"十三五"国家重点出版物出版规划项目

名校名家基础学科系列
Textbooks of Base Disciplines from Top Universities and Experts

理论力学

THEORETICAL MECHANICS

冯维明 主编 / 冯维明 刘广荣 李文娟 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

名校名家基础学科系列
Textbooks of Base Disciplines from Top Universities and Experts

理论力学

冯维明　主编
冯维明　刘广荣　李文娟　编著

机械工业出版社

本教材是为适应新世纪科学技术的发展和教学改革的需要，吸收国内外教材的优点，结合近几年的教学实践和教学改革成果而编写的。为适应目前教学课时数大幅减少的现状，在不降低基本要求的前提下，编者对课程体系进行了较大幅度的改革与创新，将教材由传统的三篇改为运动学、动力学两篇，静力学内容作为动力学的基础和特例放在动力学相应的章节中讲授，从而提高了起点、节省了授课学时，提高了教学效率。

运动学部分共分四章，主要内容为点的运动学、刚体的简单运动、点的合成运动及刚体的平面运动。动力学部分为九章，主要内容为刚体动力学的基本概念、力系的简化与平衡、质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理、虚位移原理及动力学普遍方程、机械振动基础。本教材在内容上力求达到重点突出、条理清晰、结构紧凑、叙述严谨，对较深的提高性的内容，则抓住实质和特点做精炼的陈述。本教材还精选了例题和习题，注重启发式教学，给学生留有充足的思考空间。

本教材可作为工科高等院校本科各专业及高职高专各专业的理论力学中学时教科书，也可供职业大学和成人教育学院师生及有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学/冯维明主编. —北京：机械工业出版社，2017.12
“十三五”国家重点出版物出版规划项目. 名校名家基础学科系列
ISBN 978-7-111-58663-0

Ⅰ.①理… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 300895 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：姜 凤 责任编辑：姜 凤 李 乐 责任校对：陈 越
封面设计：鞠 杨 责任印制：张 博
三河市国英印务有限公司印刷
2018 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 18.75 印张 · 452 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-58663-0
定价：43.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

主编简介

冯维明 山东大学教授/博士，博士生导师。先后获得原山东工业大学一般力学理学学士学位、固体力学工学硕士学位和山东大学工程力学工学博士学位。现任中国自动化学会空间与运动体控制专业委员会委员，华东基础力学与应用协会副理事长，《力学与实践》编委。

主要从事动力学与控制、航天飞行动力学最优控制、非线性振动等方面的研究，曾主持和参与相关的国家自然科学基金和国家高科技863资助项目10余项。长期从事一线教教学，同时主讲材料力学、理论力学、工程力学、实验力学、复合材料力学、高等动力学和轨道动力学等课程。曾主持省、部级教学研究项目4项；主持省级精品课程理论力学和材料力学。作为主编正式出版教材7部。

曾获宝钢优秀教师奖、全国徐芝纶力学优秀教师奖；曾获山东大学爱岗敬业十大模范人物称号、山东大学首届“学生最喜爱的老师”称号，三次获山东大学优秀教师称号。主编教材《工程力学》获山东省高校优秀教材一等奖，主编教材《理论力学》获山东省高校优秀教材二等奖。

前　言

为适应新世纪科学技术的发展和教学改革的需要，编者在近几年取得的教学改革成果的基础上，结合各位同仁多年教学的实践经验，参照最新的《理论力学课程教学基本要求》，编写了本教材。编者一方面考虑到学生的入学水平逐年提高及前期课程扎实的理论基础；另一方面兼顾在我国高等教育的发展与改革中，学校的数量与类型增多，对课程提出了不同层次的要求；同时结合理论力学课程的学时不断压缩的实际情况，本着“提高起点，降低重心”的原则，对原有经典内容进行了改革，在课程内容的取舍和构造方式上，具有针对性、应用性和综合性。编者积极引入面向21世纪的新内容，并在一定程度上消除了大学物理中力学部分与理论力学之间的重叠内容。在不降低基本要求的前提下，对课程体系进行了较大幅度的改革与创新，把教材由传统的三篇改为运动学、动力学两篇，静力学内容放在动力学相应的章节中讲授。此前，按这种体系改革的教材编者已使用多届，取得了良好的教学效果，明显节省了学时，提高了教学效率，得到了各高校众多师生的认同。

本教材第1篇为运动学部分。该篇分为四章，其主要内容为：点的运动学、刚体的简单运动、点的合成运动及刚体的平面运动。本教材以矢量数学作为工具，使理论力学基本概念的数学描述更为简洁，点的速度、加速度在直角坐标轴上的投影已在物理学中涉及，可作复习性讲授，重点讲授自然轴系的生成、点的加速度在自然轴上的投影；以矢量表示角速度、角加速度，以矢量积表示定轴转动刚体上任一点的速度、加速度；用矢量直接推导动系为转动时点的加速度合成定理，与从传统教材静力学导入相比，显然提高了起点。让学生一开始就涉及高等数学中的微积分知识，容易引起他们的兴趣和学习的主动性，为学好后续内容奠定了基础。考虑到矢量运算的重要性，编者在附录中新增“矢量分析”一节，叙述了矢量的概念和基本运算，可供对矢量分析知识薄弱的读者选学。其次，运动学研究物体运动的几何性质，而不考虑物体运动的原因，因此将静力学问题放到其后的动力学中讲授，对运动学的讲授没有任何影响。

第2篇为动力学部分。该篇分为九章，其主要内容为：刚体动力学的基本概念、力系的简化与平衡、质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理、虚位移原理及动力学普遍方程和机械振动基础。

静力学问题原本就是动力学问题的一个特例，它的分析方法（如力的投影、合成、分解及平衡）也是动力学分析的基础，将原静力学问题回归到动力学中，并作为其基础叙述，使此部分知识更容易融会贯通、易教易学。静力学内容在动力学中是这样处理的：力、力偶的概念和性质、力的投影与分解、约束和约束力、受力分析等，作为动力

学基本概念放在第 5 章中讲授。力系的简化与平衡在第 6 章讲授，为强化基本概念，让学生对问题有一个全局的认识，编者采取了从特殊到一般再到特殊的方法引入基本概念。首先介绍了空间汇交力系和力偶系的简化与平衡这一特殊问题，而后引入的空间任意力系的简化结果即为前两个问题的简化，其平衡方程也为前两个问题平衡方程的综合。对特殊情形下的力系，如平面任意力系、平行力系等，可根据其限制条件方便地得出相应的平衡方程。本章还讨论了系统的平衡、摩擦平衡及重心问题。

第 7 章至第 10 章分别对质点动力学、动量定理、动量矩定理和动能定理进行了讨论。上述内容应作为中低学时所应涉及的主要内容。

第 11 章至第 13 章介绍了达朗贝尔原理、虚位移原理及动力学普遍方程和机械振动基础，对此类较深的、提高性的内容，则抓住实质和特点做精炼的陈述。教师可根据授课学时掌握讲授内容。

本教材在每一章结尾增加了小结，小结内容分为本章基本要求、本章重点、本章难点和学习建议四个部分，目的是为了读者在学习本章的过程中，能对该章的主要内容有一个系统的认识和梳理，为按教学大纲的要求迅速掌握该章知识要点提供了方便。每章后都附有难易不等的大量习题，读者可根据自身情况选做。

本教材力求做到重点突出，条理清晰，结构紧凑，叙述严谨。此前，本教材作为自编教材曾在山东大学和国内部分高校使用多年，取得了满意的效果。今编者对部分内容进行了调整，使之更趋于合理，对教材中的符号均按国家最新标准处理。

参加本教材编写工作的有：刘广荣（第 1 章至第 4 章）、冯维明（第 5 章至第 7 章、第 12 章、第 13 章和附录 A 至附录 C）、李文娟（第 8 章至第 11 章、附录 D）。书中插图全部由冯维明绘制。总体框架、前言和全书的统稿由冯维明负责。

山东大学工程力学系部分教师对本书的构思、编辑提出了宝贵的意见，本教材作为省级和校级教学改革项目的一部分得到了相关部门的支持与资助，编者在此谨表深深的谢意。

由于编者水平有限，欠妥之处在所难免，恳请同行及读者指正。

编　者

2018 年于山东大学

主要符号表

$\boldsymbol{a}$	加速度
$\boldsymbol{a}_n$	法向加速度
$\boldsymbol{a}_t$	切向加速度
$\boldsymbol{a}_a$	绝对加速度
$\boldsymbol{a}_r$	相对加速度
$\boldsymbol{a}_e$	牵连加速度
$\boldsymbol{a}_C$	科氏加速度
A	面积
c	阻尼系数
C	质心，重心，截面形心
f	动摩擦因数，频率
f_s	静摩擦因数
$\boldsymbol{F}$	力
$\boldsymbol{F}_R$	主矢，合力
$\boldsymbol{F}_s$	静滑动摩擦力
$\boldsymbol{F}_T$	柔性约束力
$\boldsymbol{F}_N$	法向约束力
$\boldsymbol{F}_{Ie}$	牵连惯性力
$\boldsymbol{F}_{IC}$	科氏惯性力
$\boldsymbol{F}_I$	惯性力
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
h	高度
$\boldsymbol{i}$	x 轴的单位矢量
$\boldsymbol{I}$	冲量
$\boldsymbol{j}$	y 轴的单位矢量
J_z	刚体对 z 轴的转动惯量
J_C	刚体对质心 C 的转动惯量
k	弹簧刚度系数
$\boldsymbol{k}$	z 轴的单位矢量
l	长度
$\boldsymbol{L}_O$	刚体对点 O 的动量矩
$\boldsymbol{L}_C$	刚体对质心 C 的动量矩
m	质量
M_z	对 z 轴的矩
$\boldsymbol{M}$	力偶矩，主矩
$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩
$\boldsymbol{M}_I$	惯性力的主矩
n	质点数，转数
O	参考坐标系的原点
$\boldsymbol{p}$	动量
P	功率
q	载荷集度，广义坐标
R，r	半径
$\boldsymbol{r}$	矢径
$\boldsymbol{r}_O$	点 O 的矢径
$\boldsymbol{r}_C$	质心的矢径
s	弧坐标
t	时间
T	动能，周期
$\boldsymbol{v}$	速度
$\boldsymbol{v}_a$	绝对速度
$\boldsymbol{v}_r$	相对速度
$\boldsymbol{v}_e$	牵连速度
$\boldsymbol{v}_C$	质心速度
V	势能，体积
W	重量，力的功
α	角加速度
β	角度坐标
δ	对数减缩
$\mathrm{\delta}$	变分符号
ζ	阻尼比
η	减缩因数

λ	本征值，频率比	ω_n	固有频率
ρ	密度，曲率半径，回转半径	ω	角速度
φ	角度坐标	ω_a	绝对角速度
φ_m	摩擦角	ω_r	相对角速度
ψ	角度坐标	ω_e	牵连角速度
γ	角度坐标		

目 录

绪论

理论力学是研究物体的机械运动一般规律的科学。

机械运动是指物体的空间位置随时间的变化。物体的平衡是机械运动的特殊形式，也是理论力学研究的内容。理论力学以伽利略、牛顿基本定律为基础，属于古典力学的范畴。本课程研究的是速度远小于光速的宏观物体的机械运动，至于速度接近于光速或微观粒子的运动，则必须用相应的相对论力学或量子力学进行分析研究。古典力学虽然有一定的局限，但在现代科学技术中仍被广泛应用，其计算精度能够满足工程实际的需要。

根据循序渐进的认识规律，本书将理论力学的内容分为运动学和动力学两部分。

运动学研究物体运动的几何性质，如运动方程、运动轨迹、速度和加速度等，而不考虑引起物体运动的原因。

动力学研究物体的受力分析，作用于刚体上的力系的简化及物体的运动与所受作用力之间的关系，也研究物体的平衡规律，即物体平衡时力系所应满足的条件。

理论力学的研究，应遵循**实践—理论—实践**的认识规律。对工程实践中的具体问题，在观察、分析的基础上，透过表象抓住本质，经过抽象建立力学模型。根据掌握的基本理论，经过逻辑推理和数学演绎，建立起相应的运动微分方程或方程组，然后将已知数据代入数学方程，得出计算结果。**实践是检验真理的唯一标准**。若结果在实践中证明正确，就直接证明了理论的正确性。如证明错误，除反复验证外，应考虑采用其他理论或发展形成其他新的学科理论。

从实践中总结、归纳、创造理论，再把理论应用到实践中，只有当理论符合客观实际时，才能证明理论是正确的，只有这样的理论才有实际意义。

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。通过对该课程的学习，既可以应用所学理论解决工程实际问题，又可以为材料力学、结构力学、弹性力学、流体力学、机械原理、机械零件等后续课程及有关的专业课程提供重要的理论基础。另外，通过理论力学的学习还有助于树立辩证唯物主义世界观，培养逻辑思维，提高分析问题和解决问题的能力。

第1篇　运　动　学

引　言

运动学不考虑被研究物体的质量和所受的作用力，只研究物体运动的几何性质。因此，**运动学是研究物体机械运动的几何性质的科学**。当物体的尺寸与它的运动范围相比微不足道时，如地球在太阳系中的运动或人造地球卫星相对地球的运动，可作为一个几何点来研究。**在力的作用下，物体内任意两点之间的距离始终保持不变**，这种物体称为刚体。刚体可看作无数个点的组合。点与不计质量的刚体是运动学的两个力学模型，因此运动学又分为点的运动学和刚体的运动学两部分。

物体在空间的位置随时间的改变称为机械运动。世界上的一切物质都是运动的，即运动是绝对的。为了观察或描述物体的运动，观察者必须依附于某一物体上，如人既可以站在岸上观察或描述在海面上行驶中的轮船的运动，也可以坐在另一艘行驶的轮船上观察或描述其运动，观察者所依附的物体称为**参考体**，固结于其上的坐标系称为**参考系**。如果物体相对所选参考体的位置发生改变，该物体就处于运动状态；在相反情况下，物体则处于静止状态。实质上，物体的运动或静止是对所选参考体的一个相对概念。由于在运动学里不考虑物体的质量和力的作用，可以任选参考体和参考坐标系。

机械运动是在空间伴随时间而发生的，空间和时间在理论力学中被认为是绝对的，即空间是欧几里得三维空间；而时间在任何参考坐标系中均是相同的，与坐标系的运动无关，它是连续变化、均匀增长的自变量 t。绝对空间和绝对时间并不反映真实的空间和时间，当研究对象是宏观物体且它的运动速度远小于光速时，计算所产生的误差很小，足以满足工程实际的要求。

运动学不仅为研究动力学提供必要的基础，而且又有独立的意义，能够为分析机构的运动打好基础。例如，在机床设计中，首先要进行机构的运动分析，再考虑零部件的受力、强度和刚度问题等。而对一些零部件受力较小的仪表机构等，往往只进行运动分析就可以了。

在运动学中研究两个基本问题：①介绍点和刚体相对于参考坐标系的运动方程的建立方法，即确定点和刚体的空间位置随时间变化的规律的方法；②研究点和刚体的运动学几何特征，即点或刚体上点的运动方程、运动轨迹、速度、加速度和刚体转动的角速度、角加速度等。

第 1 章 点的运动学

点的运动学是研究一般物体运动的基础，又具有独立的应用意义。本章将研究点相对某一个参考系的位置随时间变化的规律，包括点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度等。

1.1 矢量法

1. 点的运动方程

在空间中运动的点简称为**动点**，用 M 表示。动点 M 的位置可用由固定点 O 指向点 M 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示，该矢量称为**动点 M 相对于定点 O 的矢径**（见图 1.1）。当动点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 随时间变化，而且是时间 t 的单值连续函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

式（1.1）被称为**矢量形式的运动方程**。

动点 M 即矢径端点，它在空间描绘的曲线称为**矢端曲线**，矢端曲线即为动点 M 的**运动轨迹**，如图 1.2 所示。

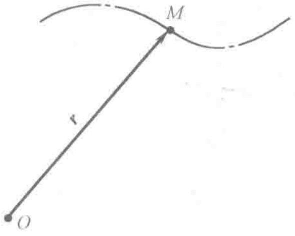

图 1.1

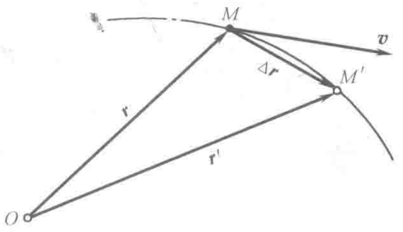

图 1.2

2. 点的运动速度

设瞬时 t 动点在 M 点，矢径为 $\boldsymbol{r}$，瞬时 $t+\Delta t$ 动点运动到 M'点，矢径为$\boldsymbol{r}'$，如图 1.2 所示。矢径在 Δt 内的增量 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 称为动点在 Δt 时间间隔内的位移。$\Delta\boldsymbol{r}$ 与其对应的时间间隔 Δt 的比值，称为动点 M 在 Δt 时间间隔内的**平均速度**。当 Δt 趋近于零时，平均速度的极限就是动点在瞬时 t 的**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

因此**动点的速度等于动点的矢径对时间的一阶导数**。它的方向沿轨迹上 M 点的切线方

向，其指向与运动的方向一致。在国际单位制中，速度的单位为 m/s（米每秒），也常用 km/h（千米每小时）、cm/s（厘米每秒）等。

3. 点的加速度

如图 1.3a、b 所示，将动点在不同瞬时的速度$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、…平行移动到同一起点 O_1（任选），以光滑曲线连接各速度端点 P_1、P_2、…，此曲线称为**速度矢端曲线**，简称**速度矢端图**，如图 1.3b 所示。从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻，动点由 M 点运动到 M'点，速度由$\boldsymbol{v}$ 变为$\boldsymbol{v}'$，速度的变化量是 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$，如图 1.3c 所示。$\Delta\boldsymbol{v}$ 与其对应的时间间隔 Δt 的比值称为动点 M 在 Δt 时间间隔内的**平均加速度**。当 Δt 趋近于零时，平均加速度的极限就是动点在瞬时 t 的**加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.3}$$

方向沿速度矢端图的切线方向，如图 1.3b 所示。因此，**点的加速度等于点的速度对时间的一阶导数，或等于点的矢径对时间的二阶导数**。国际单位制中，加速度的单位为 $\mathrm{m/s^2}$（米每二次方秒）。

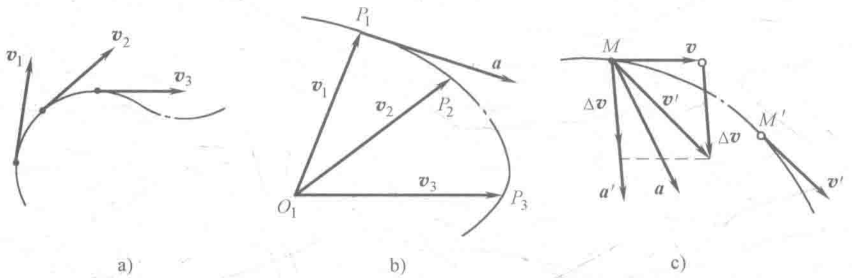

图 1.3

a）点沿轨迹的速度　b）速度矢端图　c）加速度分析

有时为了方便，在字母上方加上“·”表示该量对时间的一阶导数，加“··”表示该量对时间的二阶导数。因此式（1.2）和式（1.3）可表示为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.4}$$

1.2 直角坐标法

1. 点的运动方程和轨迹

如图 1.4 所示，以定点 O 为坐标原点，建立直角坐标系 $Oxyz$，动点 M 相对于点 O 的矢径在三个坐标轴上的投影就等于 M 点相应的坐标 x、y、z，设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为相应坐标轴的单位矢量，矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

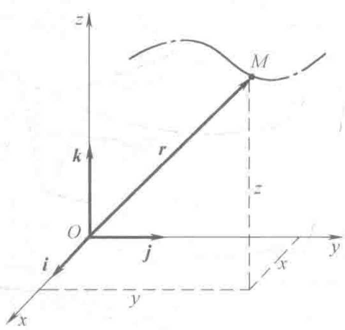

图 1.4

动点 M 在直角坐标系中运动时，相应坐标 x、y、z 可唯一确定它在空间的位置，并且是时间 t 的单值连续函数。利用式（1.5），可以将运动方程（1.1）写为

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t)\\ y&=f_2(t)\\ z&=f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

以上三式就是**直角坐标形式的运动方程**，也是以 t 为参数的点的轨迹方程。消去时间参数 t，可得动点 M 的轨迹方程。

2. 点的速度

将式（1.5）代入到式（1.2）中，由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为大小和方向都不变的恒矢量，因此得动点 M 的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

设动点 M 的速度在直角坐标轴上的投影分别为 v_x、v_y、v_z，则速度又可表示为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

显然

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\\ v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dot{y}\\ v_z&=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

因此可得结论，**点的速度在直角坐标轴上的投影分别等于其相应坐标对时间的一阶导数**。由此可得速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.10}$$

速度的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} \cos\langle\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{i}\rangle&=\frac{v_x}{v}\\ \cos\langle\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{j}\rangle&=\frac{v_y}{v}\\ \cos\langle\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{k}\rangle&=\frac{v_z}{v} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

3. 点的加速度

同理，式（1.7）对时间求一阶导数，得到点的加速度在直角坐标系中的表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1.12}$$

设动点 M 的加速度在直角坐标轴上的投影分别为 a_x、a_y、a_z，则加速度又可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.13}$$

显然，

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}=\dot{v}_x\\a_y&=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{y}=\dot{v}_y\\a_z&=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{z}=\dot{v}_z\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

因此可得结论：**点的加速度在直角坐标轴上的投影等于其相应的坐标对时间的二阶导数**。加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\tag{1.15}$$

加速度的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i}\rangle&=\frac{a_x}{a}\\\cos\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{j}\rangle&=\frac{a_y}{a}\\\cos\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{k}\rangle&=\frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\}\tag{1.16}$$

例 1.1 如图 1.5 所示，椭圆规的曲柄 OC 可绕定轴 O 转动，其端点 C 与规尺 AB 的中点以铰链相连接，规尺 AB 两端分别在相互垂直的滑槽中运动。已知：$OC=AC=BC=l$，$MC=a$，$\varphi=\omega t$。试求规尺上点 M 的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

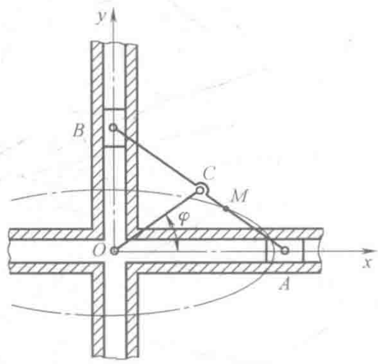

图 1.5 例 1.1 图

解：建立坐标系 Oxy 如图所示，点 M 的运动方程为

$$x=(OC+CM)\cos\varphi=(l+a)\cos\omega t$$

$$y=AM\sin\varphi=(l-a)\sin\omega t$$

消去时间 t，得轨迹方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1$$

由此可见，点 M 的轨迹是一个椭圆，长轴与 x 轴重合，短轴与 y 轴重合。动点 M 的速度在直角坐标轴上的投影为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega(l+a)\sin\omega t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\omega(l-a)\cos\omega t$$

故点 M 的速度大小为

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\\&=\sqrt{\omega^2\ (l+a)^2\ \sin^2\omega t+\omega^2\ (l-a)^2\ \cos^2\omega t}\\&=\omega\sqrt{l^2+a^2-2al\cos2\omega t}\end{aligned}$$

其方向余弦为

$$\cos\langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{i}\rangle=\frac{v_x}{v}=\frac{-(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos\langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{j}\rangle=\frac{v_y}{v}=\frac{(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos 2\omega t}}$$

动点 M 的加速度在直角坐标轴上的投影为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(l+a)\cos\omega t$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(l-a)\sin\omega t$$

故点 M 的加速度大小为

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\\&=\sqrt{\omega^4(l+a)^2\cos^2\omega t+\omega^4(l-a)^2\sin^2\omega t}\\&=\omega^2\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}\end{aligned}$$

其方向余弦为

$$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{i}\rangle=\frac{a_x}{a}=\frac{-(l+a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{j}\rangle=\frac{a_y}{a}=\frac{-(l-a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}}$$

例 1.2　动点的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\omega t\\y&=r\sin\omega t\\z&=h\,\frac{\omega t}{2\pi}\end{aligned}\right\}$$

式中，r、ω、h 都是常数，试分析动点的运动轨迹、速度和加速度。

解： 为了求出动点的轨迹，将运动方程中的前两式平方后相加，则得

$$x^2+y^2=r^2$$

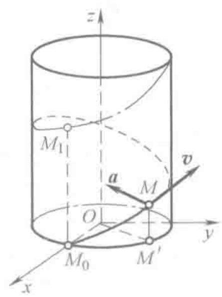

图 1.6　例 1.2 图

这就说明，动点是在半径为 r 的圆柱面上运动，如图 1.6 所示。由运动方程得知：当$t=0$时，$x=r$，$y=z=0$，可见动点初瞬时是位于 Ox 轴与圆柱面的交点 M_0。当时间从零开始增加时，x 的值逐渐减小，y 的值及 z 的值逐渐增大，当 $\omega t=\dfrac{\pi}{2}$时，$x=0$，$y=r$，$z=\dfrac{h}{4}$。时间再增加，x 的绝对值又开始增加，y 的值又逐渐减小，当 $\omega t=\pi$ 时，动点的坐标变为 $x=-r$，$y=0$，$z=\dfrac{h}{2}$。当 $\omega t=2\pi$ 时，动点的坐标变为 $x=r$，$y=0$，$z=h$，这时动点回到经过起点 M_0的圆柱面母线上一点 M_1，且 $M_0M_1=h$。此后动点每转一周即沿母线增高 h。由此可见，动点的轨迹是一条半径为 r、螺距为 h 的