, Guangxue Wang, Dan Xu, Dongfang Wang)	208
Developing a new mesh deformation technique based on support vector machine·····	
(Xiang Gao, Yidao Dong, Chuanfu Xu, Min Xiong, Zhenghua Wang and Xiaogang Deng)	228
Large eddy simulation on curvilinear meshes using seventh-order dissipative compact scheme·····	
(Yi Jiang, Meiliang Mao, Xiaogang Deng, Huayong Liu)	240
Effect of Nonuniform Grids on High-Order Finite Difference Method·····	
(Xu Dan, Deng Xiaogang, Chen Yaming, Wang Guangxue, Dong Yidao)	251
Extending Seventh-Order Dissipative Compact Scheme Satisfying Geometric Conservation Law to Large Eddy Simulation on Curvilinear Grids·····	
····· (Yi Jiang, Meiliang Mao, Xiaogang Deng and Huayong Liu)	274
Effect of Geometric Conservation Law on Improving Spatial Accuracy for Finite Difference Schemes on Two-Dimensional Nonsmooth Grids·····	
(Meiliang Mao, Huajun Zhu, Xiaogang Deng, Yaobing Min and Huayong Liu)	297
Further improvement of weighted compact nonlinear scheme using compact nonlinear interpolation·····	
·· (Zhen-Guo Yan, Huayong Liu, Yankai Ma, Meiliang Mao, Xiaogang Deng)	331
New nonlinear weights for improving accuracy and resolution of weighted compact nonlinear scheme·····	
(Zhenguo Yan, Huayong Liu, Meiliang Mao, Huajun Zhua, Xiaogang Deng)	342
Parallelizing a High-Order CFD Software for 3D, Multi-block, Structural Grids on the TianHe-1A Supercomputer·····	
(Chuanfu Xu, Xiaogang Deng, Lilun Zhang, Yi Jiang, Wei Cao, Jianbin Fang, Yonggang Che, Yongxian Wang, Wei Liu)	357
Collaborating CPU and GPU for large-scale high-order CFD simulations with complex grids on the TianHe-1A supercomputer·····	
····· (Chuanfu Xu, Xiaogang Deng, Lilun Zhang, etc)	371
Parallelizing and optimizing large-scale 3D multi-phase flow simulations on the	

Tianhe-2 supercomputer.....	(Dali Li, Chuanfu Xu, Yongxian Wang, Zhifang Song, Min Xiong, Xiang Gao and Xiaogang Deng)	394
Performance modeling and optimization of parallel LU-SGS on many-core processors for 3D high-order CFD simulations	(Dali Li, Chuanfu Xu, Bin Cheng, Min Xiong, Xiang Gao and Xiaogang Deng)	409
高精度格式的具体应用		
High-Order and High Accurate CFD Methods and Their Applications for Complex Grid Problems.....	(Xiaogang Deng, Meiliang Mao, Guohua Tu, Hanxin Zhang, Yifeng Zhang)	431
Numerical investigation on body-wake flow interaction over rod-airfoil configuration	(Jiang Yi, Mao MeiLiang, Deng Xiaogang, Liu HuaYong)	453
Validation of a RANS transition model using a high-order weighted compact nonlinear scheme	(TU GuoHua, Deng Xiaogang, MAO MeiLiang)	488
Osher Flux with Entropy Fix for Two-Dimensional Euler Equations (Huajun Zhu, Xiaogang Deng, Meiliang Mao, Huayong Liu and Guohua Tu)		495
基于雷诺应力模型的高精度分离涡模拟方法	(王圣业, 王光学, 董义道, 邓小刚)	518
邓小刚院士及合作者发表的论文		535

综述与进展





高精度加权紧致非线性格式的研究进展

邓小刚 刘昕[†] 毛枚良 张涵信

中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000

摘要 综述了高精度加权紧致非线性格式 WCNS 在理论分析以及复杂流动应用方面的研究进展。首先回顾了国内外高精度格式研究的概况, 然后介绍了 WCNS 的研究与发展历程。在对 WCNS 进行了 Fourier 分析和渐近稳定性分析后, 给出了 WCNS 求解多维复杂流动的算例。

关键词 高精度格式, 加权紧致非线性格式, Fourier 分析, 渐近稳定性理论

1 引言

近 30 年来, 计算流体力学 (computational fluid dynamics, CFD) 已进入到求解可压的雷诺平均 Navier-Stokes (N-S) 方程和三维定常及非定常完全黏性流动数值模拟阶段^[1], 其发展的一个必然而且重要的途径在于对数值计算格式和方法的研究。

实际的流体运动是很复杂的, 各类波系在其中充当着不同的角色, 为真实地刻画流场内流动细节, 人们纷纷要求采用高 (阶) 精度格式。Gaitonde^[2] 指出, 普通低阶格式导致的数值耗散与色散可通过高精度格式潜在地降低, 即使在受网格非均匀性、边界条件的低阶近似以及非线性现象的捕捉等相关因素的影响全场精度不得不降阶时, 建立在可靠的高阶公式基础上的高精度格式也比优化过的低阶格式计算结果更加精确。即便高精度格式的运算量在每个迭代步有所增加, 但它整个过程的计算仍有着更高的效率。因此开展高精度格式的研究近年来一直是 CFD 中的前沿研究课题。

本文就国内外高精度格式的发展做了详细的回顾, 重点介绍作者建立的高精度加权紧致非线性格式最新研究进展, 通过具体的大尺度流动算例研究高精度加权紧致非线性格式的分辨率与计算效率, 并对格式应用于湍流流动的前景作了展望。

2 国内外高精度格式研究概况

有关高精度、高分辨率捕捉激波流场的计算格式

在过去几十年取得很大的进展。好的格式应能得到原问题锐利的、逼真的物理图像, 它习惯地被称为具有高分辨率^[3] (high resolution)。Harten^[4] 1983 年首先提出高分辨率方法、总变差减小 (total variation diminishing, TVD) 或总变差不增 (total variation nonincreasing, TVNI) 的概念与限制器 (limiter) 技术, 并具体构造了具有 2 阶精度的高分辨率 TVD 格式。TVD 格式是非线性的保单调格式, 它为数值方法特别是差分方法的理论与构造开拓了一个崭新的方向。同样具有 TVD 性质的格式 (monotonic upstream-centered scheme for conservation laws, MUSCL) 由 Van Leer 提出, 选择合适的限制器, 可以得到良好的色散与耗散特性, 激波等间断捕捉的分辨率高^[5,6]。1984 年, 张涵信通过小扰动分析的方法研究了色散误差对改善激波附近数值解行为的作用, 构造了无波动, 无自由参数的耗散差分 (non-oscillatory, containing no free parameters, and dissipative, NND) 格式^[7,8], 现已广泛地应用于科学和工程领域并取得了比较好的效果。

在对激波捕捉的方法中, TVD 格式已被证实为可靠和有效, 但为满足其总变差减小的数学属性, 在极值点附近精度将退化为一阶。为提高格式精度且极值点处不降阶, Harten^[9,10] 提出实质无波动 (essentially non-oscillatory, ENO) 的概念, 它放宽了 TVD 中强调消除波动的限制, 允许格式有附加的高阶虚假波动, 这样格式的建立就具有较大的灵活性。人们纷纷构造, 建立了各种具体形式的高阶 ENO 格式^[11~16]。

但是 ENO 格式在求解一维、多维守恒律方程组时,含间断的计算流场内存在着虚假波动,精度越高,这种波动越严重. 1994 年 Liu^[17] 提出加权技术,建立了加权实质无波动 (weighted essentially non-oscillatory, WENO) 格式. WENO 格式是基于 ENO 格式构造的高阶混合格式,它将 ENO 格式传统的通过逻辑判断选择最光滑模板 (stencil) 的方法,改进为采用所有模板的加权平均,而权重则可以度量模板的光滑程度. WENO 格式在保持了 ENO 格式优点的同时,还使得计算流场中的虚假波动明显减少. Levy 认为采用线性权值格式精度会随网格数变化而稍微变化,而采用非线性权值,在稀疏网格下获得的误差比线性权值方法的低,精度还能保持稳定,于是他采用含有非线性权值的 4 阶中心型 WENO 格式计算了二维 Euler 流动^[18,19]. Lin^[20] 在耗散与色散关系基础上对 WENO 格式中的参数进行了研究,得到了不同形式的 WENO 格式,将这些格式推广到二维与轴对称情况,作了典型算例的数值实验研究.

WENO 格式不总是保单调的,于是 Suresh^[21] 提出了一类新的高阶保单调格式——MP5 (monotonicity preserving with fifth order) 格式. 2000 年 Balsara^[22] 将 Suresh 的保单调插值策略和 WENO 格式构造思路结合起来,构造了具有健壮激波捕捉能力的保单调加权实质无波动格式 (monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes, MPWENO),应用于数值实验中取得不错的效果.

国内,张涵信进一步发展了建立光滑捕捉激波格式的原则,即耗散控制原则、色散控制原则、激波控制原则和频谱控制原则^[23]. 按照这些原则贺国宏^[24] 建立了 3 阶精度的实质无波动无自由参数格式 (essentially non-oscillatory, containing no free parameters, ENN),李沁^[25,26] 建立了激波处为 2 阶 NND 格式,其它地方为 4 阶加权非线性格式的混合格式,宗文刚^[27] 提出了双重加权实质无波动格式 (double weighted essentially non-oscillatory, DWENO). 另外, FCT (flux-corrected transport) 是一类通量修正方法,它以低阶格式为基础,对高阶格式所得的数值通量进行修正,使其满足局部单调性原则. 沈孟育利用解析离散法,在导数计算公式中引入 FCT 以消除非物理解振荡,构造了高阶格式 WENO-FCT^[28],并将其应用于一维和二维无黏流动当中.

另一方面,紧致格式也已逐渐成为高精度计算方法研究的主要方向. 采用相同的网格模板构造出的紧致差分格式可以达到比传统差分格式更高阶的精度,同时它还具有更高的尺度分辨率以及更小的波相位误差.

1991 年 Clarksean^[29] 在二维、三维平板喷流的直接数值模拟中,在流向采用紧致差分格式,在其它方向则采用了谱方法,这样谱方法和紧致差分格式的优点就被有效地结合起来. 次年 Lele^[30] 发展了一系列高精度的对称型线性紧致格式,同时还推导出 1 阶以上导数的紧致逼近公式. Yu^[31] 采用 6 阶紧致格式求解了非定常 Euler 方程,数值模拟剪切层内波系运动. William^[32] 在论文中初步分析了中心型紧致格式的特征值、收敛性与并行计算的可行性等,利用构造的 6 阶格式计算了线性与非线性 Poisson 问题. Wilson^[33] 推出了高阶紧致格式并将它们应用于不可压 N-S 方程的计算当中, Smirnov^[34] 则建立任意网格下的紧致格式 Pade', 计算了二维平板流与亚声速涡传播等问题. 国内,王强^[35] 采用高精度紧致差分算法,对可压自由剪切层转捩区中的几种典型展向大尺度涡作用形态进行了直接数值模拟. 沈孟育^[36] 提出 1 种 3 点 3 阶精度的紧致格式,成功地计算了无黏伯格方程与一维激波管流动.

采用对称型的这些紧致格式,它们的截断误差是色散型的,因而无法抑制高波数误差,格式的精度越高,数值振荡越大. 于是 Shang^[37] 通过加入空间过滤器 (filter) 发展了高阶紧致格式,有效地抑制住振荡. Koutsavdis^[38] 采用 6 阶紧致格式加 8 阶过滤器计算二维线性 Euler 方程, Visbal^[39] 则利用 Pade' 格式加上 6 阶与 10 阶精度的过滤器,求解动网格条件下的 N-S 方程. 马延文和傅德薰^[40,41] 通过对模型方程的研究,提出了耗散比拟思想,依此构造了迎风紧致格式和带色散协调因子的迎风紧致格式并付诸应用.

Halt^[42] 认为紧致格式的进一步发展在于对无波动激波捕捉技术的研究. 大部分高阶紧致格式采用的是线性形式,对于非线性紧致格式,相应的研究则进行得不多. 采用合适的非线性形式的紧致格式能有效地解决由于激波间断处非线性特性的存在导致的点对点振荡. Cockburn^[43] 通过 TVD 与总变差限制 TVB 的概念建立了 3 阶与 4 阶精度的非线性紧致格式,但 4 阶格式在激波附近解产生明显的数值振荡. Ravichandran^[44] 将 Minmod 通量限制器应用于高阶紧致格式,构造了对于一维标量方程具有 TVD 性质的高阶紧致格式,数值模拟了多种含激波的流动. Adams^[45] 构造了高阶紧致格式和 ENO 格式的混合格式数值模拟了含激波的流动. Wang^[46] 在 Pade' 格式中加入 ENO 算法,发展了新的高阶 ENO-Pade' 格式,二维定常与非定常流动应用研究发现,此格式能消除 Pade' 格式跨间断的非物理振荡,并提高 ENO 在光滑区内的高精度特性.

针对构造的迎风紧致格式计算激波时仍有振荡这一问题,马延文^[47]采用群速度直接控制方法重构紧致格式,计算了 Sod 问题以及二维激波反射问题。

袁湘江^[48]构造了一种 3 阶迎风紧致格式,计算球锥体的超声速绕流,结果显示数值解在激波附近的非物理振荡得到改善。宗文刚^[49]以 NND 和 ENN 格式为基础构造了加权紧致格式 WCNN 和 WCENN,并将之应用于多种复杂黏性流动当中。

湍流研究不断深入,人们逐渐意识到应用高精度格式的重要性。湍流流动中存在着变化范围很大的空间尺度,而这些大小尺度结构相差悬殊,这要求高精度数值方法具有捕捉大小尺度流动结构的能力,具有低耗散、低色散的高分辨能力以及计算稳定的能力。徐岚^[50]采用 4 阶紧致格式,完成了充分发展槽道湍流的大涡模拟计算。李新亮^[51]运用高精度迎风差分方法及 8 阶精度群速度控制型差分格式对可压缩湍流的流场及被动标量场进行了直接数值模拟。Rai^[52]成功地用显式迎风偏置 5 阶格式 (explicit upwind biased fifth-order scheme, EUW-5) 模拟了湍流边界层的空间发展,但它是线性的,不能很好地计算激波流场。Kourta^[53]采用 4 阶精度格式,直接模拟了对流马赫数为 1.6 的超声速剪切层。Gatski^[54]采用高阶有限差分格式,直接模拟了来流马赫数 2.25 的平板湍流边界层的发展过程。小激波串是可压缩湍流的常见结构,因此,直接数值模拟可压缩湍流,如激波与湍流的干扰,需要能够光滑捕捉激波的高精度格式。

要保持高精度流场,黏性流动计算中 N-S 方程的黏性项也有必要离散为高阶精度。而且高精度格式的应用不应只考虑内点格式,还须考虑采用何种边界及靠近边界的格式,这些格式对流场最终结果具有重要的影响作用。目前大多数高阶格式对黏性项与边界格式处理为 2 阶精度以保证数值解的稳定性,全流场高精度格式还很少。Zingg^[55~57]分析加上人工耗散的 4 阶线性格式,采用高阶差分近似的边界格式和黏性项,计算了二维翼型黏性绕流。Dong^[58]采用对流项为 5 阶迎风显式格式,黏性项为 6 阶中心显式格式,比较并行算法中半隐式激波装配代码的效率,计算了三维超声速 Couette 流动稳定性。Chu 对非周期边界使用了 5 阶边界格式,分别发展了 3 点 6 阶混合紧致格式 (combined compact difference scheme, CCD^[59]) 与 staggered combined compact difference scheme, SCCD^[60]), 相对于 CCD, SCCD 在误差与时间精度方面有很大改善。Shen^[61]提出了广义紧致方法 (generalized compact difference scheme,

GC), 对边界格式处理为 5 阶精度,采用 3 点 6 阶精度内点格式很好地计算了定常激波反射、非定常激波散射及激波 / 涡干扰等问题。

3 高精度加权紧致非线性格式的研究发展历程

邓小刚等研究者一直致力于高阶精度内点紧致格式以及相关的高阶边界和靠近边界格式研究。1996 年建立了一类单参数的线性耗散紧致格式 (dissipative compact schemes, DCS)^[62], 它只需在相应的中心型紧致格式中加入耗散项,选择合适的参数,内点精度可分别达到 3 阶、5 阶、7 阶与 9 阶,边界处格式也为 3 阶精度。将 5 阶精度 DCS 应用于超声速平面 Couette 流动的特征值问题及其稳定性边值问题求解中^[63], 计算结果显示该格式具有优良的色散特性。接着他们提出适应性插值的概念,以 4 阶精度单元中心型 (cell-centered) 紧致格式为基础,在单元边界进行高阶精度紧致自适应的非线性插值,构造了紧致非线性格式 (compact nonlinear schemes, CNS)^[64,65]。对一维 Euler 方程进行计算,结果显示 3 阶与 4 阶精度的 CNS 能够较健壮地捕捉间断。Yameshite^[66]使用 CNS 很好地计算了含强激波的高超声速流动,分析了马赫数为 10 条件下扰动波频率对椭圆壁的影响。然而紧致自适应插值同样在流场光滑区发挥作用,结果所选择的 3 个模板只有一个的信息被采用,这使得 CNS 的效率相对低,而且接触间断在某种程度上被抹平。于是邓小刚等采用加权技术构造了一系列非线性紧致格式 (weighted compact nonlinear schemes, WCNS)^[67,68]。采用 4 阶 WCNS 以及与之相容的 4 阶紧致边界和靠近边界格式,模拟了一维激波管问题和马赫数为 3 的无黏绕前台阶流动,激波和接触间断分辨得很清楚。对于黏性流动,数值求解了马赫数为 5.73、雷诺数为 2050 的绕圆柱流动,计算结果可以看出激波捕捉得很好,物面压力与热流分布与有激波装配的谱方法的结果吻合很好。2001 年邓小刚基于构造耗散紧致线性格式的方法,发展了新的高阶精度耗散加权紧致非线性格式 (dissipative weighted compact nonlinear schemes, DWCNS)^[69], 通过一维和二维含激波的超声速流场的计算,数值结果显示了这些高精度格式捕捉间断的良好特性,对边界层的高分辨率与具有的良好收敛性^[70], 它们能得到比低阶格式更准确的结果。WCNS 与 DWCNS 具有同样的理论基础,高精度特性也表现得类似,但 DWCNS 的计算量要比 WCNS 的多,因而基于计算效率方面的考虑,本文重点对 WCNS 作了理论分析与应用研究。

4 高精度加权紧致非线性格式 WCNS 的理论分析

4.1 非线性格式的定義

考虑标量双曲型线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

此处, $c > 0$ 为常数. 简单起见, 考虑均匀网格 $x_j = jh$ 上求解, h 为网格间距, $0 \leq j \leq N+1$, 并给定节点上的函数值 $u_j = u(x_j)$. 式 (1) 的半离散化方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu'_j = 0 \quad (2)$$

式 (2) 空间导数 u'_j 的格式都可写成

$$\sum_{k=j-n_1}^{j+n_2} a_k u'_k = \sum_{k=j-m_1}^{j+m_2} b_k u_k$$

式中 a_k 和 b_k 为格式系数, $(x_{j-n_1}, \dots, x_{j+n_2})$ 和 $(x_{j-m_1}, \dots, x_{j+m_2})$ 为网格模板.

定义 对任何求解方程 (2) 的空间离散格式, 若格式的系数 a_k, b_k 或网格模板依赖于解 u_k 本身, 这样的格式就叫非线性格式, 否则为线性格式.

显然, TVD 格式使用限制器, ENO 格式的网格模板依赖于解本身, 所以它们都是非线性格式.

4.2 加权紧致非线性格式

将式 (1) 写成守恒形式, 即 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -f'_j$. 采用单元中心型的紧致格式计算 f'_j 得

$$kf'_{j+1} + f'_j + kf'_{j-1} = \frac{a}{h} (\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) + \frac{b}{h} (\tilde{f}_{j+3/2} - \tilde{f}_{j-3/2}) \quad (3)$$

其中 $a = \frac{3}{8}(3-2k)$, $b = \frac{1}{24}(22k-1)$. $\tilde{f}_{j\pm 1/2} = f(\tilde{u}_{j\pm 1/2})$ 为单元边界的数值通量. 对上式进行 Taylor 级数展开, 可以得到

$$f'_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + \frac{9-62k}{1920} h^4 f_j^{(5)} + O(h^r) + O(h^6)$$

截断项 $O(h^r)$ 来自 $\tilde{u}$ 的插值. 若 $\tilde{u}_{j\pm \frac{1}{2}}$ 相对于 $u_{j\pm \frac{1}{2}}$ 具有 5 阶精度 ($r=5$), 可推导出:

(1) 若 $k = \frac{9}{62}$, 则得到 5 阶隐式格式

$$\frac{9}{62} f'_{j+1} + f'_j + \frac{9}{62} f'_{j-1} = \frac{63}{62h} \cdot (\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) + \frac{17}{186h} (\tilde{f}_{j+3/2} - \tilde{f}_{j-3/2}) \quad (4)$$

(2) 若 $k = 0$, 则可拓展为 5 阶显式格式

$$f'_j = \frac{75}{64h} (\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) - \frac{25}{384h} (\tilde{f}_{j+3/2} - \tilde{f}_{j-3/2}) + \frac{3}{640h} (\tilde{f}_{j+5/2} - \tilde{f}_{j-5/2}) \quad (5)$$

应当指出的是, 如果 $\tilde{u}$ 代表单元边界的 u 只有 r 阶精度 ($r < 5$), 即 $\tilde{f}(u) = f(u) + O(h^r)$, 那么单元中心型紧致差分格式的色散与耗散特性由 $\tilde{u}$ 占主导作用, 因此必须让 $\tilde{u}$ 在单元边界获得高精度插值.

在流场光滑区单元边界 $x_{j\pm 1/2}$ 处 5 阶精度的插值公式为

$$\tilde{u}_{j+1/2}^{\text{op}} = u_j + \frac{1}{128} \cdot (3u_{j-2} - 20u_{j-1} - 38u_j + 60u_{j+1} - 5u_{j+2}) \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{j-1/2}^{\text{op}} = u_j - \frac{1}{128} \cdot (5u_{j-2} - 60u_{j-1} + 38u_j + 20u_{j+1} - 3u_{j+2}) \quad (7)$$

但是激波附近这种处理将导致数值波动, 因此需采用加权技术, 它的主要思想是这样的: 3 个候选网格模板分别赋予权值, 该权值决定候选模板自身在最终单元边界插值的贡献, 也就是说, 权值在流场光滑区处于优化权值状态, 这样格式就达到 5 阶精度; 在间断附近的区域, 含有间断的模板被赋予的权值接近于零, 这样它对数值通量几乎没有贡献, 从而避免跨间断进行插值, 保证了这些区域内的计算精度也达到 3 阶

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{Lj+1/2}^{\omega} &= u_j + \frac{h}{2} g_{Lj}^* + \frac{1}{8} h^2 s_{Lj}^* \\ \tilde{u}_{Rj-1/2}^{\omega} &= u_j - \frac{h}{2} g_{Rj}^* + \frac{1}{8} h^2 s_{Rj}^* \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} g_{Lj}^* &= \sum_{k=1}^3 \omega_{Lk} g_j^k, \quad g_{Rj}^* = \sum_{k=1}^3 \omega_{Rk} g_j^k \\ s_{Lj}^* &= \sum_{k=1}^3 \omega_{Lk} s_j^k, \quad s_{Rj}^* = \sum_{k=1}^3 \omega_{Rk} s_j^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_j^1 &= \frac{1}{2h} (u_{j-2} - 4u_{j-1} + 3u_j) \\ g_j^2 &= \frac{1}{2h} (u_{j+1} - u_{j-1}) \\ g_j^3 &= \frac{1}{2h} (-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}) \\ s_j^1 &= \frac{1}{h^2} (u_{j-2} - 2u_{j-1} + u_j) \\ s_j^2 &= \frac{1}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) \\ s_j^3 &= \frac{1}{h^2} (u_j - 2u_{j+1} + u_{j+2}) \end{aligned}$$

权值 $\omega_{L(R)k}$ 定义

$$\omega_{L(R)k} = \frac{\beta_{L(R)k}}{\sum_{m=1}^3 \beta_{L(R)m}}, \quad \beta_{L(R)k} = \frac{C_{L(R)k}}{(\delta + IS_k)^2}$$

式中 $\delta = 10^{-6}$ 为一小量, 是为了避免分母为零. IS_k 为模板光滑性的度量^[71], $C_{L(R)k}$ 为优化权值, 由式 (6) 与式 (7) 易得 $C_{L1} = C_{R3} = \frac{1}{16}$, $C_{L2} = C_{R2} = \frac{10}{16}$, $C_{L3} = C_{R1} = \frac{5}{16}$.

由于本文所用的是加权非线性插值, 其插值模板依赖于解 u_k , 所以将式 (3) 与式 (8) 相结合, 这一完整的格式称为加权紧致非线性格式 WCNS. 因而式 (4) 简称为 WCNS-5; 式 (5) 简称为 WCNS-E-5.

4.3 WCNS 的 Fourier 分析

对于 1 阶导数格式的差分误差, 可以通过比较从导数差分格式得到的 Fourier 系数 $(\hat{f}'_k)_{fd}$ 与精确的 1 阶导数 Fourier 系数 $\hat{f}'_k$ 来估算. 引进修正波数 $\omega^* = \omega_r + i\omega_i^*$, 任一差分格式均相应

$$(\hat{f}'_k)_{fd} = i\omega^* \hat{f}_k \quad (9)$$

可见修正波数的虚部控制着解的振幅变化, 而实部则影响解的相位变化. 格式的稳定性要求 $\omega_i^* \leq 0$.

把式 (4) 与式 (5) 和优化插值公式代入式 (9), 得到修正波数

$$\omega^* h = \omega^*(\omega h) h \quad (10)$$

图 1 显示了 WCNS-5 和 WCNS-E-5 修正波数的实部和虚部. 可以看出, 除了高阶 Pade^[30] 修正波数的虚部等于零外, 其余的都小于零, 它们对应于格式的耗散特性. WCNS-5 和 WCNS-E-5 具有近乎相同的耗散与色散特性, 它们的精度稍优于 EUW-5^[52].

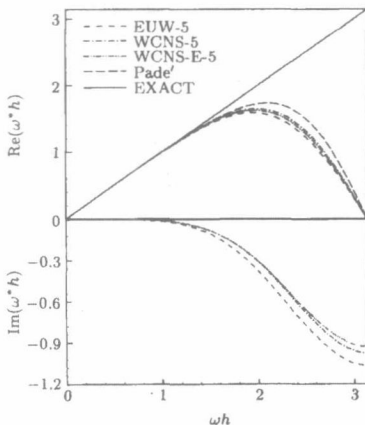


图 1 WCNS 的修正波数及其它高阶格式的比较

在多维计算中, 差分格式的相位误差以各向异性的形式表现出来. 先研究二维情况, 此时不同波数的相速度 ω^{**} 可表示为^[30]

$$\omega^{**} = \frac{\omega^*(\omega h, \theta) h}{\omega h} = \left[\cos \theta \omega^*(\omega h \cos \theta) h + \sin \theta \omega^*(\omega h \sin \theta) h \right] / \omega h \quad (11)$$

图 2 为 $\frac{\omega h}{\pi} = \frac{1}{50}, \frac{5}{50}, \dots, \frac{45}{50}, \frac{50}{50}$ 时几种高阶格式的各向异性相位误差分布. 最外面的曲线代表小波数 ωh 的波, 此时它的传播各向同性且只有一个相速度. 最里面的“玫瑰形”曲线表示在网格上能分辨到的最短波, 曲线形状越大意味着格式的各向异性相位误差限制于越窄的短波范围. 图中 WCNS、EUW-5 与 Pade' 的曲线形状相差不大, 这说明它们相位误差的各向异性特性表现得一致.

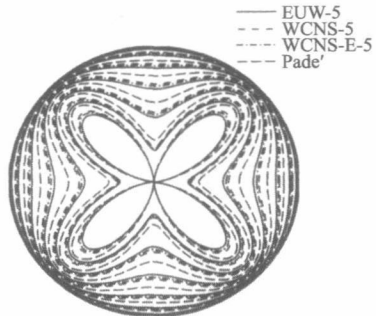


图 2 高阶格式在二维方向的相位速度各向异性图

同理, 推出三维条件下不同波数的相速度 ω^{***}

$$\omega^{***} = \frac{\omega^*(\omega h, \theta, \varphi) h}{\omega h} = \left[\cos \theta \cos \varphi \omega^*(\omega h \cos \theta \cos \varphi) h + \cos \theta \sin \varphi \omega^*(\omega h \cos \theta \sin \varphi) h + \sin \theta \omega^*(\omega h \sin \theta) h \right] / \omega h \quad (12)$$

图 3 给出了 $\omega h = \pi$ 时这些有限差分格式的相速度的各向异性图. 与二维图像类似, 格式分辨的最短波在三维方向传播表现为各向异性, 沿与 3 个坐标轴都成 45° 位置波的相速度最快.

现在规定一个误差容限 ϵ , 若有 $\omega^*(\omega h) h$ 使得 $\left| \frac{\omega^*(\omega h) h - \omega h}{\omega h} \right| \leq \epsilon$, 则称具有这些波数的波是良好分辨率的, 否则就是不良分辨率波. 设 ω_f 为具有良好分辨的最高波数, 则分数 $e_1 \equiv \frac{\omega_f}{\pi}$ 定义为差分格式的分辨效率. 表 1 给出了 ϵ 分别取 0.1、0.01 和 0.001 时 4 种高阶格式的分辨效率. 几种格式都表现出良好的分辨特性. 容限 ϵ 越大, 格式在更大波数范围逼近精确解, WCNS-5 与 WCNS-E-5 两者的分

辨效率非常一致, 特别是在 ε 等于 0.01 和 0.001 时

WCNS-5 与 WCNS-E-5 的分辨效率好过其它格式.

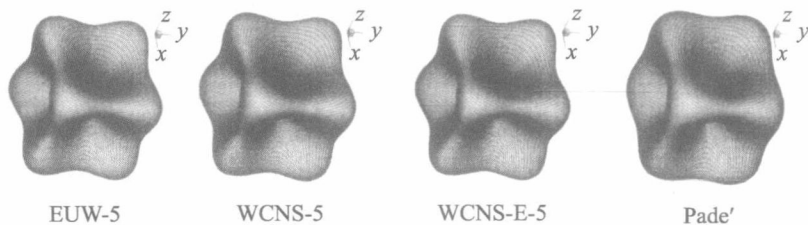


图 3 高阶格式在三维方向的相位速度各向异性图

表 1 高精度格式的分辨率

格式	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
EUW-5	0.545	0.355	0.235
WCNS-5	0.570	0.370	0.250
WCNS-E-5	0.560	0.365	0.245
Pade'	0.595	0.360	0.205

4.4 WCNS 的渐近稳定性分析

对式 (2) 进行 WCNS 的差分离散可得出

$$A \frac{df}{dt} = \frac{c}{h} BCf + g(t)$$

这里 $f = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$, A 为 1 阶导数的系数矩阵, B 为单元边界物理量的系数矩阵, C 为单元边界插值公式的系数矩阵. $g(t)$ 对应于初始和边界条件, 不失一般性, 令 $g(t) = 0$.

对于半离散化的方程, 渐近稳定性条件要求矩阵 $R = A^{-1}BC$ 的特征值实部非正. 图 4 给出了 WCNS 不同网格数下在均匀网格上的特征值. 由

图 4 可见 WCNS-5 与 WCNS-E-5 是渐近稳定的, 随着 N 的增大 WCNS 越稳定.

在 WCNS 的实际计算当中, 经常需要采用非均匀网格. 为了分析非均匀网格对 WCNS 渐近稳定性的影响, 常使用指数函数

$$x(\xi) = 1 + \frac{\tilde{\beta}(1-\tilde{a})}{1+\tilde{a}}, \quad \tilde{a} = \left(\frac{\tilde{\beta}+1}{\tilde{\beta}-1} \right)^{1-\frac{\xi-1}{\xi N-1}}$$

式中 $\tilde{\beta}$ 为压缩因子, 可控制网格的疏密, 这里取 $\tilde{\beta} = 1.005$.

经过这一变换以后, 矩阵变成 $\tilde{R} = D^{-1}R$, 其中 $D = \text{diag}\{x_{\xi 1}, x_{\xi 2}, \dots, x_{\xi N}\}$. 图 5 给出了 WCNS-5 和 WCNS-E-5 的特征值谱图. 图 5 中可以看到非均匀网格在网格数 N 为 30 与 40 时 WCNS 是渐近不稳定的, 但随着网格数增加, 拉伸程度减弱, 格式变得渐近稳定. 在 $N = 50$ 时, WCNS 是渐近稳定的, 而且 N 越大格式越稳定. 因此在实际计算中要注意 WCNS 的这一特性. 对于黏性流场的计算, 物理黏性具有稳定作用, 所以 WCNS 在稀疏网格上也可以是渐近稳定的. 特征值谱分析表明 WCNS-E-5 与 WCNS-5 的特性类似.

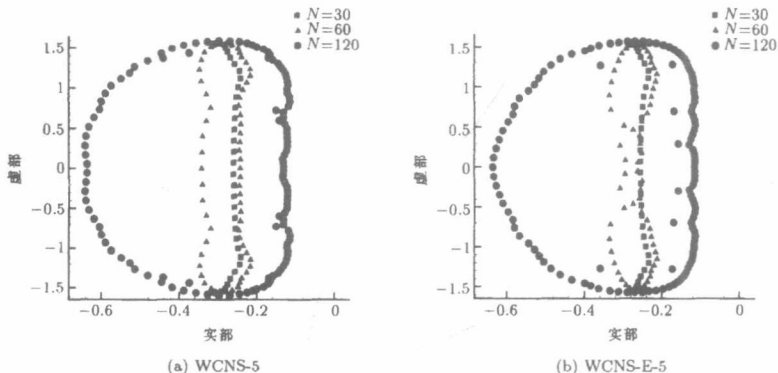


图 4 均匀网格上的特征值谱

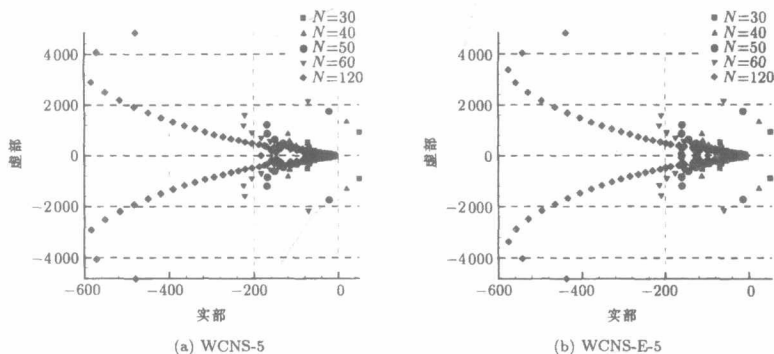


图 5 非均匀网格上的特征值谱

5 WCNS 应用于多维复杂流动研究

以上理论分析显示 WCNS-E-5 与 WCNS-5 具有相同的精度, 相对 WCNS-5, WCNS-E-5 在计算中减少了 3 对角矩阵的求逆运算, 提高了计算效率. 这里先就边界格式以及 2 阶导数的高阶离散作了说明, 然后将它们与 WCNS-E-5 相结合, 对复杂流动进行数值模拟, 考察了格式的高精度特性.

5.1 WCNS-E-5 的边界格式与 2 阶导数的高阶离散

高精度格式在实际应用中遇到的一个很重要问题是边界格式, 边界格式对整个流场的计算结果有着重要影响. 倘若内点为 p 阶精度, 为了不影响格式的全场精度则边界格式至少为 $(p-1)$ 阶. 对于 5 阶内点格式, 导出如下 4 阶边界格式^[72]

$$f'_1 = \frac{1}{24h} \left(-22\tilde{f}_{1/2} + 17\tilde{f}_{3/2} + 9\tilde{f}_{5/2} - 5\tilde{f}_{7/2} + \tilde{f}_{9/2} \right)$$

$$f'_2 = \frac{1}{24h} \left(\tilde{f}_{1/2} - 27\tilde{f}_{3/2} + 27\tilde{f}_{5/2} - \tilde{f}_{7/2} \right)$$

$$f'_{N-1} = -\frac{1}{24h} \left(\tilde{f}_{N+1/2} - 27\tilde{f}_{N-1/2} + 27\tilde{f}_{N-3/2} - \tilde{f}_{N-5/2} \right)$$

$$f'_N = \frac{1}{24h} \left(22\tilde{f}_{N+1/2} - 17\tilde{f}_{N-1/2} - 9\tilde{f}_{N-3/2} + 5\tilde{f}_{N-5/2} - \tilde{f}_{N-7/2} \right)$$

4 阶精度边界插值公式为

$$\tilde{u}_{1/2} = \frac{1}{16} (5u_0 + 15u_1 - 5u_2 + u_3)$$

$$\tilde{u}_{3/2} = \frac{1}{16} (-u_0 + 9u_1 + 9u_2 - u_3)$$

$$\tilde{u}_{N-1/2} = \frac{1}{16} (-u_{N+1} + 9u_N + 9u_{N-1} - u_{N-2})$$

$$\tilde{u}_{N+1/2} = \frac{1}{16} (5u_{N+1} + 15u_N - 5u_{N-1} + u_{N-2})$$

对于求解 N-S 方程的黏性项, 有

$$f'_{vj} = \frac{75}{64h} \left(\tilde{f}_{vj+1/2} - \tilde{f}_{vj-1/2} \right) - \frac{25}{384h} \left(\tilde{f}_{vj+3/2} - \tilde{f}_{vj-3/2} \right) + \frac{3}{640h} \left(\tilde{f}_{vj+5/2} - \tilde{f}_{vj-5/2} \right)$$

单元边界上的黏性通量 $\tilde{f}_{vj+1/2}$ 含有原始变量本身以及它们的一阶偏导数. 4 阶精度的变量插值公式、1 阶偏导数的差分近似公式以及相应的 4 阶边界格式推导为:

(1) 单元边界的插值公式

$$u_{j+1/2} = \frac{9}{16} (u_{j+1} + u_j) - \frac{1}{16} (u_{j+2} + u_{j-1})$$

$$u_{1/2} = \frac{1}{16} (35u_1 - 35u_2 + 21u_3 - 5u_4)$$

$$u_{3/2} = \frac{1}{16} (5u_1 + 15u_2 - 5u_3 + u_4)$$

$$u_{N-1/2} = \frac{1}{16} (5u_N + 15u_{N-1} - 5u_{N-2} + u_{N-3})$$

$$u_{N+1/2} = \frac{1}{16} (35u_N - 35u_{N-1} + 21u_{N-2} - 5u_{N-3})$$

(2) 单元边界一阶偏导数的差分格式

$$u'_{j+1/2} = \frac{27}{24h} (u_{j+1} - u_j) - \frac{1}{24h} (u_{j+2} - u_{j-1})$$

$$u'_{1/2} = \frac{1}{24h} (-22u_0 + 17u_1 + 9u_2 - 5u_3 + u_4)$$

$$u'_{N+1/2} = -\frac{1}{24h} \cdot (-22u_{N+1} + 17u_N + 9u_{N-1} - 5u_{N-2} + u_{N-3})$$

5.2 WCNS-E-5 的高精度特性验证

5.2.1 格式捕捉激波和接触间断的能力

Levy^[19] 采用 4 阶 WENO 研究了二维黎曼问

题, 这里 WCNS-E-5 也模拟相同的流动. 图 6 给出了两种高精度格式计算的结果, 图 6 中显示各类间断

(如激波、膨胀波和接触间断) 都很好地被捕捉到, 而这里的网格数仅为 Levy 的 1/4.

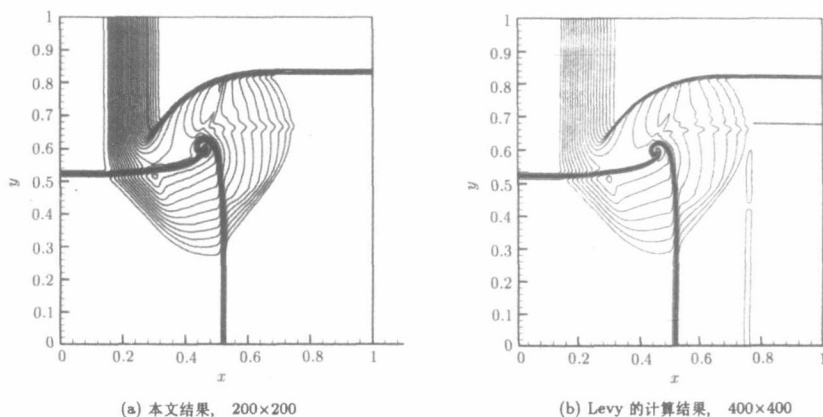


图 6 密度等值图

5.2.2 计算精度和效率

考虑双椭球外形, 计算状态选定为层流, 来流条件具体给定: $M_\infty = 8.15$, $T_\infty = 56\text{K}$, $T_w = 288\text{K}$, $Re_\infty = 1.67 \times 10^5$. 这里提供了 3 套网格, 它们的分布按流向 $\times$ 周向 $\times$ 法向形式分别为: $126 \times 37 \times 61$ (网格 I); $126 \times 73 \times 61$ (网格 II); $126 \times 124 \times 61$ (网格 III). 它们的差别在于周向网格数目不等: 网格 I 是网格 II 的一半且与网格 II 一样均匀分布; 网格 III 由网格 II 的下部椭球网格数多一倍得到.

分别采用 MUSCL 与 WCNS-E-5 对这 3 种网格进行计算, 迭代相同步数后达到收敛. 图 7 给出了它们的物面流线侧视图, WCNS-E-5 准确地捕捉到下部椭球处的二次分离^[73], MUSCL 的结果很不明显. 纵观比较, MUSCL 只有网格 III 的结果依稀反

映了二次分离形成的趋势, 最多能与 WCNS-E-5 的网格 I 结果趋近. 从表 2 可以看出, 网格 III 的 MUSCL 计算时间为网格 I 的 WCNS-E-5 的 3.44 倍, 内存占用量为 2.66 倍.

图 8 为对称面沿流向计算的压力与热流分布, 并与实验值^[74]比较, 其中 WCNS-E-5 采用网格 I, MUSCL 采用的是网格 III. 分布曲线各以自己的驻点值归一化, 压力分布方面, WCNS-E-5 与 MUSCL 的结果在流向皆与实验数据接近, 在分离区略有差异, 热流分布方面, WCNS-E-5 得到的热流峰值大小、位置比 MUSCL 更趋近于实验值.

此算例充分说明稠密网格的低阶结果能通过稀疏网格的高阶格式计算更好求得, 这大大节省了计算内存和机时, 很大程度上提高了计算效率.

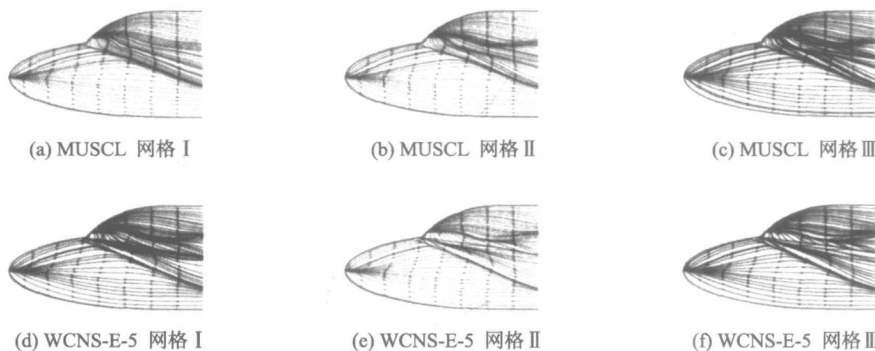


图 7 双椭球体表面流线侧视图