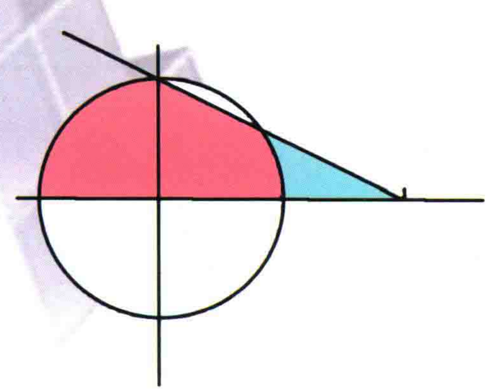
普通高等教育“十三五”规划建设教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

曹殿立　姬利娜　主编



中国農業大學出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划建设教材

高等数学

曹殿立　姬利娜　主编

中国农业大学出版社
·北京·

内容提要

本书内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、积分、定积分的应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程等.每章除教学内容及习题外,还设有综合练习题.

本书致力于内容的科学性、系统性和文化性,注重教材的适用性和通用性.在内容的编排上,注意概念实际背景的介绍,突出基本概念的系统理解和解题方法的把握.教材起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰、详略适当、重点突出,例题、习题及题型丰富.习题除按小节配置外,各章末还设有综合练习题,并附有答案.

本书可作为高等院校农、医、经、管类各专业的高等数学课程教材、教学参考书以及考研学习或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/曹殿立,姬利娜主编.—北京:中国农业大学出版社,2016.8
ISBN 978-7-5655-1660-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… ②姬… Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 177064 号

书　　名 高等数学
作　　者 曹殿立　姬利娜　主编

策　　划 赵　中　　**责任编辑** 冯雪梅
封面设计 郑　川
出版发行 中国农业大学出版社
社　　址 北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码** 100193
电　　话 发行部 010-62818525,8625　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617,2618　　出　版　部 010-62733440
网　　址 http://www.cau.edu.cn/caup　　**E-mail** cbsszs@cau.edu.cn
经　　销 新华书店
印　　刷 涿州市星河印刷有限公司
版　　次 2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
规　　格 787×1 092　16 开本　25.75 印张　635 千字
定　　价 54.00 元

编写人员

主　编　曹殿立　姬利娜

副主编　张建军　白洪远　张香伟　温　建

参　编　刘同生　文生兰　马文雅　黄　兰

前　言

高等数学是高等农业院校各专业重要的基础课,也是自然科学、社会科学应用广泛的数学基础.

本教材按照教育部高等学校非数学类专业高等农林教育高等数学课程基本要求,结合作者长期的高等数学教学实践,并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成.在内容上突出了以下几个特点:

1.简明实用、通俗易学.略去了极限精确定义和一些抽象、繁琐的理论证明,直接从客观世界所提供的模型和原理中导出基本概念,使表达更加简明,易于理解.

2.突出基本概念和基本计算的教学.在课程内容的编排上,注意明晰概念以及厘清概念之间的内在联系,注意基本计算方法的系统把握,并设置较多的例题、习题和综合练习来进一步强化学习效果.

3.体现农林特色.在相关章节较多地设置了农林科学、农林经济等方面的内容,体现了高等数学在农林科学中的应用,为学生专业学习奠定基础.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、姬利娜、张建军、白洪远、刘同生、马文雅、温建,郑州师范学院的张香伟,解放军信息工程大学的文生兰,华北水利水电大学的黄兰,最后由曹殿立统一定稿.

东华大学的秦玉明教授仔细审阅了全稿,并提出了许多意见和建议,在此表示由衷的谢意!

对中国农业大学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢!

向参考文献的作者们致敬!

虽然我们十分努力,但由于水平所限,定有错误与不妥之处,恳请广大师生和读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月 16 日

目　录

第一章　函数的极限与连续

函数的极限与连续是高等数学的基础，它突出地表现了不同于初等数学的特点，为我们思考和解决实际问题提供了有效方法. 本章主要介绍函数、极限、连续等基本概念以及它们的有关性质，为以后章节的学习奠定基础.

第一节　函　数

一、区间与邻域

1. 集合

定义 1.1　具有特定属性的对象所组成的总体称为一个集合. 组成这个集合的对象称为该集合的元素.

通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示集合，用小写英文字母 a,b,c 等表示元素. 若 a 是集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素，就记作 $a \in \boldsymbol{A}$；若 a 不是集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素，记作 $a \notin \boldsymbol{A}$.

由有限多个元素组成的集合称为**有限集**，由无限多个元素组成的集合称为**无限集**. 如果这个集合不含有任何元素，则称该集合为**空集**，记为 Φ.

一般地，全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

表示集合的方法通常有两种，一种是**列举法**，列出集合中的所有元素. 例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示为 $\boldsymbol{A}=\{1,2\}$. 另一种为**描述法**，描述出集合中元素的特定属性，即 $\boldsymbol{A}=\{x \mid x$ 具有的特定属性$\}$. 例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示为 $\boldsymbol{A}=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

本书用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别说明，以后提到的数都是实数. 同时，由于实数与数轴上的点具有一一对应关系，数集也称为**点集**.

2. 区间

在中学我们已经知道，设 $a,b \in \mathbf{R}$，$a<b$，常见的区间有：

(1) 开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

(3) 半开区间 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$；$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$.

以上三类区间都为**有限区间**.

此外还有几类**无限区间**，类似地表示如下：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}; \qquad [a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}; \qquad (-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}.$$

需要注意的是，记号“∞”是表示无限性的一种记号，由英国数学家沃利斯(John Wallis，1616—1703年)于1655年引入，读作“无穷大”.

$+\infty$ 可以理解为数轴正向的正无穷远处，但比数轴正向的任何一个确定点的数值更大；$-\infty$ 可以理解为数轴负向的负无穷远处，但其绝对值比数轴负向的任何一个确定点的数值的绝对值更大. ∞ 不是数，不表示某个确定的点，不能像数一样进行运算. 全体实数集 **R** 记为 $(-\infty,+\infty)$.

3. 邻域

定义 1.2 设 a 和 δ 是两个实数，$\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 为邻域中心，δ 为邻域半径.

显然，$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$，见图 1.1.

同理，称集合 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为 a 的 δ **去心邻域**，见图 1.2.

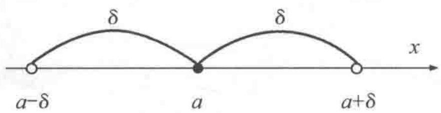


图 1.1

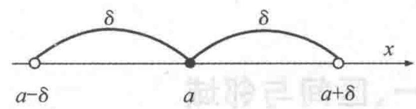


图 1.2

此外，区间 $[a,a+\delta)$，$(a,a+\delta)$，$(a-\delta,a]$，$(a-\delta,a)$ 依次称为点 a 的 δ **右邻域**、点 a 的 δ **右去心邻域**、点 a 的 δ **左邻域**以及点 a 的 δ **左去心邻域**.

需要注意的是，这里的 δ 通常代表一个很小很小的正数，也就是说，邻域 $U(a,\delta)$（或去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$）是一个以点 a 为中心的半径极小的开区间.

二、函数的定义

定义 1.3 设 D 和 W 是两个实数集，f 是一个对应规则. 在此规则下，若对于 D 中的每一个 x，在 W 中都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫作自变量，y 叫作因变量，数集 D 叫作函数的定义域.

当 x 取值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. W 的子集 $f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

例 1 求函数 $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须使 $x^2-4\geqslant 0$ 且 $\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以该函数的定义域是 $\{x \mid x=\pm 2\}$.

函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围. 在实际问题中，应根据问题的意义来确定. 如自由落体函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，若设物体开始下落的时刻为 $t=0$，下落停止的时刻为 $t=T$，则它的定义域为 $D=[0,T]$.

由函数的定义可知，一个函数由其对应规则 f 及定义域 D 完全确定. 如果两个函数的定

义域和对应规则都相同,那么这两个函数是**相同的**.

例如函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$,它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而且对应规则也相同,因而这两个函数是相同的.

而函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不相同的. 虽然这两个函数的对应规则相同,但 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

显然,$f(x)=\sin x$ 与 $g(t)=\sin t$ 是同一个函数.

需要说明的是,在定义 1.3 中,要求函数定义域中的每一个 x,都有值域中唯一确定的 y 与之对应. 但还存在诸如 $x^2+y^2=r^2$ 这样的对应关系. 显然,对每一个 $x\in[-r,r]$,按照对应关系 $x^2+y^2=r^2$ 确定的是 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,y 的值不唯一. 这样的函数称为**多值函数**,而定义 1.3 中的函数称为**单值函数**.

对于多值函数,往往只需要附加一些条件,就可以化为单值函数. 例如在 $x^2+y^2=r^2$ 中限定 $y\geqslant 0$,则确定了一个单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$;限定 $y\leqslant 0$,则得到了另一个单值函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 本书中所说的函数除特别指明外都是单值函数.

例 2　常数函数 $y=1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=\{1\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1.3 所示.

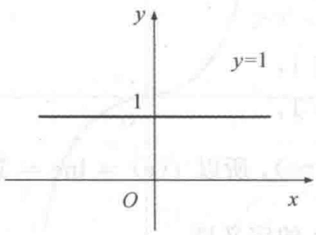


图 1.3

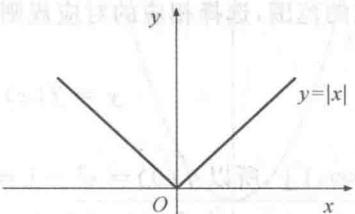


图 1.4

例 3　函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=[0,+\infty)$,其图形如图 1.4 所示.

例 4　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,其图形如图 1.5 所示. 对任何实数 x 都有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

例 5　设 x 为任意实数. 不超过 x 的最大整数,记作 $[x]$. 例如,$[-0.1]=-1$,$[0.99]=0$,$[1]=1$,$[\sqrt{3}]=1$. 把 x 看作自变量,则函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**. 它的定义域 $D=$

$(-\infty, +\infty)$，值域为整数集 **Z**. 图形如图 1.6 所示.

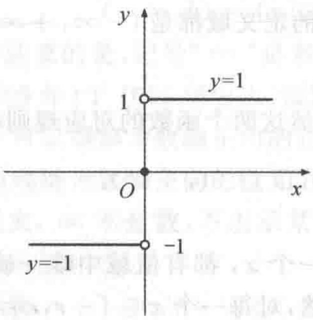


图 1.5

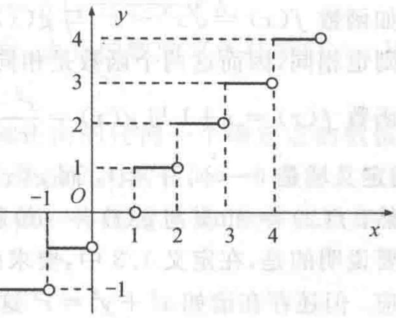


图 1.6

例 3 至例 5 这几个函数有一个共同的特征：在定义域的不同范围内，有不同的对应规则. 这类函数统称为**分段函数**.

分段函数在实际生活中也是广泛存在的，比如出租车的计价与行驶的里程关系；阶梯水价与用水量的关系；个人所得税分段税率与个人收入的关系等.

分段函数的对应规则是由自变量所在的范围所确定的，在求分段函数的函数值时，应根据自变量所在的范围，选择相应的对应规则. 例如，对于函数

$$y = f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leqslant 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$$

因 $0 \in (-\infty, 1]$，所以 $f(0) = e^0 - 1 = 0$；因 $e \in (1, +\infty)$，所以 $f(e) = \ln e = 1$.

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x + 1, & x \geqslant 1, \\ x + 2, & x < 1. \end{cases}$ 求 $f(x+4)$ 的定义域.

解 将 $f(x)$ 及定义域中 x 分别用 $x+4$ 替换，得

$$f(x+4) = \begin{cases} (x+4)^3 + 4(x+4) + 1, & x + 4 \geqslant 1, \\ (x+4) + 2, & +4 < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 + 12x^2 + 52x + 81, & x \geqslant -3, \\ x + 6, & x < -3. \end{cases}$$

故 $f(x+4)$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup [-3, +\infty) = (-\infty, +\infty)$.

三、函数的几何性质

1. 有界性　设函数 $y = f(x)$，$x \in D$，若存在常数 $K > 0$，对任意的 $x \in D$ 都有

$$|f(x)| \leqslant K,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

例如，对于函数 $y = \sin x$，因为 $|\sin x| \leqslant 1$，所以它在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界；而函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

函数的有界性还可以等价地表述为：

设函数 $y=f(x), x\in D$，若存在两个数 m 和 M，对任意的 $x\in D$ 都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界**的. 其中 m 称为 $f(x)$ 在 D 上的**下界**，而 M 称为 $f(x)$ 在 D 上的**上界**.

显然，函数在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界. 有上界而无下界，有下界而无上界，既无上界又无下界，都是无界的.

2. 单调性　设函数 $y=f(x), x\in D$，若对任意的 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$) 成立，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加(减少)**. 上述不等式中若没有等号，则称 $f(x)$ 在 D 上**严格单调增加(减少)**. 单调增加或单调减少的函数均称为**单调函数**.

在某个区间上，若 $f(x)$ 为单调函数，则称该区间为函数 $f(x)$ 的**单调区间**.

例如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的，称 $(-\infty,+\infty)$ 为 $y=x^3$ 的严格单调增加区间(图 1.7)；$y=x^2$ 的严格单调减少区间为 $(-\infty,0)$，严格单调增加区间为 $(0,+\infty)$，但在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 $y=x^2$ 不是单调的(图 1.8).

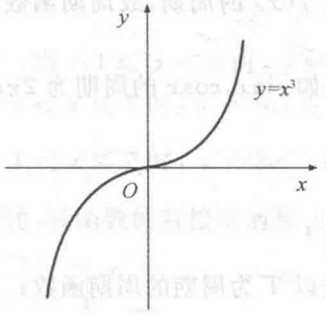


图 1.7

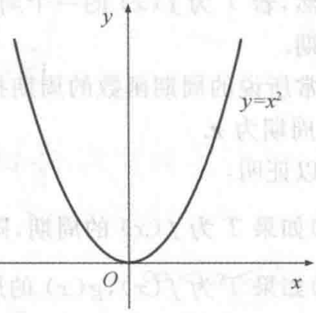


图 1.8

函数 $y=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加但不是严格单调增加，因为对于任意的 $x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $[x_1]\leqslant[x_2]$.

3. 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**；若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**偶函数**.

例如 $y=\sin x, y=x^3$ 是奇函数；$y=\cos x, y=x^2$ 是偶函数；$y=\sin x+\cos x, y=x^2+x^3$ 既不是奇函数也不是偶函数.

一般地，两个奇函数(偶函数)相加或相减得到的函数为奇函数(偶函数)；两个奇函数(偶函数)相乘或相除得到的函数为偶函数；一个奇函数与一个偶函数相加或相减得到的函数既不是奇函数也不是偶函数；一个奇函数与一个偶函数相乘或相除得到的函数是奇函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 7　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　因为　$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$