普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材
面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century
2008年全国高等农业院校优秀教材

高等数学

第三版

梁保松　陈　涛　主编

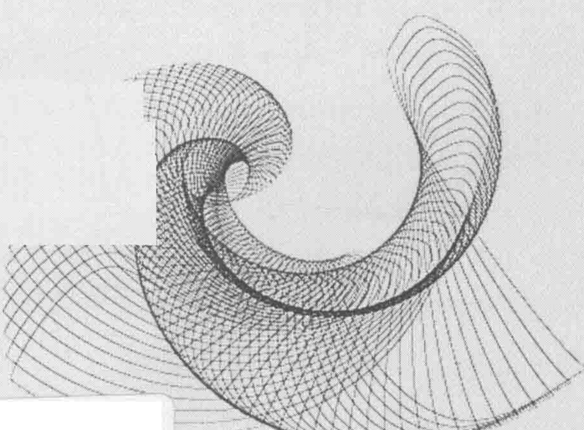
中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材
面向21世纪课程教材
2008年全国高等农业院校优秀教材

高等数学

第三版

梁保松 陈 涛 主编



中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 梁保松，陈涛主编．—3 版．—北京：中国农业出版社，2012.8（2016.8 重印）
普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材　面向 21 世纪课程教材　2008 年全国高等农业院校优秀教材
ISBN 978-7-109-16836-7

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①梁…　②陈…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 137517 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑　朱　雷　魏明龙
文字编辑　朱　雷

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2002 年 6 月第 1 版　　2012 年 8 月第 3 版
2016 年 8 月第 3 版北京第 5 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：19.5
字数：460 千字
定价：30.00 元

内　容　提　要

全书内容共九章，主要内容有：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，多元函数微分学，二重积分，无穷级数，微分方程与差分方程。

本书各节后配有适量习题，以巩固所学知识。每章后均有自测题，涵盖了本章所学知识，有一定的深度和难度，其题型包括选择题、判断题、填空题和证明题，可供报考研究生者选用。书末附有习题及自测题参考答案。

本书内容丰富，取材广泛、结构严谨、逻辑清晰、叙述详细，可作为高等院校农、林、牧、生命、经管、财会等专业的教学用书，也可作为各类专业技术人员的参考书。

编写人员名单

主　　编　梁保松　陈　涛

副 主 编　曹殿立　林淑容　王建平

编写人员　（按姓名拼音为序）

曹殿立　陈　涛　杜世平　方桂英

高胜哲　胡丽萍　李春宏　梁保松

林淑容　王建平　张玉峰

【前　言】

本书第一版被教育部列入全国高等教育“面向21世纪课程教材”，2002年由中国农业出版社出版，获2005年全国高等农业院校优秀教材奖。2007年修订为第二版，被列入全国高等农林院校“十一五”规划教材，获2008年全国高等农业院校优秀教材奖。第三版被列入普通高等教育农业部“十二五”规划教材。第三版是依据教育部农林高等院校理科基础课教学指导委员会讨论的教学基本要求，结合高等农林院校的教学实际，在广泛听取教师和读者意见的基础上，对第二版教材进行了进一步修订。修订后的第三版教材有以下特点：

一、保持了原教材内容丰富、取材广泛、结构严谨、叙述详细的体系和风格。同时吸收采纳了当前教育教学改革中的一些成功举措，使得新版教材既满足教学需要，更体现时代特色。

二、较多地设置了生物科学、生命科学、经济管理等方面的实例，加强了高等数学与实际的结合，突出了应用数学能力和建模思想的培养。

本书由河南农业大学梁保松担任第一主编，四川农业大学陈涛担任第二主编。副主编有曹殿立、林淑容和王建平，参编为杜世平、胡丽萍、李春宏、张玉峰、高胜哲和方桂英。全书修订工作由河南农业大学梁保松教授统稿和定稿。

参加第一版教材编写的有：梁保松、陈涛、张玉峰、赵玉祥、潘正义、党耀国、叶耀军、杨德彰、曹殿立；参加第二版教材编写的有：梁保松、陈涛、张玉峰、方桂英、曹殿立、叶耀军、林淑容、梅芳、杨燕新、胡丽萍和杜世平。

本书虽已两次修订，但错误和不足之处仍在所难免，敬请广大读者和授课教师批评斧正。

编　者

2012年5月

[目　录]

前言

[第一章] 函数的极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象．所谓函数关系就是变量之间的对应关系．极限方法是研究变量的一种基本方法．本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念，这些内容构成了全书的基础．

第一节　函数的基本概念

在初等数学中，读者已学过函数概念，本节仅就这方面内容归纳和补充．

一、函数定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一非空数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 有唯一确定的数值与 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 叫做这个函数的定义域，f 叫做对应法则，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的**值域**．

由函数的定义可知，一个函数由对应法则 f 及定义域 D 所完全确定，选用什么字母表示函数不是本质的．也就是说，**两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同**．例如，$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 这两个函数的定义域都是 $(-\infty,\ +\infty)$，而且对应法则也相同，因而这两个函数是相同的．函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 是不相同的，因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$．显然，$f(x)=1+x^2$ 与 $g(t)=1+t^2$ 是同一个函数．

例 1　对任意实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数．

例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[\pi]=3$，$[0]=0$，称 $f(x)=[x]$ 为**取整函数**．

它的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是整数集，其图形如图 1-1 所示．

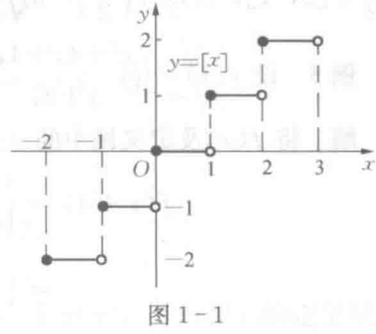


图 1-1

二、分段函数

例 2　函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，其图形关于 y 轴对称(图 1-2). 这个函数称为**绝对值函数**.

例 3　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=(-1, +\infty)$，其图形如图 1-3 所示.

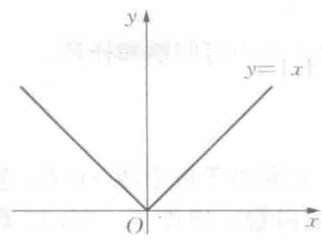


图 1-2

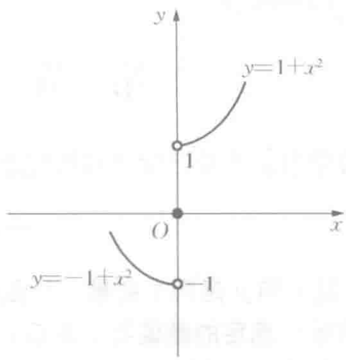


图 1-3

在例 2 和例 3 中看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，称为**分段函数**. 例 2 和例 3 都是分段函数.

例 4　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0, +\infty)$. 分段函数的对应法则是由自变量所在的范围所确定的，在求分段函数的函数值时，应根据自变量所在的范围，选择相应的对应法则. 例如 $\frac{1}{2}\in[0, 1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.　$4\in(1, +\infty)$，所以 $f(4)=1+4=5$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}x^3+4x+1, & x\geqslant 1,\\ x+2, & x<1,\end{cases}$ 求 $f(x+4)$ 的定义域.

解　将 $f(x)$ 及定义域中的 x 分别用 $x+4$ 代换，得

$$\begin{aligned}f(x+4)&=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & x+4\geqslant 1,\\ (x+4)+2, & x+4<1\end{cases}\\ &=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & x\geqslant -3,\\ x+6, & x<-3,\end{cases}\end{aligned}$$

$f(x+4)$的定义域为$(-\infty, -3)\cup[-3, +\infty)=(-\infty, +\infty)$.

注意：分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

三、复合函数

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 E，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若 $W\cap E$ 非空，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$（图 1-4），$u$ 称为中间变量.

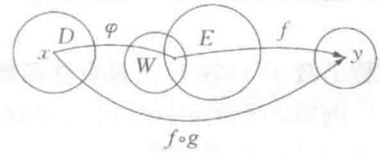


图 1-4

例 6 设 $y=f(u)=u^2$，$u=\varphi(x)=1-x^2$，则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=(1-x^2)^2 \quad (-\infty<x<+\infty).$$

例 7 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=1-x^2$，则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

虽然函数 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，但为了使复合后的函数有意义，必须使 $u\geqslant 0$，故限制 x 的范围为$[-1, 1]$.

例 8 设函数 $y=f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=3+x^2$，则由于 x 无论取何值均有 $u\geqslant 3$，故 $u=\varphi(x)$ 的值域 $W=[3, +\infty)$，而 $y=f(u)$ 的定义域 $E=[-1, 1]$，$W\cap E=\varnothing$，故 $y=f[\varphi(x)]$无定义.

例 8 表明：**并非任何两个函数都能够复合成一个复合函数**.

例 9 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=3x$，求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(3x)=(3x)^2=9x^2$，$g[f(x)]=g(x^2)=3x^2$.

例 9 表明：$f[g(x)]$与 $g[f(x)]$一般来说是不同的.

关于复合函数，**重要的是把一个复合函数分解成若干个简单函数**.

例如，$y=\ln\sin\sqrt{x^2+1}$ 可以分解为

$$y=\ln u, \quad u=\sin v, \quad v=\sqrt{w}, \quad w=x^2+1.$$

例 10 设 $f(\sin t)=1+\cos 2t$，求 $f(x)(|x|\leqslant 1)$.

解 因为 $1+\cos 2t=2(1-\sin^2 t)$，故 $f(\sin t)=2(1-\sin^2 t)$. 它可以看做是由 $f(x)=2(1-x^2)$与 $x=\sin t$ 复合而成的复合函数，从而

$$f(x)=2(1-x^2).$$

例 11 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求 $\varphi(x)$.

解 因为 $\varphi(x+1)=\begin{cases} (x+1-1)^2, & 1\leqslant x+1\leqslant 2, \\ 2(x+1-1), & 2<x+1\leqslant 3, \end{cases}$ 令 $t=x+1$，得

$$\varphi(t)=\begin{cases} (t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2, \\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3, \end{cases}$$

所以

$$\varphi(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3. \end{cases}$$

例 12 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)>0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域.

解 由 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，得 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}$，又由题设 $f[\varphi(x)]=1-x$，故 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，即 $[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$. 因 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty, 0)$.

四、函数的几种特性

定义 3(有界性)　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数 $E>0$，使任意 $x\in D$ 都有

$$|f(x)|\leqslant E,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上是有界函数.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的，因为对一切 x，有 $|\sin x|\leqslant 1$和 $|\cos x|\leqslant 1$. 而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上无界.

有界函数的等价定义是：

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在两个数 m 和 M，使任意 $x\in D$ 都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上是有界函数.

定义 4(单调性)　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对任意 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有：

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$成立，则称 $f(x)$在 D 上单调增加；$f(x_1)<f(x_2)$成立，则称 $f(x)$在 D 上严格单调增加.

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$成立，则称 $f(x)$在 D 上单调减少；$f(x_1)>f(x_2)$成立，则称 $f(x)$在 D 上严格单调减少.

例如，$y=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$内是严格单调增加的；$y=x^2$ 在$(-\infty, 0)$内严格单调减少，在$(0, +\infty)$内严格单调增加，但在整个定义域$(-\infty, +\infty)$内不是单调的；函数 $y=[x]$在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的，但不是严格单调增加的，因为任意 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有$[x_1]\leqslant[x_2]$.

定义 5(奇偶性)　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 D 是关于原点对称的数集. 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数；若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数.

例如，$y=\sin x$，$y=x^3$ 是奇函数；$y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数；$y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 13　已知 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，$|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$是奇函数.

证　令 $u=\frac{1}{x}$，代入原方程，得 $af\left(\frac{1}{u}\right)+bf(u)=cu$，从而 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$.

将原方程及上面方程的两边分别乘 a，b，然后相减，得

$$a^2f(x)-b^2f(x)=\frac{ac}{x}-bcx=\frac{ac-bcx^2}{x}.$$

因为 $|a|\neq|b|$，故有 $f(x)=\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}$，于是 $f(-x)=-\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}=-f(x)$. 故 $f(x)$是奇函数.

例 14　设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \cos x+x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$在其定义域内为偶函数.