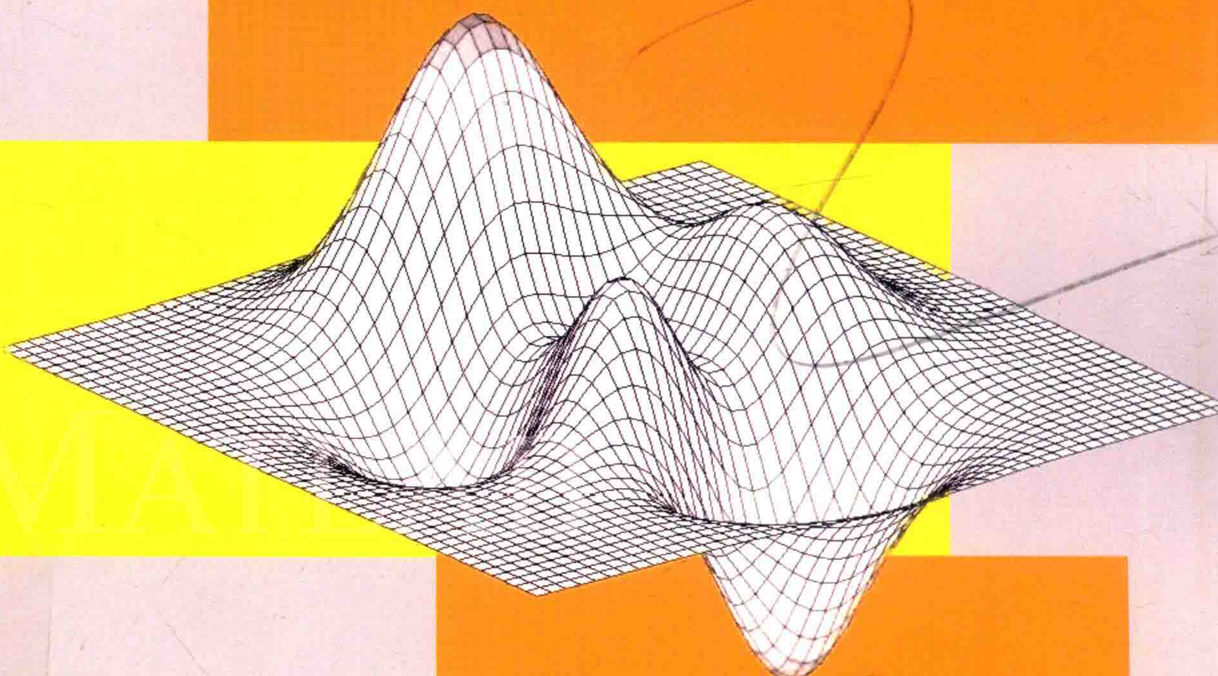
大学数学教学与改革丛书

高等数学（上册）

王 红 杨策平 主编



科学出版社

大学数学教学与改革丛书

高等数学

（上册）

王　红　杨策平　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以“学习数学基本知识，提高数学应用能力”为宗旨，汲取了现行教学改革中一些成功举措. 在每章开始引入本章应用实例，引导学生联系实际，并将数学软件MATLAB融入每一章，让学生在理解高等数学基本理论的基础上，用MATLAB软件进行数学计算，以培养学生掌握运用数学工具解决实际问题的能力.

本书分上、下两册出版，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容. 具有结构严谨，叙述直观清晰，内容通俗易懂、结合实际等特点.

本书可作为高等学校理工类相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/王红，杨策平主编. —北京：科学出版社，2018. 8

(大学数学教学与改革丛书)

ISBN 978-7-03-058265-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②杨… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第159028号

责任编辑：邵 娜 闫 陶/责任校对：彭珍珍

责任印制：彭 超/封面设计：彬 峰

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2018年8月第 一 版 印张：12 1/2

2018年8月第一次印刷 字数：297 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是在保持传统教材内容的基础上，为深入贯彻数学教学改革和学科建设精神，针对普通高等学校理工类学生编写的教材. 在保持结构严谨、内容通俗易懂的同时，注重基础、加强应用. 本书具有以下特色.

(1) 尽量减少烦琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明. 在编写的过程中，编者力求使学生在学习过程中较好地了解高等数学的基本内容，特别突出基本思想和基本方法，注重对学生的基本运算、分析问题及解决问题能力的培养. 文字表述详尽通畅，平易近人，易教易学，内容编排利于教学的组织和安排.

(2) 注重高等数学知识的实际应用. 本书在每一章开始引入与本章知识点相关的应用实例，引导学生联系实际，并在该章结束时给出实例解答. 强调数学建模的思想和方法，以达到学以致用、服务专业课程的效果. 所选用的例题、习题突出数学基本能力的训练而不过分追求技巧.

(3) 注重教学实践性，每章最后一节均有 MATLAB 软件求解示例. 通过数学实验将高等数学与数学软件的应用有机结合起来，让学生在理解高等数学基本理论基础上，用 MATLAB 进行数学计算，帮助学生掌握用数学工具解决实际问题的能力，培养学生的数学建模能力.

本书参加编写的人员有：王红、杨策平、朱玲、徐循、朱长青、刘清国、郑列、方瑛、刘磊、张凯凡、黄斌、任潜能、许松林、蒋汇峰、陈华、黄毅、胡二琴、李家雄、耿亮等，由王红、杨策平担任主编，朱玲、朱长青、徐循、刘清国担任副主编，由王红、杨策平统稿、定稿.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请广大读者提出批评、指正，以便再版时予以修订.

编　者

2018 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数与极限 …… 1
1.1　集合与函数 …… 1
1.1.1　集合 …… 1
1.1.2　函数 …… 4
1.2　数列极限 …… 11
1.2.1　数列极限的定义 …… 11
1.2.2　收敛数列的性质 …… 13
1.3　函数的极限 …… 14
1.3.1　函数极限的概念 …… 14
1.3.2　函数极限的性质 …… 16
1.3.3　函数极限的运算法则 …… 17
1.4　极限存在准则与两个重要极限 …… 21
1.4.1　夹逼准则 …… 21
1.4.2　单调有界准则 …… 23
1.5　无穷小与无穷大 …… 26
1.5.1　无穷小 …… 26
1.5.2　无穷大 …… 27
1.5.3　无穷小的比较 …… 28
1.6　函数的连续性与间断点 …… 30
1.6.1　函数的连续性 …… 31
1.6.2　函数的间断点 …… 32
1.6.3　初等函数的连续性 …… 34
1.7　闭区间上连续函数的性质 …… 38
1.8　函数极限的 MATLAB 软件求解 …… 40
1.8.1　基本命令 …… 40
1.8.2　求解示例 …… 40

第 2 章　导数与微分 …… 44
2.1　导数的概念 …… 44
2.1.1　引例 …… 44
2.1.2　导数的定义 …… 46
2.1.3　导数的几何意义和物理意义 …… 47
2.1.4　函数可导性与连续性的关系 …… 48
2.1.5　利用导数定义求导数 …… 49

2.2 函数和、差、积、商的求导法则 …… 51
2.3 反函数的导数与复合函数的导数 …… 53
2.3.1 反函数的导数 …… 53
2.3.2 复合函数的求导法则 …… 54
2.3.3 基本初等函数的求导公式 …… 56
2.4 隐函数以及由参数方程确定的函数的导数 …… 57
2.4.1 隐函数的导数 …… 57
2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 …… 59
2.5 高阶导数 …… 61
2.6 函数的微分及其应用 …… 63
2.6.1 微分的定义和几何意义 …… 63
2.6.2 微分运算法则 …… 65
2.6.3 微分在近似计算中的应用 …… 67
2.7 导数与微分的 MATLAB 软件求解 …… 69
2.7.1 基本命令 …… 69
2.7.2 求解示例 …… 69

第 3 章 微分中值定理与导数的应用 …… 72
3.1 微分中值定理 …… 72
3.2 洛必达法则 …… 77
3.2.1 $\frac{0}{0}$型 …… 78
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型 …… 79
3.2.3 $\infty-\infty$型 …… 80
3.2.4 $0\cdot\infty$型 …… 80
3.2.5 $0^0,\infty^0,1^\infty$型 …… 81
3.3 泰勒公式 …… 83
3.4 函数单调性的判断、函数的极值 …… 85
3.4.1 函数增减性的判定 …… 86
3.4.2 函数的极值 …… 88
3.5 函数的最大值、最小值及其应用 …… 93
3.6 函数的凹凸性与拐点 …… 95
3.7 函数图形的描绘 …… 98
3.8 曲率 …… 100
3.9 导数应用的 MATLAB 软件求解 …… 104
3.9.1 基本命令 …… 104
3.9.2 求解示例 …… 104

第 4 章　不定积分 …… 110
4.1　不定积分的概念与性质 …… 110
4.1.1　原函数与不定积分的概念 …… 110
4.1.2　基本积分表 …… 111
4.1.3　不定积分的性质 …… 112
4.2　换元积分法 …… 114
4.2.1　第一类换元法(凑微分法) …… 114
4.2.2　第二类换元法 …… 117
4.3　分部积分法 …… 121
4.4　几种特殊函数的积分 …… 123
4.4.1　有理函数的不定积分 …… 123
4.4.2　三角函数有理式的不定积分 …… 125
4.4.3　可化为有理函数的不定积分 …… 126
4.5　不定积分的 MATLAB 软件求解 …… 127
4.5.1　基本命令 …… 127
4.5.2　求解示例 …… 127

第 5 章　定积分及其应用 …… 129
5.1　定积分的概念与性质 …… 129
5.1.1　引例 …… 129
5.1.2　定积分的定义 …… 131
5.1.3　定积分的性质 …… 133
5.2　微积分基本公式 …… 135
5.2.1　变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系 …… 135
5.2.2　积分上限的函数及其导数 …… 135
5.2.3　牛顿-莱布尼茨公式 …… 137
5.3　定积分的换元法与分部积分法 …… 139
5.3.1　定积分的换元法 …… 139
5.3.2　定积分的分部积分法 …… 140
5.4　广义积分 …… 143
5.4.1　无限区间上的广义积分 …… 143
5.4.2　无界函数的广义积分 …… 145
5.5　定积分的应用举例 …… 147
5.5.1　微元法 …… 147
5.5.2　平面图形的面积 …… 149
5.5.3　体积 …… 150
5.5.4　平面曲线的弧长 …… 151
5.5.5　物理应用举例 …… 152
5.6　定积分的 MATLAB 软件求解 …… 154

5.6.1 基本命令 …… 154
5.6.2 求解示例 …… 154

第 6 章 微分方程 …… 156
6.1 微分方程的基本概念 …… 156
6.2 可分离变量的微分方程 …… 158
6.3 齐次方程 …… 161
6.4 一阶线性微分方程 …… 163
6.4.1 一阶线性齐次微分方程的解法 …… 164
6.4.2 一阶线性非齐次微分方程的解法(常数变易法) …… 164
6.5 可降阶的高阶微分方程 …… 167
6.5.1 $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 167
6.5.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 167
6.5.3 $y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 168
6.6 二阶常系数齐次线性微分方程 …… 169
6.7 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 172
6.8 微分方程的 MATLAB 软件求解 …… 176
6.8.1 基本命令 …… 176
6.8.2 求解示例 …… 176

参考文献 …… 179

习题答案与提示 …… 180

第 1 章　函数与极限

初等函数的研究对象基本上是不变的量(称为常量),而高等数学的研究对象则是变动的量(称为变量).研究变量时,着重考察变量之间的依赖关系(即所谓的函数关系),并讨论当某个变量变化时,与它相关的量的变化趋势.这种研究方法就是所谓的极限方法.本章将介绍集合、函数、极限等基本概念和性质,利用极限研究函数的连续性,并介绍函数极限的 MATLAB 软件求解方法.

下面先提出一个应用实例问题,请大家应用本章相关知识点求解该问题.

应用实例:复利问题

复利,即利滚利,不仅是一个经济问题,而且是一个古老又现代的社会金融问题.随着社会经济的发展,复利计算日益普遍,同时复利的期限将日益变短,即不仅用年息、月息,而且用旬息、日息、半日息等表示利息.现在我们已进入电子商务时代,允许客户随时存款、取款,如果一个储户连续不断存款和取款,结算本息的频率无限增大,每次结算后将本息全部存入银行,这就意味着银行不断地向储户支付利息,称为连续复利问题.

若银行一年活期年利率为 1.5%,储户存 10 万元的人民币,如果银行允许储户在一年内可任意次结算.在不计利息税的情况下,由于复利,显然这比一年结算一次要多,因为多次结算增加了复利.结算越频繁,获利越大,连续复利会造成总结算额无限增大吗?随着结算次数的无限增加,一年后该储户是否会成为百万富翁?

(应用实例解答见本章末)

1.1　集合与函数

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中一个原始的基本概念,一般而言,集合就是指具有某种特定属性的事物的总体,或是某些特定对象的总汇.构成集合的事物或对象称为该集合的元素.集合可简称为集,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.元素可简称为元,通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.如果 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$,读作 a 属于 A;如果 a 不是集合 A 的元素,记为 $a\notin A$,读作 a 不属于 A.

一个集合一经给定,则对于任何事物或对象都能判定它是否属于该集合,若一个集合只含有限个元素,则称为有限集,否则即为无限集.

集合的表示方法有列举法和描述法.列举法就是将集合的主体元素一一列举出来,适合于表示有限集.例如,设 A 是由方程 $x^2-x-2=0$ 的根构成的集合,则 A 可表示为

$$A=\{-1,2\}.$$

又如,不超过 5 的正整数构成的集合 B 可表示为

$$B = \{1,2,3,4,5\}.$$

描述法是将集合 M 中元素所具有的共同属性描述出来，表示为

$$M = \{x \mid x \text{ 具有的共同属性}\}.$$

如前面所提到的集合 A 又可以表示为

$$A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}.$$

再如，xOy 平面内圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点的集合 C 可表示为

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

这是一个无限集. 一般情况下，无限集不适合用列举法表示.

将不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 例如，方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根构成的集合就是一个空集，即

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, \text{且 } x \text{ 为实数}\} = \varnothing.$$

应该注意，空集 $\varnothing$ 不能与仅含元素“0”的集合$\{0\}$相混淆.

习惯上，用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数构成的集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的集合，用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合. 在相应字母右上角加“+”表示该集合是正数构成的集合，加“*”表示该集合中不含数“0”.

子集是一个常用的概念. 如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”；如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$；如果 $A \subset B$ 但 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subsetneqq B$. 这样就有 $\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

规定，空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

集合之间的三种基本运算为：并、交、差.

设 A,B 是两个集合，由 A 与 B 中的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，简称“并”，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由集合 A 与 B 中所有共有元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，简称为“交”，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，简称为“差”，记为 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若集合 A 为集合 I 的子集，则由属于 I 而不属于 A 的所有元素构成的集合 $I\backslash A$ 称为 A 的余集或补集，记为 A^C.

设 A,B,C 为三个任意集合，如下运算律成立：

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(2) **结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(3) **分配律** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

(4) **对偶律(德·摩根公式)** $(A\cup B)^C = A^C\cap B^C, (A\cap B)^C = A^C\cup B^C$.

这些结论都可以根据集合运算的定义结合集合相等的定义进行验证,请读者尝试自行推导,这里不作详细证明.

3. 区间和邻域

实数集中一类特殊的子集就是区间,通常用区间表示一个变量的变化范围.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a 和 b 为开区间 (a,b) 的端点,$a\notin(a,b)$,且 $b\notin(a,b)$.

类似地,可以定义闭区间 $[a,b]$ 为

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 为闭区间 $[a,b]$ 的端点,$a\in[a,b]$,且 $b\in[a,b]$;

两种半开半闭区间

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},\quad 端点\ a\in[a,b),b\notin[a,b);$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},\quad 端点\ a\notin(a,b],b\in(a,b].$$

以上四种形式的区间长度均为 $b-a$,因此都是有限区间. 此外,还有五种形式的无限区间. 引入符号 $+\infty$ 及 $-\infty$,分别读作正无穷大和负无穷大,则五种无限区间的定义如下

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}\quad(\text{即实数集 }\mathbf{R}).$$

以后在不需要特别说明所讨论的区间是否包含端点以及是否为有限区间时,就简单地称其为区间,常用字母 I 表示.

区间中的一类特例就是邻域.

设 a 与 δ 为实数,且 $\delta>0$,数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,其中 a 为邻域的中心,δ 为邻域的半径. 由于 $|x-a|<\delta$ 就是 $a-\delta<x<a+\delta$,所以

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

或

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

当不需要考虑邻域半径的大小时,也可以将其简记为 $U(a)$.

有时为了讨论问题的需要,需要将邻域的中心点 a 去掉,得到点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

事实上，去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$就是$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$的并，即$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，所以也将区间$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$分别称为点$a$的左$\delta$邻域和点$a$的右$\delta$邻域.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

在一个自然现象或某个研究过程中，往往同时存在若干个变量在变化，这些变量的变化通常相互联系，并遵循着一定的变化规律. 这里先就两个变量的情形举几个例子.

例 1 一个边长为x的正方形的面积为

$$A=x^2,$$

这就是两个变量A与x之间的关系. 当边长x在区间$(0,+\infty)$内任取一值时，由上式即可以确定一个正方形的面积值A.

例 2 一个物体以初速度v_0做匀加速运动，加速度为a，经过时间间隔t后，物体的速度为

$$v=v_0+at,$$

这里开始计时记$t=0$，此时初速度v_0及加速度a是常数，根据变量v与t之间的关系，当时间变量t在区间$[0,T]$上任取一个值时，就可以确定在这个时刻t物体的速度v的值.

例 3 在半径为R的圆中作内接正n边形.

由图 1-1 可得正n边形的周长l_n与边数n之间的关系为

$$l_n=2nR\sin\frac{\pi}{n}.$$

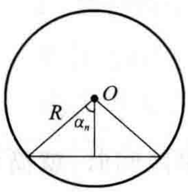


图 1-1

$\alpha_n=\dfrac{\pi}{n}$，当n在 3,4,5,… 自然数集中任取一个值时，由上式可得到对应内接正n边形的周长l_n.

在以上例子中都给出了两个变量之间的对应关系，当其中一个变量在其取值范围内任取一个值时，另一个变量依照对应规则有一个确定的值与之对应. 这两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 设D是一个非空数集，如果对每一个变量$x\in D$，变量y按照一定的对应规则f总有唯一确定的数值与之对应，则称f为x的函数，记作$y=f(x)$. x称为自变量，y称为因变量，集合D称为函数的定义域.

对于$x_0\in D$，对应的值记为y_0或$f(x_0)$，称为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值. 当x取遍D中的一切值时，对应函数值构成的集合

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

称为函数的值域. 目前我们的研究对象仅限于定义域和值域均为实数集的实函数.

函数$y=f(x)$中表示对应规则的记号f常用其他字母，如F,g,G等.

在实际问题中，函数的定义域由实际意义确定，在例 1 中定义域为开区间$(0,+\infty)$，在例 2 中定义域为闭区间$[0,T]$，在例 3 中函数的定义域为不小于 3 的自然数集$\{n\mid n\geqslant 3\}$.

在不需要考虑实际意义的函数中，约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 例如，函数 $y=x$ 的定义域是实数集 $(-\infty,+\infty)$；函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-1,1]$；函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 这种定义域称为函数的自然定义域.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，在平面直角坐标系中，自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像.

下面看几个函数及其图像的例子.

例 4 常值函数 $y=c$ 中，c 是一常数，其定义域为实数集，对任意实数 x，y 都取唯一确定的值 c 与之对应，因此函数的图像为一条水平直线. 当 $c>0$ 时，函数 $y=c$ 的图像如图 1-2 所示.

例 5 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，其图像如图 1-3 所示.

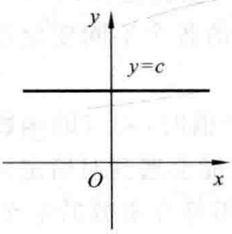


图 1-2

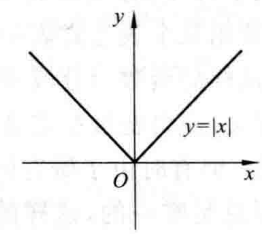


图 1-3

例 6 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图像如图 1-4 所示，对于任意 x，总有 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

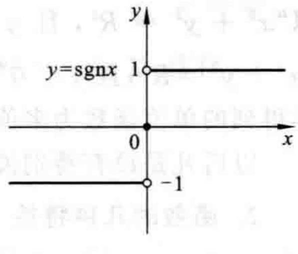


图 1-4

例 7 取整函数 $y=[x]$，表示 y 取不超过 x 的最大整数. 如 $[-3.5]=-4$，$[-1]=-1$，$\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$，$[\pi]=3$，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-5 所示.

例 8 函数

$$y=\begin{cases}2x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域 $D=[0,2]$，值域 $W=[0,3]$，其图像如图 1-6 所示.

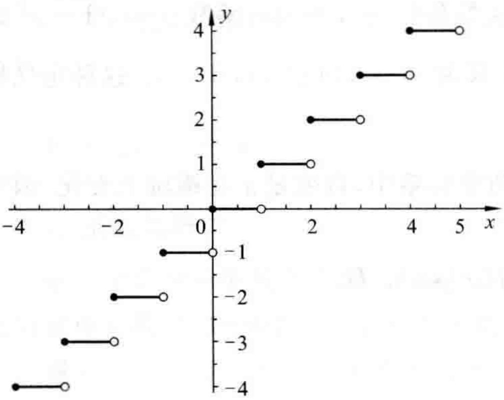


图 1-5

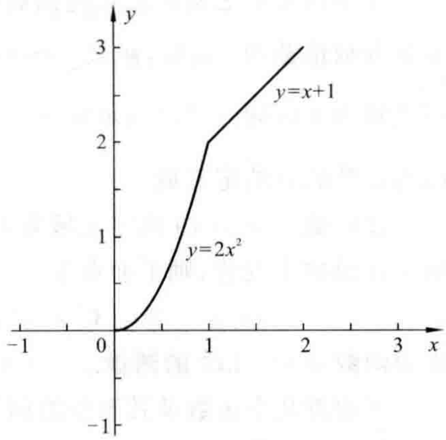


图 1-6

当然,并非所有函数都可以作出对应的图形.

例 9　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{0,1\}$. 显然这个函数不能用几何图形表示出来.

由以上几个例子可知,有些函数在自变量的不同变化范围内对应法则是不一样的. 因此,一个函数需要用几个表达式表示,但在自变量的各个不同变化范围内,函数值是唯一确定的,通常称这样的函数为分段函数.

根据函数的定义,当自变量在定义域内任取一个值时,对应的函数值只有一个,这种函数称为单值函数. 但有时由于研究问题的需要,可能会遇到对给定的对应法则,对应自变量的函数值并不总是唯一的,这样的对应法则并不符合函数的定义. 为讨论问题方便起见,称这种法则确定了一个多值函数,下面看一个多值函数的例子.

例 10　方程 $x^2+y^2=R^2$,当 $R>0$ 时,在直角坐标系中表示一个圆心在原点,半径为 R 的圆. 由这个方程所确定的对应法则,对每个 $x\in[-R,R]$,可以确定对应的 y 值,当 $x=R$ 或 $-R$ 时,y 有唯一确定的值 $y=0$ 与之对应,但对 $(-R,R)$ 内任一值 x,对应的 y 值有两个,因此这个方程确定了一个多值函数.

多值函数通常被分为若干个单值函数. 如在例 10 中的多值函数在附加一定条件后即以"$x^2+y^2=R^2$,且 $y\geqslant 0$"作为对应法则就可得到单值函数 $y=\sqrt{R^2-x^2}$;以"$x^2+y^2=R^2$,且 $y\leqslant 0$"作为对应法则就可得到另一个单值函数 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$,称这样得到的单值函数为多值函数的单值分支.

以后凡是没有特别说明,函数都是指单值函数.

2. 函数的几种特性

1) 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的. 单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

函数的单调性会随区间的变化而改变. 例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的函数,但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

2) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$,总有

$$f(-x)=f(x)\quad (\text{或 } f(-x)=-f(x))$$

成立,则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

几何上,偶函数的图像关于纵轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

函数 $y=x^2+1, y=\cos x, y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 皆为偶函数;

函数 $y=x^2\sin x, y=\dfrac{x}{1+x^2}, y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 皆为奇函数;

函数 $y=\sin x+\cos x$ 及 $y=x+x^2$ 既非奇函数,也非偶函数.

3) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对任一 $x\in D$,有 $(x\pm l)\in D$,且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的一个周期,通常所说的周期函数的周期是指最小正周期. 例如,函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y=\sin\omega t\ (\omega\neq 0)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数.

从几何上看,一个周期为 l 的周期函数,在每个长度为 l 的区间上,函数图形有相同的形状.

事实上,并不是每个周期函数都有最小正周期,狄利克雷函数就属于这种情形. 由

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C.\end{cases}$$

不难验证,任何有理数都是 $D(x)$ 的周期,所以狄利克雷函数是一个以所有有理数为周期的周期函数,因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

4) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 k,使得对任一 $x\in X$,总有

$$f(x)\leqslant k\quad (\text{或 } f(x)\geqslant k)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界(或下界),k 为 $f(x)$ 的一个上界(或下界).

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内既有上界也有下界,显然,1 是它的一个上界,大于 1 的常数也是它的上界;类似地,-1 以及小于 -1 的常数都是它的下界. 又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有下界但没有上界. 事实上, 1 以及小于 1 的常数都可以作为 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内的下界,但当 x 接近于 0 时,不存在常数 k,使 $\dfrac{1}{x}\leqslant k$ 成立.

如果存在正的常数 M,使得对任一 $x \in X$,总有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界,如果不存在这样的常数 M,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 也就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_0 \in X$,使得 $|f(x_0)| > M$,那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如,函数 $y = \sin x, y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$ 是有界的,因为对任一 $x \in \mathbf{R}$,总有 $|\sin x| \leqslant 1, \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$;函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间$(1, +\infty)$ 内是有界的,而在区间$(0,1)$ 内则是无界的.

容易证明,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

此外,在几何上,在 X 上有界的函数 $y = f(x)$ 的图形会夹在关于 x 轴对称的带形区域内.

3. 反函数和复合函数

在同一变化过程中存在函数关系的两个变量之间,究竟哪一个是自变量,哪一个是因变量,并不是绝对的,这要视具体问题而定.

一般地,设 $y = f(x)$ 为给定的一个函数,D 为其定义域,W 为值域. 如果对其值域 W 中的任何一值 y,有唯一的 $x \in D$,使 $f(x) = y$,于是可得到一个定义在 W 上的以 y 作为自变量,x 作为因变量的函数,称之为 $y = f(x)$ 的反函数,记为

$$x = f^{-1}(y),$$

也就是说,反函数 f^{-1} 的对应法则完全由函数 f 所确定,所以反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 W,值域为 D. 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 而言,原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

若函数 $y = f(x)$ 是单值单调函数,那么其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 必定存在,且也是单值单调函数. 事实上,若 $y = f(x)$ 是单调函数,则任取其定义域 D 上两个不同的值 $x_1 \neq x_2$,必有 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$,且 $y_1 \neq y_2$,所以在其值域 W 上任取一值 y_0 时,D 上不可能有两个不同的值 x_1 及 x_2,使得 $f(x_1) = f(x_2) = y_0$,所以此时,反函数 $x = f^{-1}(y)$ 必定存在且是单值函数.

若函数 $y = f(x)$ 在 D 上又是单调的,容易证明 $x = f^{-1}(y)$ 也是单调的. 不妨设 $y = f(x)$ 在 D 上是单调增加的. 下面证明 $x = f^{-1}(y)$ 在 W 上也是单调增加的.

任取 $y_1, y_2 \in W$,且 $y_1 < y_2$,按照函数 f 的定义,对 y_1,在 D 内存在唯一的 x_1,使 $f(x_1) = y_1$,于是 $x_1 = f^{-1}(y_1)$;对 y_2,在 D 内存在唯一的 x_2,使 $f(x_2) = y_2$,于是 $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

若 $x_1 > x_2$,由 $f(x)$ 单调增加,则必有 $y_1 > y_2$;若 $x_1 = x_2$,则有 $y_1 = y_2$. 这两种情形都与假设 $y_1 < y_2$ 不符. 所以必有 $x_1 < x_2$,也就是说 $x = f^{-1}(y)$ 在 W 上是单调增加的.

若 $y = f(x)$ 仅为单值函数,则考虑其反函数时有可能出现多值函数的情形. 例如,函数 $y = x^2$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$ 内为单值函数,在其值域$[0, +\infty)$ 上任取一值 y,当 $y \neq 0$ 时,适合关系 $x^2 = y$ 的 x 的值就有两个,即 $x = \sqrt{y}$ 和 $x = -\sqrt{y}$,但因为 $y = x^2$ 在区间$[0, +\infty)$ 上是单调增加的,所以 $y = x^2$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 时的反函数是单值且单调

增加的函数 $x=\sqrt{y}$.

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数通常写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$. 当把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形放在同一个坐标系中，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示.

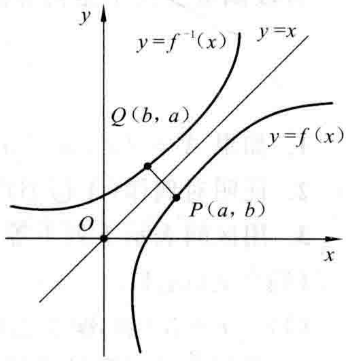


图 1-7

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，当 $W_2\subset D_1$ 时，对每个 $x\in D_2$，有变量 $u\in W_2$ 与之对应，又由于 $W_2\subset D_1$，所以对于这个 u 又有变量 y 与之对应，这样，对每一个 $x\in D_2$，通过 u 有唯一确定的 y 与之对应，因此得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 就是由函数 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，这也正是函数 $u=\sin x$ 的定义域.

但复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域有时并不是与函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域完全相同. 例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_1=[0,+\infty)$，而 $u=1-x^2$ 的定义域 $D_2=(-\infty,+\infty)$，值域 $W_2=(-\infty,1]$，显然 W_2 并不符合 $W_2\subset D_1$ 的要求，但由于 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$，所以适当限制 x 的取值范围为 $[-1,1]$，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 才能复合成一个复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$.

另外，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 是不能进行复合的，因为对于 $u=2+x^2$，对任一定数 x 总有 $u\geqslant 2$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成. 如函数 $y=\ln\sqrt{1+x^2}$ 就是由函数 $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=1+x^2$ 三个函数复合而成的，其中 u 和 v 都是中间变量.

4. 初等函数

下列五类函数统称为基本的初等函数.

幂函数 $y=x^{\mu}$ ($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)；

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，当 a 为无理数 e 时，记 $y=\ln x$；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 等；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 等.

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合而构成，并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln\sqrt{1+x^2}$，$y=\sin^2 x$ 等都是初等函数，在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数，而诸如这种函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2.\end{cases}$$