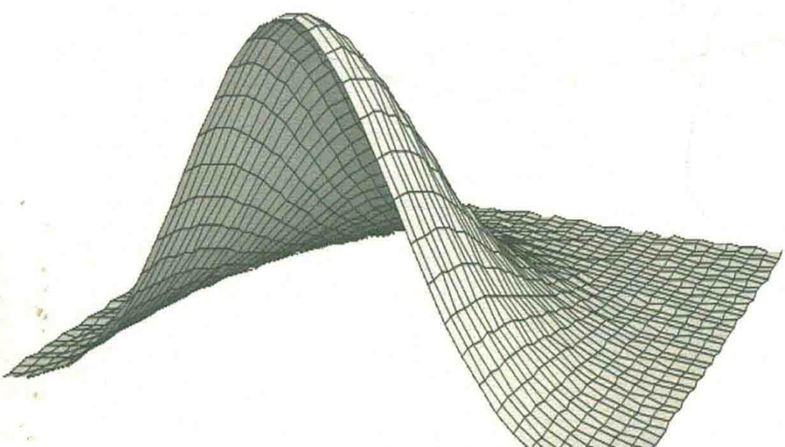
高等理工院校数学基础教材

GAODENG LIGONG YUANXIAO SHUXUE JICHU JIAOCAI

概率论与数理统计

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

邵　伟　主编



中国科学技术大学出版社

高等理工院校数学基础教材

概率论与数理统计

主　编　邵　伟
副主编　王宜举　任建峰
编写人员　王宜举　邵　伟　任建峰
　　　　　王成飞　马凤明　孙　国

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书包含概率论(第 1～5 章)和数理统计(第 6～9 章)两部分. 其中，概率论部分主要介绍了随机事件及概率的概念、古典概型和几何概型、概率的计算公式、随机变量及其分布、随机变量的独立性和关联性、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等. 数理统计部分主要介绍了数理统计的基本概念、抽样分布、参数估计和假设检验等. 本书知识全面、完整，逻辑性强，叙述清晰，结构完整，既重视有关概念的引入，又注重相关结论的推导过程.

本书可作为高等院校理工科非数学专业的本科生教材，亦可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/邵伟主编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2017. 8
ISBN 978-7-312-04282-9

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 邵…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 164647 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press. ustc. edu. cn
https://zgkxjsdxcbs. tmall. com
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×1000 mm　1/16
印张　16. 75
字数　325 千
版次　2017 年 8 月第 1 版
印次　2017 年 8 月第 1 次印刷
定价　32. 00 元

前　言

17 世纪, 正当研究必然性事件的数理关系获得较大发展时, 一个研究偶然事件数量关系的数学分支开始出现了, 这就是概率论.

实际上, 早在 16 世纪, 赌博中的偶然现象就引起了人们的注意. 但促使概率论产生和发展的强大动力来自社会实践. 首先是保险业. 文艺复兴后, 随着航海事业的发展, 意大利开始出现海上保险业务, 后在其他行业开始普及. 鉴于保险对象的偶然性, 为既保证保险公司赢利, 又能使不同行业的人愿意参加保险, 迫切需要对大量偶然现象的规律性进行分析, 从而为保险业的发展提供理论支持. 于是, 发展一种专门适用于偶然现象分析的数学工具也就十分必要了.

基于赌徒的赌注分配问题的研究, 荷兰数学家惠更斯 1657 年写成了《论赌博中的计算》一书, 建立了概率和数学期望等主要概念, 塑造了概率论的雏形. 该书成为最早的概率论专著, 并由此奠定了古典概率论的基础. 再经瑞士数学家雅各布 · 伯努利, 法国数学家棣莫弗、拉普拉斯、蒲丰和泊松, 德国数学家高斯, 英国数学家麦克斯韦等科学家们的努力, 数学方法被成功运用于概率论, 使概率论成为一个比较系统的科学. 而苏联科学家伯恩斯坦和柯尔莫哥洛夫建立的概率论的公理化结构体系, 使概率论成为一门系统、完整的科学.

随着科技的蓬勃发展, 概率论大量应用于国民经济、工农业生产及各学科领域. 许多兴起的应用学科, 如信息论、对策论、排队论、控制论等, 也都以概率论为基础. 概率论和数理统计是密切联系的同类学科, 但又有各自的研究内容. 概率论是指根据大量同类随机现象的统计规律, 对随机现象出现某结果的可能性做出科学的判断, 对某结果出现的可能性大小给出数量上的描述, 进而形成一整套完整的数学理论和方法. 数理统计是指应用概率论的知识研究大量随机现象的规律性, 给出对随机现象进行定量研究的统计方法严格的理论证明, 并给出各种判定方法的可靠程度和局限性, 使我们能从一组样本来判定是否能以相当大的概率来保证某判断正确, 并控制发生错误的概率.

与其他数学学科相比, 概率论和数理统计在研究方法上有其独特性: 第一, 由于随机现象的统计规律是一种集体规律, 必须在大量同类随机现象中才能呈现出来, 所以, 观察、试验、调查是这门学科研究方法的基石. 同时, 作为数学学科的一个分支, 它依然有本学科的定义、定理和公理, 而且这些定义、定理和公理是确定的, 不存在任何随机性. 第二, 在概率论和数理统计研究中, 使用的是“由部分推断全体”的统计推断方法, 也就是由被抽中的部分个体所得出的结论来推断全体, 并由此推断这些结论的可靠性. 由于随机现象在人类活动中大量存在, 随着现代工农业、近代科技的发展而不断发展, 概率论和数理统计形成了许多重要分支, 如随机过程、信息论、试验设计、多元分析等.

随着科技的发展和人类活动的日益广泛, 概率论和数理统计在工程技术、经济管理和金融等领域的应用越来越广泛. 为适应现代科技和高等教育的发展, 我们参阅国内外传统教材并结合自己十多年的教学实践及现代学生的特点, 组织编写了这本书. 该教材将概率论和数理统计的知识与经济学、管理学及金融学等相关知识相结合, 从而既能反映本学科特点, 又便于教学.

为便于学习, 我们对难点内容用“*”号做了标记. 在各章的最后, 我们不但给出了该章的基本要求和知识点网格图, 还介绍了在概率论和数理统计发展中做出突出贡献的人物, 以扩大学生的知识面并提高学生的学习兴趣.

本书由邵伟任主编, 王宜举、任建峰任副主编, 王成飞、孙国和马凤明参加了编写工作. 其中, 王宜举负责本书的总体设计、内容编排和统稿工作. 由于编者水平有限, 书中难免有错误和不当之处, 敬请广大读者批评指正.

编 者

2017 年 2 月

目　　次

第 1 章

概率论的基本概念

随着人类社会的发展，人们需要了解各类随机现象隐含的必然性，并用数学方法研究各种随机现象发生的规律，从而产生了概率论，并逐步将之发展成一门严谨的学科. 本章主要介绍概率论的基本概念、常见的概率模型和一些常用的概率计算公式.

1.1 基本概念

1.1.1 随机现象与随机试验

在日常生活和生产实践中，人们常需要对一些自然现象进行试验和观察，以发现其规律性，帮助我们科学地做出决策. 根据试验结果，可将这些现象分为两类:

(1) 确定现象　试验的结果是确定的. 例如，抛出的物体一定会落下；标准大气压下水加热到 100 °C 会沸腾；石块放到水里会下沉等.

(2) 不确定现象　试验的结果不唯一，也不确定. 例如，抛出的一枚硬币落地后可能会出现正面，也可能会出现反面；掷骰子时，出现的点数为自然数 1 ~ 6 中的某一个；机床加工的产品可能合格，也可能不合格.

对于不确定现象，在试验之前我们不能预知试验结果，但通过大量的试验和观察发现，有些不确定现象的试验结果会呈现某种规律性. 例如，将质地均匀的硬币抛掷多次，落地后出现正面和反面的次数之比接近 1 : 1；掷骰子时，随着试验次数的增加，每个点数出现的概率接近 1/6. 我们将试验结果呈现某种规律性的不确定现象称为**随机现象**.

在我们的日常生活中，随机现象十分普遍，如体育彩票的中奖号码、同一条生产线上生产的工件的寿命等. 随机现象从表面上看是杂乱无章的，但随着试验次数的增多，其总体呈现一定的规律性，而且这种规律性随着试验次数的陡增而愈加明显. 我们把这种由大量同类随机现象所呈现出来的规律性，叫作**统计规律**

性. 概率论和数理统计就是研究随机现象的统计规律性的科学.

对于随机现象, 要揭示其内在规律性, 有时需要在相同条件下进行大量重复性试验, 这样的试验称为**随机试验**, 简称**试验**, 可用字母 E 表示. 例如:

E_1 : 掷一颗骰子, 观察出现的点数;

E_2 : 观察某网站 24 小时内的点击量;

E_3 : 射手对靶子射击一次, 观察能否击中目标;

E_4 : 射手对靶子射击一次, 观察击中的环数.

容易观察到, 上述试验有如下共同特点:

(1) 试验的可重复性: 每一个试验在相同条件下都可重复进行.

当然, 这里的相同条件是指一些主要条件. 除此之外, 还有许多次要条件和偶然因素是人们无法掌控的. 正因如此, 才会在相同条件下出现不确定的结果.

(2) 全部试验结果的可知性: 试验的结果不唯一, 但所有可能出现的结果是可知的.

(3) 试验结果的随机性 (规律性): 在每次试验中, 无法预先断定哪个结果一定会出现, 但每个结果的出现有一定的规律性.

1.1.2 样本空间与事件

对于随机现象, 尽管每次随机试验前不能预知试验的结果, 但试验所有可能出现的结果是已知的. 为此, 将随机试验所有可能出现的结果所组成的集合称为随机试验的**样本空间**, 记为 Ω. 样本空间 Ω 中的每个元素, 即随机试验 E 可能出现的每个结果称为随机试验的**样本点**. 据此, 随机试验 E_1, E_2 的样本空间分别为

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}, \quad \Omega_2=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

对射击试验, 用 H 表示击中目标, $\overline{H}$ 表示未击中目标, 则 E_3, E_4 的样本空间分别为

$$\Omega_3=\{H,\overline{H}\}, \quad \Omega_4=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

在 E_2 中, 样本空间中的样本点有无限个, 而其余试验样本空间中的样本点有有限个. 由此可知, 样本空间中样本点的个数是由试验内容决定的, 它可以是有限的, 也可以是无限的. 一般地, 不同的试验有不同的样本空间. 如 E_3 和 E_4 同是指对靶子射击一次, 但由于试验目的不同, 观察对象不同, 样本空间也就不同, 对应的样本点自然也不同.

在进行随机试验时, 人们更关心满足某些条件的试验结果, 并将由这些样本点所组成的集合称为随机事件, 简称**事件**, 通常用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示. 显然, 随机事件是样本空间 Ω 的一个子集. 在随机试验中, 若试验结果落在某事件对应的

集合中, 则称该**事件发生**. 在试验 E_1 中, 若用 B 表示事件 {点数大于或等于 5}, 则 $B=\{5,6\}$. 显然, 事件 B 发生当且仅当骰子的点数为 5,6 中的一个.

对随机试验, 一个特定的事件可能发生, 也可能不发生, 所以事件具有随机性. 所有事件的全体构成**事件域**, 记为 $\mathcal{F}$. 下面是常见的几类特殊事件.

(1) 基本事件　若事件 A 满足 $|A|=1$, 即事件 A 只含有一个样本点, 则称 A 为基本事件. 它是由单个样本点组成的单点集. 对掷骰子试验 E_1, 事件 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ 均为基本事件.

(2) 必然事件　如果随机事件 A 包含所有样本点, 也就是 $A=\Omega$, 那么在每次试验中, 事件 A 总发生. 这样的事件称为必然事件.

(3) 不可能事件　若事件 A 不含样本空间中的任何样本点, 那么在每次随机试验中, 事件 A 总不发生, 则称这样的事件为不可能事件. 该事件通常记为 $\varnothing$.

必然事件和不可能事件都是确定事件. 所以从严格意义上讲, 它们不是随机事件. 但为便于讨论, 仍把它们看作随机事件.

1.1.3 事件之间的关系和运算

在随机试验中, 不仅要关注单个事件, 有时还需探讨多个事件之间的关系. 由于事件本身可以看作一个集合, 故基于集合之间的关系和运算, 可得事件之间的关系和运算.

(1) 和运算　对事件 A, B, 称 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 为事件 A 与 B 的和事件. 该事件发生当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生. 事件 A 与 B 的和事件 $A\cup B$ 有时也记作 $A+B$.

类似地, 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件, 它表示由事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中所有的样本点所构成的事件; $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 的和事件, 它表示由这些事件中的所有样本点构成的事件.

(2) 积运算　对事件 A, B, 称 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{且} x\in B\}$ 为事件 A 与 B 的积事件. 该事件发生当且仅当事件 A, B 同时发生. 积事件 $A\cap B$ 常简记为 AB.

类似地, 称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件, 该事件发生当且仅当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生; $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 的积事件, 该事件发生当且仅当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 同时发生.

(3) 补运算　对事件 A, 称 $\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega, x\notin A\}$ 为随机事件 A 的补事件. 该事件发生当且仅当事件 A 不发生.

(4) 差运算　对事件 A, B, 称 $A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$ 为随机事件 A 与 B 的差事件. 该事件发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生. 利用补运算和

积运算, 差运算 $A-B$ 可写成 $A\overline{B}$.

由差运算的定义, 对任意事件 A, 有

$$A-A=\varnothing,\quad A-\varnothing=A,\quad A-\Omega=\varnothing.$$

图 1.1~ 图 1.4 中的阴影部分标出了事件 A,B 在不同运算下的结果.

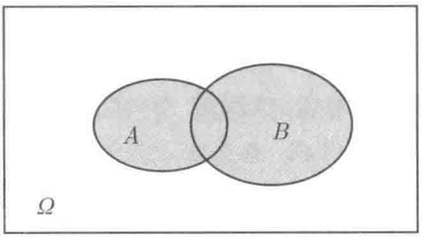


图 1.1 事件 A,B 的和事件 $A\cup B$

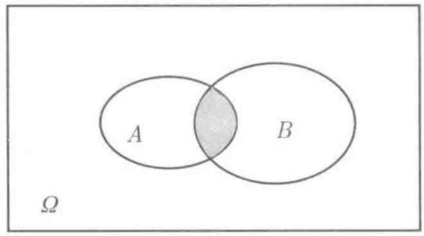


图 1.2 事件 A,B 的积事件 AB

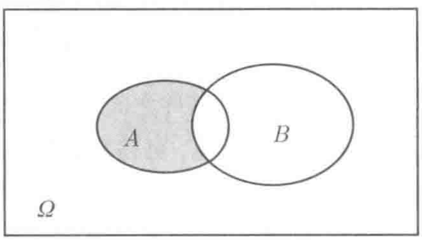


图 1.3 事件 A,B 的差事件 $A-B$

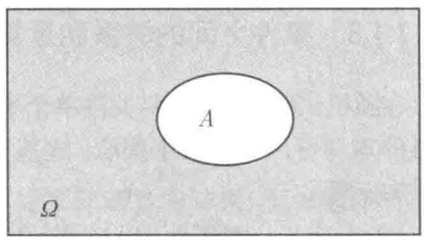


图 1.4 事件 A 的补事件 $\bar{A}$

基于事件与集合之间的关系, 不难验证事件运算满足如下定律:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律 (德摩根定律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德摩根定律可推广到多个事件的情形, 即对有限个或无穷可列个事件 $\{A_k\}$, 有

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A}_k.$$

基于上述运算, 可定义事件之间的关系.

(1) 包含关系 若事件 A 中的试验结果全部属于事件 B, 则称事件 B 包含事件 A, 记为 $A\subset B$. 此时, 若事件 A 发生, 则事件 B 发生. 显然, 如果 $A\subset B$ 且 $A\supset B$, 则事件 A 与 B 相等, 即 $A=B$. 显然, 对任意事件 A, 有

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

(2) 不相容关系　若事件 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$, 即在同一次随机试验中事件 A 和 B 不能同时发生, 则称事件 A 和 B 不相容或互斥. 显然, 两个事件不相容当且仅当它们没有公共的样本点. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件不相容, 则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容.

(3) 对立关系　若事件 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$, 则称事件 A 和 B 互为对立事件, 记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$. 它表示对每次试验, 事件 A 和 B 中有且仅有一个发生. 事实上, 事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$.

例 1　甲、乙、丙三人各投篮一次, 记事件 $A=\{$甲投中$\}$, $B=\{$乙投中$\}$, $C=\{$丙投中$\}$, 则下列各事件可通过事件 A,B,C 表示:

(1) 甲投中而乙未投中: $A\overline{B}$;

(2) 三人均未投中: $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$;

(3) 三人中恰好有一人投中: $A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C$;

(4) 三人中至少有一人投中: $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}}$;

(5) 三人中至少有一人未投中: $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;

(6) 三人中至多一人投中: $A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C\cup\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

1.2　概率的定义与性质

对于随机试验, 我们不能预先判断某随机事件是否发生. 但对于有些试验, 凭直觉可以比较两事件发生的可能性大小, 如从一只装有 5 个白球和 2 个黑球的袋子中随机抽取一球, 抽到白球比抽到黑球的可能性大. 但我们更想知道抽到白球和抽到黑球的可能性到底有多大. 为从理论上对这种可能性进行定量分析, 苏联数学家柯尔莫哥洛夫在频率的基础上建立了概率的公理化定义.

1.2.1　频率与概率

定义 1.1　设在 n 次随机试验中, 事件 A 发生的次数为 n_A, 则 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 定义为在 n 次试验中事件 A 发生的频率, 简称事件 A 的**频率**.

凭直觉和经验, 容易建立频率和事件发生的可能性之间的关系: 事件发生的频率越高, 事件发生的可能性就越大; 反之亦然. 所以, 一个直观的想法是利用事件的频率定义事件的概率, 以量化事件发生的可能性大小. 但下面的例子告诉我们这样做不可行.

例 1　数学家德摩根、蒲丰和皮尔逊分别通过抛硬币试验得到如表 1.1 所示的数据.

表 1.1

试验者	试验次数	正面次数	频　率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

根据试验结果，可得到两点启示：首先，不同的人或者同一个人在不同时间做抛硬币试验时，出现正面的频率是不一样的，也就是说，事件发生的频率不是固定的；其次，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 f_n 逐渐趋于常数 0.5. 第一点表明频率不能作为概率的定义，而第二点表明，在试验次数很大时，频率 f_n 呈现一定的稳定性，也就是说，频率反映一定的统计规律性，用其表征事件概率的大小是合适的. 因此，在试验次数很大时，可将频率作为事件概率的参考值. 遗憾的是，对于有些自然现象我们无法进行大量重复性试验. 同时，为了理论研究的需要，有必要建立概率的公理化定义. 为此，人们对频率进行特征分析，得到如下性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

基于频率的上述性质，我们得到概率的如下定义：

定义 1.2　设 $P(\cdot)$ 为定义在样本空间 Ω 的事件域 $\mathcal{F}$ 上的函数. 若它满足：

(1) 非负性　对于任意事件 A, $P(A) \geqslant 0$;

(2) 规范性　$P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性　对任意可列个两两不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$，成立

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

则称 P 为样本空间 Ω 上的**概率**. 具有上述结构的样本空间称为概率空间，记为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

这里解释一下可列集的概念. 众所周知，集合分为有限集和无限集. 对于无限集，我们不再通过其含有的元素个数来比较它们的大小，而是通过它们与自然数列这个最基本的无限集之间的关系来定义它们的大小. 具体地说，如果一个无限集能与自然数集建立一一映射，则称该集合为可列集或可数集，并称该集合含有可列个元素，否则称其为不可列集. 自然数集、整数集和有理数集都是可列集. 可列集是最小的无限集. 实数集、区间集、矩形平面点集都是不可列无限集.

1.2.2 概率的性质

性质 1.1 设 P 是定义在样本空间 Ω 上的概率, 则:

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 有限可加性 对任意两两不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 成立

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k);$$

(3) 单调性 若 $A\subset B$, 则 $P(B)\geqslant P(A)$, 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(4) 对任意事件 A, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$, 且 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(5) 加法公式 对任意两个随机事件 A, B, 成立

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

(6) 减法公式 对任意随机事件 A, B, 成立

$$P(A-B)=P(A)-P(AB);$$

*(7) 概率的连续性 设随机事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 基于包含关系为单调序列, 即满足

$$A_k\supset A_{k+1}, \quad 或 \quad A_k\subset A_{k+1}, \quad \forall k,$$

定义集合序列极限

$$A=\lim_{k\to\infty} A_k=\begin{cases}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k, & A_k\supset A_{k+1},\\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, & A_k\subset A_{k+1},\end{cases}$$

则 $P(\lim\limits_{k\to\infty} A_k)=\lim\limits_{k\to\infty} P(A_k)$.

证明 (1) 该性质从概率的通俗化定义很容易理解. 下面利用概率的公理化定义对其进行证明.

令 $A_k=\varnothing\ (k=1,2,\cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k=\varnothing$, 且对任意的 $k,l(k\neq l)$, $A_k\cap A_l=\varnothing$. 由概率的可列可加性, 得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

再利用概率的非负性知 $P(\varnothing)=0$.

(2) 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$, 则随机事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 满足

$$A_k\cap A_l=\varnothing \quad (\forall\ k\neq l), \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

利用概率的可列可加性和 (1) 中的结论, 得

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$