电力系统柔性评价与分析

王承民　孙伟卿
王　简　彭　石　著

科学出版社

电力系统柔性评价与分析

王承民　孙伟卿　著
王　简　彭　石

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书总结了过程系统柔性，以及电力系统现有的柔性、灵活性和弹性方面的研究成果，并对电力系统中的柔性进行了统一定义和分类；分别对电力系统中的固定柔性评价、固定柔性优化、可变柔性评价及可变柔性优化等问题展开分析和研究。

本书适合高等院校电气工程专业的高年级本科生及研究生等阅读，也可供广大电气工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电力系统柔性评价与分析/王承民等著. —北京：科学出版社，2018. 8
ISBN 978-7-03-058451-9

Ⅰ.①电…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①电力系统-研究　Ⅳ.①TM71

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 179247 号

责任编辑：姚庆爽　赵微微 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张　伟 / 封面设计：蓝正设计

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版　开本：720×1000　B
2018 年 8 月第一次印刷　印张：17
字数：335 000

定价：100.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

目前，针对电力系统柔性的研究相对来说较分散，最典型的是柔性交流输电技术和柔性直流输电技术，此外，也有部分柔性技术应用在电网规划当中。这些柔性技术是在电力系统中不同的领域进行应用的，关于“柔性”的内涵和外延不尽相同。

除此之外，灵活性也是电力系统当中非常引人关注的一个研究方向。在英文中，柔性与灵活性由同一个单词表示，即 flexibility，但在汉语当中，柔性和灵活性的词义却或多或少有一些区别。与柔性和灵活性相近的一个名词是“弹性”，弹性这个概念在电力系统中用得较少，主要还是应用在负荷的价格弹性方面。由此可见，这几个相近名词所涉及的相关研究领域基本上还是较新的，还有待于深入研究。

目前针对过程系统中的柔性研究颇多，有比较详细的定义、分类和应用。虽然过程系统与电力系统在规模和复杂程度等方面不能相比，但还是非常有必要对柔性这一领域进行深入研究。特别是，在当今电力系统智能化、主动性，以及能源互联网等发展趋势下，柔性化的电力技术及系统的研究更有意义。因为这些新趋势都要求电力系统具备更强的可控性和伸缩性，必然与柔性、灵活性及弹性等密切相关。

基于上述研究动机，本书首先总结过程系统中的柔性和电力系统中的柔性化技术研究现状，说明电力系统中的典型柔性化技术主要应用在柔性交流输电、柔性直流输电，以及电网柔性规划等方面，相对来说没有统一的定义，还处于研究的初级阶段。而过程系统与电力系统在规模和复杂程度等方面相去甚远，不能将过程系统中的柔性照搬照抄于电力系统中。本书在对柔性、灵活性和弹性等几个相近的概念进行对比分析后，对电力系统中的柔性进行统一的定义，包括线性柔性和非线性柔性、静态柔性和动态柔性、固定柔性和可变柔性、确定性柔性和不确定性柔性等，并将电力系统柔性划分为负荷柔性、发电功率柔性、参数柔性、属性柔性和结构柔性等几个典型的类型。因为结构柔性的研究相对较复杂，本书主要对负荷柔性、发电功率柔性、参数柔性、属性柔性等展开深入研究。然后对固定柔性的评价和优化、可变柔性的评价和优化技术进行全面的阐述，说明电力系统的优化规划问题实际上都可以描述为柔性优化和优化柔性问题。

全书共 6 章：第 1 章针对过程系统中的柔性和现有的电力系统柔性化技术进行全面的总结；第 2 章对电力系统的柔性进行综合定义和分类；第 3 章针对固定柔性评价问题进行研究和阐述；第 4 章针对可变柔性评价问题进行分析和阐述，可变

柔性被描述为柔性指数的形式；第 5 章针对固定柔性优化问题进行分析和阐述；第 6 章针对可变柔性优化问题进行分析和阐述，说明优化柔性问题也是电力系统的综合评价和优化问题。

感谢国家自然科学基金项目“现代电力系统的多维柔性评价与分析”（项目编号：51177099）和“多电飞机电力系统安全性和可靠性的动态柔性分析方法研究”（项目编号：51307108）的资助。同时，课题组参与的国家 863 计划项目“间歇式电源并网规划与随机全过程分析技术研究与开发”（项目编号：2011AA05A03）的部分研究内容也收入本书中。

本书是团队共同努力和工作的结果。全书的主要章节由王承民教授和孙伟卿副教授共同完成，孙伟卿副教授的博士学位论文内容也被收编在本书中；同时，博士研究生王简和彭石进行了部分仿真和编写工作。此外，谢宁副教授和王勇副教授也参与了本书的部分编写工作，博士研究生张庚午、王海冰等为本书的编写工作提供了帮助，在此一并表示感谢！

限于作者水平，本书难免存在不妥之处，敬请读者批评指正！

作　者

2018 年 3 月于上海

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　电力系统分析中的刚性问题

1.1.1　电力系统中的优化规划问题

电力系统优化问题涉及范围非常广泛，但是主要集中在电力系统的规划和运行两个主要环节上。传统意义上的电力系统优化更侧重于运行方面的问题。电力系统中的规划问题也可以描述为一个优化的数学模型，由于规划时存在的不确定性，规划所采用的数学模型相对优化来说较简单。因此，电力系统优化运行和规划是电力系统优化问题研究的两个主要方向。

在电力系统的优化运行过程中，包括传统的机组组合和经济运行、安全校核、优化切负荷、无功功率优化等问题，配电网的网络重构以及后来的电力市场调度优化模型也都是优化问题；在电力系统的规划过程中，输电网的电源规划、网络扩展规划、配电网的变电站选址定容、线路的最佳供电半径等问题也都是典型的优化问题。

电力系统的优化规划问题可以统一描述为如下的数学模型：

$$\min f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=C_g \\ h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant C_h \end{cases} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}$ 分别为状态变量和控制变量向量；C_g、C_h 分别为与控制变量和状态变量无关的常数；f、g、h 分别表示目标函数、等式约束和不等式约束。在函数 g、h 中，一般不包含常数项。

根据优化目标的不同，传统电力系统优化规划问题中的目标函数 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$ 一般表示经济性，通常表示系统的投资和运行成本。在电力系统的优化运行中，目标函数表示运行成本；而在电力系统的规划过程中，目标函数大多表示投资成本，当然也包括运行成本（只能说估算的）。$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$ 既可以是一维的（单一目标函数），也可以是多维的（多目标优化问题）。在多目标优化问题中，目标函数可能不仅仅表示经济性。

等式约束一般表示电力系统中的电力平衡或者电量平衡，电力平衡就是功率平衡，而电量平衡只是在规划过程中考虑。电力平衡方程就是潮流方程，或者是简

化的功率平衡方程，电量平衡方程则有多种表达方式，也是基于功率平衡方程形成的。不等式约束则表示电力系统的安全性约束或可靠性约束，如线路潮流限制、节点电压限制、发电机等设备的出力限制，这些是可以用数学模型简单表达的；还有很多约束是用数学模型无法表示或者表示很困难的，如配电网的辐射状约束、$N-1$约束等。不等式约束统一表示的是电力系统的资源限制。

除此之外，电力系统中的很多问题也可以描述为优化问题，如潮流计算。潮流方程的求解过程就是一个解非线性方程组的过程，一般采取数值迭代的计算方法，迭代过程就是一个优化过程，是不断缩小节点不平衡功率的过程。假设等式约束表示 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-C_g=0$ 潮流方程，通过引入松弛变量 $\boldsymbol{s}$，可以变化为

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{s}^2\\&\text{s. t. } g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{s}^2\end{aligned}$$

这也是病态潮流算法——最优乘子法的计算原理。如果计算结果 $\boldsymbol{s}=0$，则潮流计算不是病态的，否则就是病态的，$\boldsymbol{s}$ 实际上表示的是节点不平衡功率。由此可以断言，电力系统分析实际上就是优化分析。

如式(1-1)所示的优化模型，一般是直接或者间接根据库恩-塔克条件进行求解。首先将不等式约束进行松弛：

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-C_h+\boldsymbol{s}^2=0 \tag{1-2}$$

式中，$\boldsymbol{s}$ 同样为松弛变量。形成增广的拉格朗日函数：

$$L=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}C_g+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}C_h+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^2 \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 分别为对应等式约束和不等式约束的拉格朗日乘子。库恩-塔克条件可以表示为

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}=0\\L_u=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}=0\\L_\alpha=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-C_g=0\\L_s=2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=0\\L_\beta=h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-C_h+\boldsymbol{s}^2=0\end{cases} \tag{1-4}$$

应该说明，库恩-塔克条件是优化问题(1-1)的必要条件。也就是说，满足式(1-4)的解是优化问题(1-1)的可行解，但并不是所有满足式(1-4)的都是可行解。因为式(1-4)是非线性的，所以求解其所有的可行解很困难，而最优解是所有可行解中的最大解或者最小解，因此求取最优解更困难。一般以求得的某个可行解当作最优解，当然这个所谓的最优解是“局部”最优解。

其中，式(1-4)中第四式称为互补松弛条件，也就是只有在不等式约束变为等式约束的情况下，对应不等式约束的拉格朗日乘子才不等于0。对一个实际的优

化问题来说，最优解落在不等式约束边界上的概率较小，所以对应不等式约束的拉格朗日乘子具有“阶跃”特性，即从0变为正数是跳跃的，没有中间过程，这也给电力系统优化规划问题的求解带来了一定的困难。

1.1.2 牛顿法和梯度法

1. 牛顿法

针对问题(1-1)的求解可以采用牛顿法，就是联立求解式(1-4)所示方程组的形式：

$$\begin{cases} L_x=\boldsymbol{f}_x+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g_x+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_x=0 \\ L_u=\boldsymbol{f}_u+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g_u+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_u=0 \\ L_\alpha=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-C_g=0 \\ L_\beta=h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-C_h+\boldsymbol{s}^2=0 \\ L_s=2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=0 \end{cases} \tag{1-5}$$

式中，$\boldsymbol{f}_x=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{g}_x=\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{h}_x=\dfrac{\partial h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{f}_u=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{g}_u=\dfrac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{h}_u=\dfrac{\partial h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$。除了状态变量 $\boldsymbol{x}$，控制变量 $\boldsymbol{u}$，拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 以外，松弛变量 $\boldsymbol{s}$ 也是待求解的变量之一，变量的数量与方程组数量一致。牛顿法求解过程的关键环节是形成修正方程式：

$$\begin{bmatrix} \Delta L_x \\ \Delta L_u \\ \Delta L_\alpha \\ \Delta L_\beta \\ \Delta L_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{xx}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xx}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xu} & \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{h}_x & 0 \\ \boldsymbol{f}_{ux}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{ux}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{ux} & \boldsymbol{f}_{uu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{uu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{uu} & \boldsymbol{g}_u & \boldsymbol{h}_u & 0 \\ \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{g}_u & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{h}_x & \boldsymbol{h}_u & 0 & 0 & [2\boldsymbol{s}] \\ 0 & 0 & 0 & [2\boldsymbol{s}] & [2\boldsymbol{\beta}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{u} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\beta} \\ \Delta\boldsymbol{s} \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

上述的系数矩阵即雅可比矩阵，当 $\boldsymbol{f}_{xu}=\boldsymbol{f}_{ux}$、$\boldsymbol{g}_{xu}=\boldsymbol{g}_{ux}$、$\boldsymbol{h}_{xu}=\boldsymbol{h}_{ux}$ 时是对称阵。其中 $[2\boldsymbol{s}]$、$[2\boldsymbol{\beta}]$ 表示对角线矩阵。根据式(1-6)求解得到 $[\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{\alpha},\Delta\boldsymbol{\beta},\Delta\boldsymbol{s}]^{\mathrm{T}}$，然后进行修正。但是，上述修正计算的收敛性取决于雅可比矩阵的结构。将雅可比矩阵进行分块并写成如下形式：

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta L_x \\ \Delta L_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{xx}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xx}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g_{xu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xu} \\ \boldsymbol{f}_{ux}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{ux}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{ux} & \boldsymbol{f}_{uu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g_{uu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{uu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{u} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{h}_x \\ \boldsymbol{g}_u & \boldsymbol{h}_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \Delta L_\alpha \\ \Delta L_\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{g}_u \\ \boldsymbol{h}_x & \boldsymbol{h}_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{u} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ [2\boldsymbol{s}] \end{bmatrix}\Delta\boldsymbol{s} \\ &\Delta L_s=[0 \quad [2\boldsymbol{s}]]\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}+[2\boldsymbol{\beta}]\Delta\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{1-7}$$

由式(1-7)可以得到：

$$\Delta \boldsymbol{s}=[2\boldsymbol{\beta}]^{-1}\Delta L_s-[2\boldsymbol{\beta}]^{-1}[0\quad[2\boldsymbol{s}]]\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\alpha}\\ \Delta\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$$

因为$[2\boldsymbol{\beta}]$是对角线矩阵，所以$[2\boldsymbol{\beta}]^{-1}=\left[\dfrac{1}{2\boldsymbol{\beta}}\right]$。由互补松弛条件可知，当不等式约束的等号不成立时，相应地，$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$。即在最优解处，并不是所有的不等式约束都起作用，因此$[2\boldsymbol{\beta}]^{-1}$不存在，按照式(1-7)不可能求得$\boldsymbol{\beta}$。

因此，一般在牛顿法计算过程中不考虑不等式约束，只考虑等式约束，则有如下的修正方程：

$$\begin{bmatrix}\Delta L_x\\ \Delta L_u\\ \Delta L_\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{xx}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xu} & \boldsymbol{g}_x\\ \boldsymbol{f}_{ux}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{ux} & \boldsymbol{f}_{uu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{uu} & \boldsymbol{g}_u\\ \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{g}_u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{u}\\ \Delta\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$$

在牛顿法的迭代修正计算过程中，对不等式约束的处理，是在每一步迭代过程中只考虑起作用的不等式约束(达到约束边界、等号成立的不等式约束)，即将每一步计算中起作用的不等式约束变成等式约束进行处理。因为当不等式约束的等号成立，变成等式约束后，对应的拉格朗日乘子$\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，可以与$\boldsymbol{\alpha}$一样对待。其缺陷在于，因为牛顿法具有二次收敛特性，当每一步迭代中的变量修正较大时，不等式约束可能早已越过了边界，或者同时起作用的不等式约束众多；也可能因为在下一步的修正计算过程中，已经起作用的不等式约束不再起作用。这些都给牛顿法计算带来一定的困难。

2. 梯度法

梯度法对于上述库恩-塔克条件是分步求解的。

当不考虑不等式约束时，对于给定的控制变量初值u_k($k=0$开始)，首先根据等式约束，即$L_\alpha=g(x_k,u_k)-C_g=0$求解状态变量$x_k$，对电力系统的优化规划问题来说，等式约束一般是潮流方程。根据确定的(x_k,u_k)以及$L_x=\boldsymbol{f}_x(x_k,u_k)+\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_x(x_k,u_k)=0$计算拉格朗日乘子$\boldsymbol{\alpha}$：

$$\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{f}_x(x_k,u_k)\boldsymbol{g}_x^{-1}(x_k,u_k)\tag{1-8}$$

最后，根据式$L_u=\boldsymbol{f}_u+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_u=0$计算控制变量的修正量：

$$\Delta u_k=\boldsymbol{f}_u(x_k,u_k)+\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_u(x_k,u_k)$$

并对控制变量进行修正：

$$u_{(k+1)}=u_k+\lambda_k\Delta u_k$$

式中，λ_k为迭代步长，是标量的形式，可以采用二次逼近方法确定最优步长，可以参阅文献[1]。将$u_{(k+1)}$作为新的控制变量，重复上述过程，直到$\|\Delta u_k\|\leqslant\varepsilon$(其中$\|\Delta u_k\|$表示向量$\Delta u_k$的某一范数；$\varepsilon$为一个较小的正实数)。

对于不等式约束的考虑，同样是在每一步计算过程中判断不等式约束是否起作用，如果起作用，就作为等式约束对待，同样按照式(1-8)计算相应的拉格朗日乘子。

在电力系统的优化规划问题中，状态变量 x 通常为节点电压的相角和幅值，控制变量 u 一般为节点注入的有功功率或者无功功率。因此，不等式约束可以分为如下两类。

(1) 简单不等式约束，即状态变量和控制变量本身的约束，可以表示为

$$\begin{cases} x^{\min}\leqslant x\leqslant x^{\max} \\ u^{\min}\leqslant u\leqslant u^{\max} \end{cases}$$

(2) 复杂不等式约束，即状态变量函数和控制变量函数的形式，如问题(1-1)所述的 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant C_h$ 形式。实际上，简单不等式约束只是复杂不等式约束的一种特例。

在梯度法中对简单不等式约束处理时，如果在迭代过程中出现越限的情况，可以将状态变量或者控制变量固定在边界上。对于状态变量，因为通常是节点电压的幅值，所以存在所谓的节点类型转换问题，即将 PQ(负荷)节点变换为 PV(发电机)节点。

由此可见，梯度法是对库恩-塔克条件分别求解的，与牛顿法的收敛性不同，梯度法具有线性收敛特性。

1.1.3　广义内点法

针对电力系统优化问题求解中的不等式约束处理困难的现象，内点法通过改变此“阶跃”特性来方便非线性优化问题的求解，通过引入对偶间隙，以及将对偶间隙按照距离不等式约束的对数距离进行分配的方式，实际上是一种罚函数法。下面阐述广义内点法的基本原理，内点罚函数法实际上是广义内点法的一个特例。

1. 拉格朗日函数的鞍点

如上所述，对于优化问题，一般都是直接或者间接地利用库恩-塔克条件进行寻优，寻优的过程基本上都在可行解域内部进行。将问题(1-1)描述为如下较为简洁的形式(参数 C_g、C_h 被吸收到函数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$、$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$中)：

$$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ &\text{s. t.} \begin{cases} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0 \\ h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1-9}$$

拉格朗日松弛函数可以表示为

$$L=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

如果定义原问题为

$$L_o(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\min_{x,u} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

对偶问题可以表示为

$$L_d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\max_{\alpha,\beta} \min_{x,u} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

原问题提供了优化问题最优值的下界；而对偶问题则体现了库恩-塔克条件中的互补松弛约束，提供了优化问题最优值的上界。因此，拉格朗日函数的鞍点($\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*$)满足

$$L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\leqslant L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)\leqslant L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)$$

式中：上标 * 表示最优值；点($\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$)、点($\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*$)和点($\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*$)都是优化问题的可行解，特别是点($\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*$)是其最优解。根据全局优化理论，仅当函数 f、g、h 为凸函数时，等式成立。实际上，电力系统网络方程并不具有凸的性质，但是若假定最优点在初始点附近，即在初始点的一定的邻域范围内，可以大致认为网络方程不会在单调性方面发生变化，因此可以认为：

$$L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)=L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)$$

同样，也可以定义拉格朗日松弛函数的原始问题和对偶问题分别为

$$L_o(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha})=\min_{x,u,\alpha} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{1-10}$$

$$L_d(\boldsymbol{\beta})=\max_{\beta} \min_{x,u,\alpha} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{1-11}$$

必然有

$$\begin{aligned}&L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\leqslant L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta})\\ &\leqslant L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)\leqslant L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^*)\leqslant L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}*} g(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\\ &+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}*} g(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*} h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\ &+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}*} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

也可以认为

$$\begin{aligned}L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=L_o(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta})\\ &=L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)=L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^*)=L_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*)\end{aligned}$$

2. 鞍距

对求解优化问题来说，困难之一是不等式约束的处理问题，对应不等式约束的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\beta}$ 具有突变的特点，即在可行解域内部时为 0，而在可行解域的边界上时是一个正数。对于大多数的寻优算法，这种突变性给计算带来了一定的困难。

当不考虑不等式约束的影响时，对于式(1-10)和式(1-11)所示的原始问题和对偶问题，可以定义鞍距为

$$D=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}*} g(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$$

鞍距体现了不考虑不等式约束情况下原始问题和对偶问题之间的差别。对于式(1-10)和式(1-11)所示的原始问题和对偶问题，对偶间隙可以描述为

$$\begin{aligned}\sigma=&f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\\&-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}*}g(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)=D+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\end{aligned}$$

当达到最优解时，原始问题和对偶问题是相等的，对偶间隙 $\sigma=0$，则有

$$D=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

由此可见，鞍距体现了不等式约束的变化。鞍距也有微分形式，可以描述为

$$\Delta D=\Delta f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Delta g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\Delta\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

或者

$$\Delta D=-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

式中

$$\Delta f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}_x\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_u\Delta\boldsymbol{u}$$
$$\Delta g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{g}_x\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}_u\Delta\boldsymbol{u}$$
$$\Delta h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{h}_x\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}_u\Delta\boldsymbol{u}$$
$$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$$
$$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*$$
$$\Delta\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^*$$
$$\Delta\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^*$$

$\boldsymbol{f}_x$、$\boldsymbol{f}_u$、$\boldsymbol{g}_x$、$\boldsymbol{g}_u$、$\boldsymbol{h}_x$、$\boldsymbol{h}_u$ 分别为目标函数、等式约束和不等式约束对状态变量和控制变量的偏导数。

3. 不等式约束处理

1) 方法 1

鞍距是由不等式约束的变化引起的，因此可以根据零对偶间隙时鞍距的变化公式求解对应不等式约束的拉格朗日乘子。假设不等式约束的数量为 M，根据鞍距在不等式约束之间分配方式的不同，可以相应地形成多种算法。

假设鞍距由这 M 个不等式约束平分，即有

$$\begin{bmatrix}\beta_1^*h_1(x,u)-\beta_1h_1(x^*,u^*)\\\beta_2^*h_2(x,u)-\beta_2h_2(x^*,u^*)\\\vdots\\\beta_M^*h_M(x,u)-\beta_Mh_M(x^*,u^*)\end{bmatrix}=-\frac{D}{M}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)=-\frac{D}{M}\boldsymbol{E}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 为由 $\boldsymbol{h}$ 的各个分量组成的对角矩阵；$\boldsymbol{E}$ 为元素全部为 1 的 M 维向量，则写

成微分的形式，有

$$(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})=-\frac{D}{M}\boldsymbol{E}$$

即

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=-\frac{D}{M}\boldsymbol{E}$$

式中，$\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{H}_x\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{H}_u\Delta\boldsymbol{u}$，可得

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\left[-\frac{D}{M}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\right]\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{1-12}$$

2) 方法 2

鞍距的分配也可以按照不等式约束接近极限的程度进行，可以按照下式对鞍距进行划分：

$$\begin{bmatrix} \beta_1^* h_1(x,u)-\beta_1 h_1(x^*,u^*) \\ \beta_2^* h_2(x,u)-\beta_2 h_2(x^*,u^*) \\ \vdots \\ \beta_M^* h_M(x,u)-\beta_M h_M(x^*,u^*) \end{bmatrix}=-\frac{D}{\sum\limits_{i=1}^{M}h_i(x^*,u^*)}\begin{bmatrix} h_1(x^*,u^*) \\ h_2(x^*,u^*) \\ \vdots \\ h_M(x^*,u^*) \end{bmatrix}$$

写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)=-\frac{Dh(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)}{\sum\limits_{i=1}^{M}h_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)}$$

写成微分的形式为

$$(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})=-\frac{D'}{M}\boldsymbol{E}$$

即

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=-\frac{D'}{M}\boldsymbol{E}$$

式中，$D'=\dfrac{Dh(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)}{\sum\limits_{i=1}^{M}h_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)}$，同样也可以描述为微分的形式，可得

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\left[-\frac{D'}{M}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\right]\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{1-13}$$

此外，还可以采取将鞍距在越限的不等式约束之间分配等处理措施。由此可见，依照不同原则对鞍距进行分配，可以形成不同的算法。而内点法是将最优化模型简化为一般非线性模型，并引入松弛变量，将不等式约束转化为等式约束后，把目标函数改造为障碍函数，如下所示：

$$\min f(\boldsymbol{x})-\mu\sum_{j=1}^{r}\lg l_j-\mu\sum_{j=1}^{r}\lg u_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{x})=0\\ g(\boldsymbol{x})+u=\overline{g}\\ g(\boldsymbol{x})-l=\underline{g}\end{cases}$$

式中，$f(\boldsymbol{x})$为原目标函数；$h(\boldsymbol{x})=0$ 为等式约束；$\underline{g}\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant\overline{g}$ 为不等式约束；l 与 u 分别为 $g(\boldsymbol{x})$下限与上限的松弛变量，$u>0$，$l>0$；r 为不等式约束的个数；μ 为扰动因子(或称障碍常数)，$\mu>0$；当 l_j 或 u_j 靠近边界时，目标函数趋于无穷大，因此极小解不可能在边界上取到，以此将搜寻范围限制在可行域内。由此可见，内点法是按照距离边界的对数进行对偶间隙(假设对偶间隙不为 0)的分配，从本质上说，属于拉格朗日松弛算法。

4. 牛顿法修正

对于优化问题(1-9)，库恩-塔克条件可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u}=0\\ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$ 体现了互补松弛条件，很难利用其来形成迭代算法，所以实际应用中只是考虑前三个公式。牛顿法展开后的修正方程可以表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{xx}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xx}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xu} & \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{h}_x\\ \boldsymbol{f}_{ux}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{ux}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{ux} & \boldsymbol{f}_{uu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{uu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{uu} & \boldsymbol{g}_u & \boldsymbol{h}_u\\ \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{g}_u & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{u}\\ \Delta\boldsymbol{\alpha}\\ \Delta\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta L_{ox}\\ \Delta L_{ou}\\ \Delta L_{o\alpha}\end{bmatrix}$$

式中，ΔL 表示库恩-塔克条件的偏差。上述修正方程中，当变量为$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$时，变量的数量与方程的数量不相等，需要增加对应 $\boldsymbol{\beta}$ 的方程，可以采用式(1-12)或式(1-13)，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{xx}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xx}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{xu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{xu} & \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{h}_x\\ \boldsymbol{f}_{ux}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{ux}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{ux} & \boldsymbol{f}_{uu}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{uu}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{uu} & \boldsymbol{g}_u & \boldsymbol{h}_u\\ \boldsymbol{g}_x & \boldsymbol{g}_u & 0 & 0\\ -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_x & -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_u & 0 & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{u}\\ \Delta\boldsymbol{\alpha}\\ \Delta\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta L_{ox}\\ \Delta L_{ou}\\ \Delta L_{o\alpha}\\ \Delta L_{o\beta}\end{bmatrix}$$

式中，$\Delta L_{o\beta}=-\dfrac{D}{M}\boldsymbol{E}$，或者 $\Delta L_{o\beta}=-\dfrac{D'}{M}\boldsymbol{E}$。将上式展开得