

普通高等教育“十二五”规划教材

测量平差基础

(第2版)

主 编 葛永慧



 煤炭工业出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

测量平差基础

(第 2 版)

主 编 葛永慧

副 主 编 夏春林 魏峰远 王列平

参编人员 钱建国 杨晓琴 朱刘娟

煤炭工业出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

测量平差基础/葛永慧主编. --2 版. --北京: 煤炭工业出版社, 2015

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5020-4649-1

I. ①测… II. ①葛… III. ①测量平差—高等学校—教材 IV. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 205442 号

测量平差基础 第 2 版

普通高等教育“十二五”规划教材

主 编 葛永慧
责任编辑 李振祥 闫 非
编 辑 田小琴
责任校对 邢蕾严
封面设计 晓 杰

出版发行 煤炭工业出版社 (北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
电 话 010-84657898 (总编室)
010-64018321 (发行部) 010-84657880 (读者服务部)
电子信箱 cciph612@126.com
网 址 www.cciph.com.cn
印 刷 北京玥实印刷有限公司
经 销 全国新华书店

开 本 787mm×1092mm¹/₁₆ 印张 12¹/₂ 字数 286 千字
版 次 2015 年 1 月第 2 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
社内编号 7504 定价 26.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换,电话:010-84657880

内 容 提 要

本书是高等院校测绘类专业的专业基础课教材。全书共分八章，第一章为观测误差与误差传播律，第二章至第五章为常用的各种测量平差模型部分，第六章为误差椭圆，第七章为统计假设检验在测量平差中的应用，第八章为近代平差基础。为配合教学和方便学生掌握，各章后均附有复习思考题。

本书主要作为高等院校测绘类本科、专科专业教材，也可供相关专业师生及工程技术人员参考。

修 订 说 明

本书的前身是2007年出版的普通高等教育地矿、安全类“十一五”规划教材《测量平差基础》。在原教材的基础上,经过近十所高等院校七年的教学实践,并结合编者多年的教学经验,我们重新编写了《测量平差基础》。“测量平差”是测绘类专业重要的专业基础课之一,同时又是一门应用性很强的科学,广泛应用于多个相关领域。这次编写的基本思想是:根据教学大纲要求,教学内容仍以基本的误差理论和测量平差的基础方法为主,使教学内容更符合当前和未来发展的需要。

本着有利于加强基础理论学习、有利于提高能力培养和有利于知识面拓展的原则,力求实用性、通用性和高质量相统一。对于已经不常使用的平差方法进行了篇幅删减,对于相关章节的内容进行了重新编排,对于理论推导过程进行了更加详细的叙述,对于不同平差模型的算例进行了精选,对于导线网、GNSS网等目前占主导地位的测量手段则给出了详尽的算例,更加注重基础理论的叙述,增加了各种平差方法的共性和特性等内容,力求理论与实际有较好地结合。另外,在表述上突出了计算机应用能力的培养,把平差的函数模型改造成容易编程实现的表达方式。为配合教学和方便学生掌握,各章后均附有精选的复习思考题。

本书由四所院校联合编写。第一章由辽宁工程技术大学钱建国副教授编写,第二章由太原理工大学葛永慧教授编写,第三章和附录由太原理工大学杨晓琴博士编写,第四章由河南理工大学朱刘娟副教授编写,第五章由河南理工大学魏峰远教授编写,第六章由辽宁工程技术大学夏春林教授编写,第七、八章由安徽理工大学王列平副教授编写。本书由葛永慧任主编,夏春林、魏峰远、王列平任副主编。

在本书编写过程中，参阅了大量文献资料，引用了很多同类书刊中的部分内容和算例，在此谨向有关作者表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，不足之处在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

作 者

2014 年 10 月

前 言

“测量平差”是测绘类专业重要的专业基础课之一，同时又是一门应用科学，广泛应用于多个相关领域。近年来测量平差的理论与应用上发生了很大变化，由于测量设备、方法的进步，三角网（锁）等一些传统的平差方法将逐步淡出历史舞台，而 GPS 网平差、近代平差等则被丰富进来，并且计算机电算化的方式被全面采用。为适应高校测绘类专业课程改革的需要，我们在原国家“十五”测量平差规划教材的基础上，结合当前我国测绘事业的发展形势，融入多年的教学与实践经验，编写了本书。

全书共分 8 章，第 1 章至第 4 章为基础部分，包括观测误差、精度指标、广义传播律、最小二乘原理、条件平差和间接平差等；第 5 章介绍了附有条件（参数）的平差综合模型；第 6 章、第 7 章分别介绍了误差椭圆和统计假设检验在测量平差中的应用；第 8 章简要介绍了近代平差理论，以便为后续的近代平差课程学习打下基础。

本书在内容组织上强调实用性，对于已经不常使用的平差方法，如三角网（锁）平差等进行了篇幅删减，对于导线网、GPS 网等目前占主导地位的测量手段则给出了详尽的例题，力求理论与实际有较好地结合。另外，在表述上突出了计算机应用能力的培养，把平差的函数模型改造成容易编程实现的表达方式，删除了与手工计算有关的计算方法与表格。为配合教学和方便学生掌握，各章后均附有习题。本书既可作为本、专科教材，也可供测绘工程技术人员参考。

本书由四个院校联合编写。第 1 章、第 6 章由辽宁工程技术大学夏春林教授编写，第 2 章、第 3 章由太原理工大学葛永慧教授编写，第 4 章、第 5 章由河南理工大学魏峰远教授编写，第 7 章、第 8 章由安徽理工大学王列平副教授编写。本书由葛永慧任主编，夏春林、魏峰远、王列平任副主编。

在本书编写过程中，参阅了大量文献资料，引用了很多同类书刊中的部分内容与算例，在此谨向有关作者表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，缺点错误难免，敬请使用本教材的师生与广大读者提出宝贵意见，以便我们再版时修正。

编 者

2007 年 5 月

目次

第一章 观测误差与误差传播律	1
第一节 观测误差与测量平差的任务	1
第二节 偶然误差的统计性质	3
第三节 衡量精度的指标	7
第四节 协方差传播律	14
第五节 权与常用的定权方法	26
第六节 协因数和协因数传播律	32
第七节 广义传播律在测量中的应用	37
第八节 系统误差的传播	41
复习思考题	44
第二章 平差数学模型与最小二乘原理	46
第一节 参数估计及其最优性质	46
第二节 最小二乘原理	48
第三节 测量平差的数学模型	50
第四节 函数模型的线性化	55
复习思考题	58
第三章 条件平差	59
第一节 条件平差原理	59
第二节 条件方程	61
第三节 条件平差精度评定	72
第四节 条件平差估值的统计性质	74
第五节 条件平差算例	76
复习思考题	85
第四章 间接平差	88
第一节 间接平差原理	88
第二节 误差方程式	91
第三节 精度评定	101
第四节 间接平差特例——直接平差	105
第五节 间接平差估值的统计性质	107

第六节 间接平差算例·····	110
复习思考题·····	115
第五章 平差综合模型·····	117
第一节 附有参数的条件平差·····	117
第二节 附有限制条件的间接平差·····	120
第三节 附有限制条件的条件平差·····	125
第四节 各种平差方法的共性和特性·····	131
复习思考题·····	132
第六章 误差椭圆·····	134
第一节 概述·····	134
第二节 点位误差·····	135
第三节 误差曲线·····	139
第四节 误差椭圆·····	140
第五节 相对误差椭圆·····	141
复习思考题·····	144
第七章 统计假设检验在测量平差中的应用·····	145
第一节 概述·····	145
第二节 统计假设检验的基本方法·····	148
第三节 误差分布假设检验·····	152
第四节 平差数学模型正确性的后验方差检验·····	157
第五节 平差参数的假设检验和区间估计·····	159
第六节 粗差检验的数据探测法·····	163
复习思考题·····	165
第八章 近代平差基础·····	167
第一节 稳健估计·····	167
第二节 附加系统参数的平差·····	170
第三节 秩亏自由网平差·····	173
第四节 方差分量估计·····	179
复习思考题·····	185
参考文献·····	188

第一章 观测误差与误差传播律

外业观测总会有误差，大家已经有了很多这方面的体验。例如对某未知量（如一个角度）重复观测两次以上，会发现观测值之间互有差异而并不相等，这表明了观测误差的存在；另一种情况是，已知某几个未知量之间应满足一定的理论关系，如一个三角形的内角和应为 180° ，但三个内角的观测值之和往往不等于 180° ，同样说明存在观测误差。因此，观测误差是不可避免的。测量平差就是以包含误差的观测数据为研究对象，探索所含误差的规律，从而采取一定的数学手段消除或减弱其影响，以得到未知量的最优估值。本章主要从观测误差的统计规律入手，引出测量中常用的“精度”概念，详细讨论观测误差传播的基本规律——广义传播律，给出其在测量中的应用实例，同时给出权的定义以及常用的定权方法。

第一节 观测误差与测量平差的任务

任何观测量，客观上总存在一个能反映其真正大小的数值，称为观测量的真值。然而，一个量的真值一般是得不到的，因为观测中不可避免地存在误差。那么是什么原因使观测误差不可避免呢？

一、误差来源

产生观测误差的原因很多，主要有测量仪器、观测者及外界条件三个方面。

1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器具有一定限度的精密度，从而使观测值的精度受到了一定的限制。例如，丈量长度的尺子，其刻画的格值都含有误差，所标注的长度并不是真长，因此量得的长度也不是真长。又如，水准仪的视准轴不平行于水准轴时，在水准尺上的读数就会产生误差，而且这个误差将随着水准仪距水准尺距离的增大而增大。同样，经纬仪、全站仪、GPS 接收机及遥感卫星等获取的数据也存在着仪器误差。

2. 观测者

由于观测者感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也是直接影响观测成果质量的重要因素。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果产生直接影响，同时随着以上条件的变化，它们对观测结果的影响也随之不同。因而，在这样的客观环境下进行观测，必然使观测的结果产生误差。

测量仪器、观测者、外界条件这三个方面的因素综合起来被称为观测条件。不难想

象，观测条件的好坏与观测质量有着密切的联系：观测条件较好则观测成果的误差小即质量较高，反之质量较低，观测条件相同则观测成果的质量也相同。所以说，观测条件的优劣也就客观地反映了观测成果的质量高低。在客观条件允许的情况下，测量工作者要尽量克服不利条件，确保观测成果达到所要求的质量。

二、观测误差的分类

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差、偶然误差和粗差三类。

1. 系统误差

在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性或者在观测过程中按一定的规律变化或者为某一常数，那么这种误差就称为系统误差。

例如，用具有一定尺长误差的钢尺量距时，由于尺长误差所引起的距离误差与所测距离的大小成正比，因此距离越长，所积累的误差也越大；经纬仪因校正或安置的不完善而使所测角度产生的误差等，这些都是由于仪器本身不完善或未经检验校正而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与钢尺检定时温度不一致，而使所测的距离产生误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等，都是由于外界条件所引起的系统误差。此外，有的观测者在照准目标时，总是习惯地把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，这是由观测者引起的系统误差。

系统误差一般具有累积的作用，它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除系统误差或者减弱其对观测成果的影响，达到实际上可以忽略不计的程度。一种方法是利用科学的操作程序，例如在进行水准测量时，使前后视距相等，以消除视准轴与水准轴不平行所引起的高差观测的系统误差；另一种方法是利用公式改正，例如对量距用的钢尺预先进行检定，求出尺长误差的大小，然后对所量的距离进行尺长改正，以消除由尺长误差引起的量距系统误差等，都是消除系统误差的常用方法。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看其大小和符号没有规律，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，那么这种误差就被称为偶然误差。

例如，在用经纬仪测角时，误差是由仪器本身误差、照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差等综合影响的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差的代数和，例如照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动、风力风向的变化等偶然因素所产生的小误差的代数和，而每项微小误差又随着偶然因素的变化而不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负。这样，由它们所构成的测角误差的总和，无论大小或符号都是不能事先预知的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差或随机误差。可见偶然误差是无法避免的，也是不能使用消除系统误差的方法来消除的。

根据概率统计理论，偶然误差就其总体而言，是服从或近似服从正态分布的随机变量，具有一定的统计规律。

3. 粗差

粗差是一种大数量级的观测误差，它是测量工作的失误，可能带来巨大的工程损失。

含有粗差的观测值不能采用，一旦发现，该观测值必须舍弃或重测。

粗差产生的原因较多，主要是作业人员疏忽大意或失职而引起的，如大数被读错、读数被记错等。

在观测中应尽可能避免出现粗差。有效防范和发现粗差的方法有：①进行必要的重复观测即多余观测；②采用必要而又严格的检核、验算方式；③遵守国家测绘机构制定的各类测量规范和细则，一般也能起到防范粗差的作用。

三、测量平差的任务

系统误差和偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。当观测列中已经消除了系统误差的影响或者与偶然误差相比已处于次要地位，则该观测列中主要是存在着偶然误差，这是比较普遍的情形。如何处理这些带有偶然误差的观测值，是测量平差所要研究的基础内容，一般认为属于经典测量平差的范畴。

为了得到一个量的大小，仅测量一次就够了，不需要进行平差处理。但这样做是很危险的，因为不知道误差有多大，甚至有无粗差也未知。因此实际工作中，为了及时检查和发现有无粗差存在，同时也为提高成果的质量，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，对一条导线边，总要丈量两次或多次，取它们的平均值作为最后长度。此时偶然误差的影响得到减弱，既提高了精度，又防止了粗差。取平均值就是一种最简单的数据处理方法。再如一个平面三角形，尽管观测其中两个内角即可决定它的形状，但通常是观测三个内角，其和一般不等于 180° ，产生不符值，从而暴露误差的大小。总之，通过多余观测必然会发现观测结果之间的不一致或不符合应有关系而产生的不符值。如何对这些带有偶然误差的观测值进行处理，得到观测量的最可靠的估值，是测量平差的一项基本任务。

测量平差的另一项任务就是评定观测值及其函数值的最可靠结果的精度，也就是考核测量成果的质量。人们把这一数据处理的整个过程叫做“测量平差”。概括起来讲，测量平差有两大任务：一是通过数据处理求待定量最优估值；二是评定观测成果的质量。

如果观测值中除偶然误差外，还包含系统误差甚至粗差，这时的数据处理就有一些难度，一般认为属于近代测量平差的范畴。在设法消除系统误差、粗差影响的条件下，其基本任务仍是求待定量最优估值和评定其精度。

第二节 偶然误差的统计性质

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最可靠值，并评定测量成果的精度。因此首先要对偶然误差的性质进行研究，找出它们对观测值的影响规律。偶然误差是一种随机变量，一组误差表面上没有规律，但就其总体来说具有一定的统计规律，有关随机变量的统计学原理在这里也适用。从概率论与数理统计的观点看，当观测量仅含偶然误差时，其数学期望就是它的真值。

设进行了 n 次观测，得观测值为 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 。假定观测量的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$ ，由于各观测值都带有误差，因此每一观测值 L_i 与其真值 $\tilde{L}_i$ 或 $E(L_i)$ 之间必然存在一

个差值，即

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \tag{1-1}$$

式中 Δ_i 称为真误差（简称为误差），其性质为偶然误差。

若记

$$\underset{n \times 1}{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n \times 1}{\tilde{L}} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n \times 1}{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

则有矩阵形式为

$$\Delta = \tilde{L} - L \tag{1-2}$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1) \quad E(L_2) \quad \cdots \quad E(L_n)]^T$$

表示其真值，则

$$\left. \begin{aligned} E(L) &= \tilde{L} \\ \Delta &= E(L) - L \end{aligned} \right\} \tag{1-3}$$

那么偶然误差 Δ 的统计规律到底怎样呢？人们从数理统计的角度及无数的测量实践中发现：在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布确实表现出一定的统计规律性。下面通过实例来说明这种规律性。

在某测区相同的条件下，独立地观测了 358 个三角形的全部内角，求得 358 个三角形的闭合差。由于观测值带有误差，所以三内角观测值之和不等于其真值 180° ，闭合差也就是三角形内角和的真误差，即

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

式中 $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现将误差出现的范围分为若干相等的小区间，取区间的间隔 $d\Delta$ 为 $0.20''$ ，将这一组误差按其正负号与绝对值的大小，分别统计其出现在某区间内的个数 v_i 以及误差出现在某区间内的频率 v_i/n （此处 $n=358$ ），其结果见表 1-1。

表 1-1 某测区 358 个真误差分布情况

误差区间/(")	Δ 为 负 值			Δ 为 正 值		
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$
0.00 ~ 0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640
0.20 ~ 0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575
0.40 ~ 0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460
0.60 ~ 0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295
0.80 ~ 1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225
1.00 ~ 1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180

表 1-1 (续)

误差区间/(")	Δ 为 负 值			Δ 为 正 值		
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$
1.20 ~ 1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070
1.40 ~ 1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030
1.60 以上	0	0	0	0	0	0
Σ	181	0.505		177	0.495	

注： $d\Delta = 0.20''$ ；等于区间左端值的误差算入该区间内。

从表 1-1 可以看出，误差的分布情况具有以下特点：①绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的个数多；②绝对值相等的正、负误差出现的个数相近；③误差的绝对值不会超过一定的限值（如这里的 1.60''）。

为了便于对误差分布进行分析和比较，现将另一测区 421 个等精度独立观测三角形内角和的真误差按上述方法统计，其结果见表 1-2。

表 1-2 另一测区 421 个真误差分布情况

误差区间/(")	Δ 为 负 值			Δ 为 正 值		
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$
0.00 ~ 0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440
0.20 ~ 0.40	34	0.081	0.405	36	0.085	0.425
0.40 ~ 0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345
0.60 ~ 0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320
0.80 ~ 1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215
1.00 ~ 1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200
1.20 ~ 1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155
1.40 ~ 1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120
1.60 ~ 1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095
1.80 ~ 2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085
2.00 ~ 2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045
2.20 ~ 2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035
2.40 ~ 2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025
2.60 以上	0	0	0	0	0	0
Σ	210	0.499		211	0.501	

注： $d\Delta = 0.20''$ ；等于区间左端值的误差算入该区间内。

表 1-2 中所列的一组真误差，尽管其观测条件不同于表 1-1，但可以看出相似的分
布特点。因而，表 1-2 中的误差分布情况与表 1-1 内的误差分布情况本质上是相同的。

误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式表达外，还可以利用直方图来表达。如果以横坐标表示误差出现的不同区间，纵坐标表示各区间内误差出现的频率与区间间隔的比值，即 $\frac{v_i}{d\Delta}$ ，分别根据表 1-1 和表 1-2 中的数据绘制出图 1-1 和图 1-2。图中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如，图 1-1 中画有斜线的长方条面积表示误差出现在 $0.00'' \sim +0.20''$ 区间内的频率为 0.128。该直方图直观地表达了如前所述的偶然误差分布特性。在图中，较小误差的长方形较高，面积较大，即出现的频率较大；反之，较大误差的长方形较矮，面积较小，即出现的频率较小。同时所有长方形基本上对称于纵轴，说明绝对值相等的正、负误差出现的个数接近。大于一定数值的误差区间的长方形不存在，即出现的频率为 0。

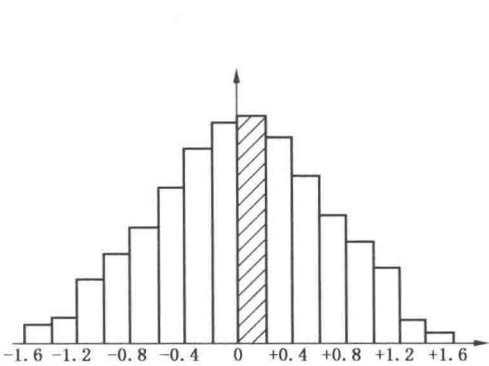


图 1-1 误差分布直方图 1

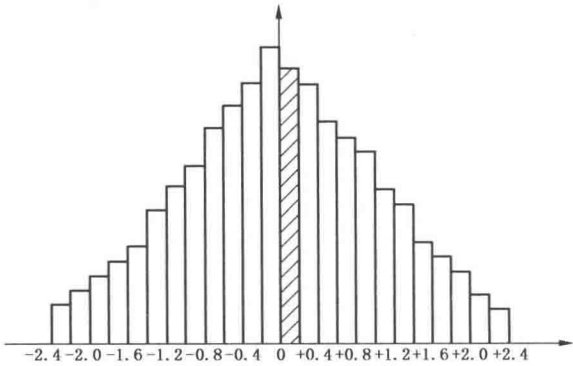


图 1-2 误差分布直方图 2

大家熟知的“抛硬币”游戏，当抛的次数较少时，正、反面出现的频率并非都是 0.5，这时的频率分布称为经验分布；随着游戏次数的无限增多，正、反面出现的频率就稳定于 0.5 附近，即趋近于其理论分布。就表 1-1 的一组误差而言，在观测条件不变的情况下，如果再继续观测更多的三角形，则可预期，随着观测的次数越来越多，误差出现在各区间内的频率就趋于一个完全确定的数值——误差出现在各区间的概率。这就是说，在一定的观测条件下，某区间内的误差其发生有确定的概率。即一定的观测条件，对应着一种确定的误差分布。

在 $n \rightarrow \infty$ 的情况下，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，如果此时把误差区间间隔无限缩小，则图 1-1 及图 1-2 中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图 1-3 所示

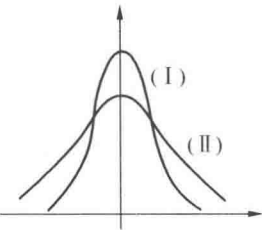


图 1-3. 误差分布曲线 1 个特性：

的两条光滑的曲线。这种曲线就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线，曲线所对应的函数称为概率密度函数。经验证明，偶然误差的频率分布，随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的，正态分布是它们的理论分布。因此，在以后的理论研究中，都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型，这不仅带来研究上的便利，而且是比较符合实际情况的。

通过以上讨论，可以进一步用概率术语来概括偶然误差的几

(1) 在一定的观测条件下, 误差的绝对值有一定的限值; 或者说, 超出一定限值的误差, 其出现的概率为零。

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

(3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

(4) 偶然误差的数学期望为零。

根据式 (1-3) 有

$$E(\Delta) = E[E(L) - L] = E(L) - E(L) = 0 \quad (1-4)$$

由于数学期望的含义是理论均值, 因此偶然误差的理论平均值为零。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \quad (1-5)$$

在本书中, 采用 $[\]$ 表示一系列数值的代数和, 与代数中的 $\sum_{i=1}^n$ 符号同义。

对于一系列的观测而言, 不论其观测条件是好是差, 也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测, 只要这些观测是在相同的条件下进行的, 则所产生的一组偶然误差必然都具有上述 4 个特性。

图 1-1 和图 1-2 中各长方条的纵坐标为 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$, 其面积为误差出现在该区间内的频率。如果将这个问题提到理论上讨论, 以理论分布 (图 1-3) 取代经验分布, 则图 1-1 和图 1-2 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的概率密度函数 $f(\Delta)$, 而长方条的面积为误差出现在该区间内的概率, 即

$$P(\Delta) = f(\Delta) d\Delta \quad (1-6)$$

根据数理统计知识, 服从正态分布的随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

式中 μ —— X 的数学期望;

σ —— X 的标准差, 而在测量工作中称为中误差。

结合式 (1-4), 则可写出随机变量 Δ 的概率密度式为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \quad (1-7)$$

当式中的参数 σ 确定后, 即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$, 因此该曲线关于纵轴左右对称。当 σ 不同时, 曲线的位置不变, 但分布曲线的形状将发生变化。由上可知, 偶然误差 Δ 是服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布的随机变量。

第三节 衡量精度的指标

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。为了阐述精度的含义, 先分析上节中的两个实例。表 1-1 和表 1-2 是在不同的观测条件下所得的两组误差的频率分布。如果将表 1-1 中上三行的正负区间出现频率相加, 即得误差出现于 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间内的频率为 0.665, 即在表 1-1 的这组误差中, 出现于 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间内的误差占

误差总数的 66.5%；而绝对值大于 0.6" 的误差，其频率为 $1 - 0.665 = 0.335$ ，即占误差总数的 33.5%。如果对表 1-2 的误差也如此统计，可知出现在 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间内的误差占误差总数的 49.2%，而出现在这一区间以外的误差占总数的 50.8%。

上述数字说明，表 1-1 中的误差更集中于其理论均值——零的附近，因此这一组误差分布得较为密集或者说它的离散度小，表明该组观测值精度较高；相对而言，表 1-2 中的误差分布得较为离散，则表示该组观测值精度较低。因此表 1-2 中观测值的精度均低于表 1-1 中的观测值。

从直方图来看，误差分布较为密集的图 1-1，其图形在纵轴附近的峰值较高，各长方条构成的阶梯比较陡峭；而误差分布较为离散的图 1-2，其图形在纵轴附近的峰值则较低，且阶梯平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线（图 1-3）的形态上，即误差分布曲线（I）高而陡峭，而（II）则低而平缓。

以上阐述还可用“打靶”实验来说明，打靶可以看成是用枪对靶心进行“观测”。如图 1-4 所示，甲、乙二人分别对靶心射击，其弹着点分别用“.”和“。”表示，可见甲的弹着点分布密集，因此精度较高；而乙的弹着点分布较离散，精度就较低。这里特别强调，精度是衡量一组观测值集中程度的指标。如果在某种条件下得到的一系列观测值非常接近，就说明观测本身的精度是高的。如图 1-5 所示，丙射击的弹着点（“+”）也非常集中，从其密集程度看，说明其射击水平是较高的。至于弹着点的平均位置距靶心较远，则一定是某些因素影响（如准星偏）而产生的系统误差。

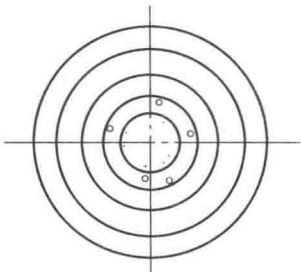


图 1-4 甲、乙弹着点分布图

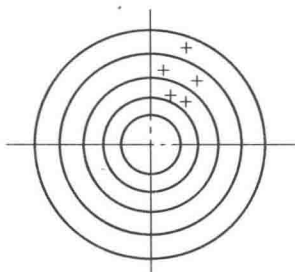


图 1-5 丙弹着点分布图

综上所述，所谓精度就是指误差分布的密集或离散的程度，也就是指离散度的大小。离散度越小，则精度越高。如果两组观测成果的离散程度相同，便是两组观测成果的精度相同；反之，若误差分布不同，则精度也就不同。

在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此对于这一组中的每一个观测值，都称为是同精度观测值。例如，表 1-1 中所列的 358 个观测结果是在相同观测条件下测得的，各个结果的真误差彼此并不相等，有的甚至相差很大，但是由于它们所对应的误差分布相同，因此这些观测值彼此是同精度的。

为了衡量观测值的精度高低，可以按第二节的方法，把在一组相同条件下得到的误差，用组成误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法来比较。但在实际工作中，这样做比较麻烦，有时甚至很困难，因此人们需要对精度有一个数字的概念。这种具体的数字能够反映误差分布的离散度的大小，即能够反映观测精度的高低，因此称为衡量