

王梓坤文集

李仲来 主编

07



随机过程通论及其 应用 (下卷)

王梓坤 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

王梓坤文集 | 李仲来 主编

07

随机过程通论及其 应用 (下卷)

王梓坤 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

随机过程论及其应用. 下卷/王梓坤著; 李仲来主编.
—北京: 北京师范大学出版社, 2018.8
(王梓坤文集; 第7卷)
ISBN 978-7-303-23667-1

I. ①随… II. ①王… ②李… III. ①随机过程—研究生—教材 IV. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 091255 号

营 销 中 心 电 话 010-58805072 58807651
北师大出版社高等教育与学术著作分社 <http://xueda.bnup.com>

Wang Zikun Wenji

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 鸿博昊天科技有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 890 mm × 1240 mm 1/32
印 张: 14.25
字 数: 320 千字
版 次: 2018 年 8 月第 1 版
印 次: 2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价: 78.00 元

策划编辑: 谭徐锋 岳昌庆
美术编辑: 王齐云
责任校对: 陈 民

责任编辑: 岳昌庆
装帧设计: 王齐云
责任印制: 马 洁

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58805079

前 言

王梓坤先生是中国著名的数学家、数学教育家、科普作家、中国科学院院士。他为我国的数学科学事业、教育事业、科学普及事业奋斗了几十年，做出了卓越贡献。他是中国概率论研究的先驱者，是将马尔可夫过程引入中国的先行者，是新中国教师节的提出者。作为王先生的学生，我们非常高兴和荣幸地看到我们敬爱的老师8卷文集的出版。

王老师于1929年4月30日（农历3月21日）出生于湖南省零陵县（今湖南省永州市零陵区），7岁时回到靠近井冈山的老家江西省吉安县枫墅村，幼时家境极其贫寒。父亲王肇基，又名王培城，常年在湖南受雇为店员，辛苦一生，受教育很少，但自学了许多古书，十分关心儿子的教育，教儿子背古文，做习题，曾经凭记忆为儿子编辑和亲笔书写了一本字典。但父亲不幸早逝，那年王老师才11岁。母亲郭香娥是农村妇女，勤劳一生，对人热情诚恳。父亲逝世后，全家的生活主要靠母亲和兄嫂租种地主的田地勉强维持。王老师虽然年幼，但帮助家里干各种农活。他聪明好学，常利用走路、放牛、车水的时间看书、算题，这些事至今还被乡亲们传为佳话。

王老师幼时的求学历程是坎坷和充满磨难的。1940年念完初小，村里没有高小。由于王老师成绩好，家乡父老劝他家长送他去固江镇县立第三中心小学念高小。半年后，父亲不幸去

世，家境更为贫困，家里希望他停学。但他坚决不同意并做出了他人生的第一大决策：走读。可是学校离家有十里之遥，而且翻山越岭，路上有狼，非常危险。王老师往往天不亮就起床，黄昏才回家，好不容易熬到高小毕业。1942年，王老师考上省立吉安中学（现江西省吉安市白鹭洲中学），只有第一个学期交了学费，以后就再也交不起了。在班主任高克正老师的帮助下，王老师申请缓交学费获批准，可是初中毕业时却因欠学费拿不到毕业证，更无钱报考高中。幸而学长王寄萍出资帮助，才拿到了毕业证并且去县城考取了国立十三中（现江西省泰和中学）的公费生。这事发生在1945年。他以顽强的毅力、勤奋的天性、优异的成绩、诚朴的品行，赢得了老师、同学和亲友的同情、关心、爱护和帮助。母亲和兄嫂在经济极端困难的情况下，也尽力支持他，终于完成了极其艰辛的小学、中学学业。

1948年暑假，在长沙有5所大学招生。王老师同样没有去长沙的路费，幸而同班同学吕润林慷慨解囊，王老师才得以到了长沙。长沙的江西同乡会成员欧阳伯康帮王老师谋到一个临时的教师职位，解决了在长沙的生活困难。王老师报考了5所学校，而且都考取了。他选择了武汉大学数学系，获得了数学系的两个奖学金名额之一，解决了学费问题。在大学期间，他如鱼得水，在知识的海洋中遨游。1952年毕业，他被分配到南开大学数学系任教。

王老师在南开大学辛勤执教28年。1954年，他经南开大学推荐并考试，被录取为留学苏联的研究生，1955年到世界著名大学莫斯科大学数学力学系攻读概率论。三年期间，他的绝大部分时间是在图书馆和教室里度过的，即使在假期里有去伏尔加河旅游的机会，他也放弃了。他在莫斯科大学的指导老师是近代概率论的奠基人、概率论公理化创立者、苏联科学院院士柯尔莫哥洛夫（А. Н. Колмогоров）和才华横溢的年轻概率论专家杜布鲁申（Р. Л. Добрушин），两位导师给王老师制订

了学习和研究计划，让他参加他们领导的概率论讨论班，指导也很具体和耐心。王老师至今很怀念和感激他们。1958年，王老师在莫斯科大学获得苏联副博士学位。

学成回国后，王老师仍在南开大学任教，曾任概率信息教研室主任、南开大学数学系副主任、南开大学数学研究所副所长。他满腔热情地投身于教学和科研工作之中。当时在国内概率论学科几乎还是空白，连概率论课程也只有很少几所高校能够开出。他为概率论的学科建设奠基铺路，向概率论的深度和广度进军，将概率论应用于国家经济建设；他辛勤地培养和造就概率论的教学和科研队伍，让概率论为我们的国家造福。1959年，时年30岁还是讲师的王老师就开始带研究生，主持每周一次的概率论讨论班，为中国培养出一些高水平的概率论专家。至今他已指导了博士研究生和博士后22人，硕士研究生30余人，访问学者多人。他为本科生、研究生和青年教师开设概率论基础及其应用、随机过程等课程。由于王老师在教学、科研方面的突出成就，1977年11月他就被特别地从讲师破格晋升为教授，这是“文化大革命”后全国高校第一次职称晋升，只有两人（另一位是天津大学贺家李教授）。1981年国家批准第一批博士生导师，王老师是其中之一。

1965年，他出版了《随机过程论》，这是中国第一部系统论述随机过程理论的著作。随后又出版了《概率论基础及其应用》（1976）、《生灭过程与马尔可夫链》（1980）。这三部书成一整体，从概率论的基础写起，到他的研究方向的前沿，被人誉为概率论三部曲，被长期用作大学教材或参考书。1983年又出版专著《布朗运动与位势》。这些书既总结了王老师本人、他的同事、同行、学生在概率论的教学和研究中的一些成果，又为在中国传播、推动概率论学科发展，培养中国概率论的教学和研究人才，起到了非常重要的作用，哺育了中国的几代概率论学人（这4部著作于1996年由北京师范大学出版社再版，书名分别

是：《概率论基础及其应用》，即本8卷文集的第5卷；《随机过程通论》上、下卷，即本8卷文集的第6卷和第7卷）。1992年《生灭过程与马尔可夫链》的扩大修订版（与杨向群合作）被译成英文，由德国的施普林格（Springer）出版社和中国的科学出版社出版。1999年由湖南科技出版社出版的《马尔可夫过程与今日数学》，则是将王老师1998年底以前发表的主要论文进行加工、整理、编辑而成的一本内容系统、结构完整的书。

1984年5月，王老师被国务院任命为北京师范大学校长，这一职位自1971年以来一直虚位以待。王老师在校长岗位上工作了5年。王老师常说：“我一辈子的理想，就是当教师。”他一生都在实践做一位好教师的诺言。任校长后，就将更多精力投入到发展师范教育和提高教师地位、待遇上来。1984年12月，王老师与北京师范大学的教师们提出设立“教师节”的建议，并首次提出了“尊师重教”的倡议，提出“百年树人亦英雄”，以恢复和提高人民教师在社会上的光荣地位，同时也表达了全国人民对教师这一崇高职业的高度颂扬、崇敬和爱戴。1985年1月，全国人民代表大会常务委员会通过决议，决定每年的9月10日为教师节。王老师任校长后明确提出北京师范大学的办学目标：把北京师范大学建成国内第一流的、国际上有影响力的、高水平、多贡献的重点大学。对于如何处理好师范性和学术性的问题，他认为两者不仅不能截然分开，而且是相辅相成的；不搞科研就不能叫大学，如果学术水平不高，培养的老师一般水平不会太高，所以必须抓学术；但师范性也不能丢，师范大学的主要任务就是干这件事，更何况培养师资是一项光荣任务。对师范性他提出了三高：高水平的专业、高水平的师资、高水平的学术著作。王老师也特别关心农村教育，捐资为农村小学修建教学楼，赠送书刊，设立奖学金。王老师对教育事业付出了辛勤的劳动，做出了重要贡献。正如著名教育家顾明远先生所说：“王梓坤是教育实践家，他做成的三件事

情：教师节、抓科研、建大楼，对北京师范大学的建设意义深远。”2008年，王老师被中国几大教育网站授予改革开放30年“中国教育时代人物”称号。

1981年，王老师应邀去美国康奈尔（Cornell）大学做学术访问；1985年访问加拿大里贾纳（Regina）大学、曼尼托巴（Manitoba）大学、温尼伯（Winnipeg）大学。1988年，澳大利亚悉尼麦考瑞（Macquarie）大学授予他荣誉科学博士学位和荣誉客座学者称号，王老师赴澳大利亚参加颁授仪式。该校授予他这一荣誉称号是由于他在研究概率论方面的杰出成就和在提倡科学教育和研究方法上所做出的贡献。

1989年，他访问母校莫斯科大学并作学术报告。

1993年，王老师卸任校长职务已数年。他继续在北京师范大学任职的同时，以极大的勇气受聘为汕头大学教授。这是国内的大学第一次高薪聘任专家学者。汕头大学的这一举动横扫了当时社会上流行的“读书无用论”“搞导弹的不如卖茶叶蛋的”等论调，证明了掌握科学技术的人员是很有价值的，为国家改善广大知识分子的待遇开启了先河。但此事引起极大震动，一时引发了不少议论。王老师则认为：这对改善全国的教师和科技人员的待遇、对发展教育和科技事业，将会起到很好的作用。果然，开此先河后，许多单位开始高薪补贴或高薪引进人才。在汕头大学，王老师与同事们创办了汕头大学数学研究所，并任所长6年。汕头大学的数学学科有了很大的发展，不仅获得了数学学科的硕士学位授予权，而且聚集了一批优秀的数学教师，为后来获得数学学科博士学位授予权打下了坚实的基础。

王老师担任过很多兼职：天津市人民代表大会代表，国家科学技术委员会数学组成员，中国数学会理事，中国科学技术协会委员，中国高等教育学会常务理事，中国自然辩证法研究会常务理事，中国人才学会副理事长，中国概率统计学会常务理事，中国地震学会理事，中国高等师范教育研究会理事长，

《中国科学》《科学通报》《科技导报》《世界科学》《数学物理学报》等杂志编委，《数学教育学报》主编，《纯粹数学与应用数学》《现代基础数学》等丛书编委。

王老师获得了多种奖励和荣誉：1978年获全国科学大会奖，1982年获国家自然科学奖，1984年被中华人民共和国人事部授予“国家有突出贡献中青年专家”称号，1986年获国家教育委员会科学技术进步奖，1988年获澳大利亚悉尼麦考瑞大学荣誉科学博士学位和荣誉客座学者称号，1990年开始享受政府特殊津贴，1993年获曾宪梓教育基金会高等师范院校教师奖，1997年获全国优秀科技图书一等奖，2002年获何梁何利基金科学与技术进步奖。王老师于1961年、1979年和1982年3次被评为天津市劳动模范，1980年获全国新长征优秀科普作品奖，1990年被全国科普作家协会授予“新中国成立以来成绩突出的科普作家”称号。

1991年，王老师当选为中国科学院院士，这是学术界对他几十年来在概率论研究中和为这门学科在中国的发展所做出的突出贡献的高度评价和肯定。

王老师是将马尔可夫过程引入中国的先行者。马尔可夫过程是以俄国数学家 A. A. Марков 的名字命名的一类随机过程。王老师于1958年首次将它引入中国时，译为马尔科夫过程。后来国内一些学者也称为马尔可夫过程、马尔柯夫过程、Markov 过程，甚至简称为马氏过程或马程。现在统一规范为马尔可夫过程，或直接用 Markov 过程。生灭过程、布朗运动、扩散过程都是在理论上非常重要、在应用上非常广泛、很有代表性的马尔可夫过程。王老师在马尔可夫过程的理论研究和应用方面都做出了很大的贡献。

随着时代的前进，特别是随着国际上概率论研究的进展，王老师的研究课题也在变化。这些课题都是当时国际上概率论研究前沿的重要方向。王老师始终紧随学科的近代发展步伐，力求在科学研究的重要前沿做出崭新的、开创性的成果，以带

动国内外一批学者在刚开垦的原野上耕耘。这是王老师一生中数学研究的一个重大特色。

20世纪50年代末,王老师彻底解决了生灭过程的构造问题,而且独创了马尔可夫过程构造论中的一种崭新的方法——过程轨道的极限过渡构造法,简称极限过渡法。王老师在莫斯科大学学习期间,就表现出非凡的才华,他的副博士学位论文《全部生灭过程的分类》彻底解决了生灭过程的构造问题,也就是说,他找出了全部的生灭过程,而且用的方法是他独创的极限过渡法。当时,国际概率论大师、美国的费勒(W. Feller)也在研究生灭过程的构造,但他使用的是分析方法,而且只找出了部分的生灭过程(同时满足向前、向后两个微分方程组的生灭过程)。王老师的方法的优点在于彻底性(构造出了全部生灭过程)和明确性(概率意义非常清楚)。这项工作得到了苏联概率论专家邓肯(Е. Б. Дынкин, E. B. Dynkin, 后来移居美国并成为美国科学院院士)和苏联概率论专家尤什凯维奇(А. А. Юшкевич)教授的引用和好评,后者说:“Feller构造了生灭过程的多种延拓,同时王梓坤找出了全部的延拓。”在解决了生灭过程构造问题的基础上,王老师用差分方法和递推方法,求出了生灭过程的泛函的分布,并给出此成果在排队论、传染病学等研究中的应用。英国皇家学会会员肯德尔(D. G. Kendall)评论说:“这篇文章除了作者所提到的应用外,还有许多重要的应用……该问题是困难的,本文所提出的技巧值得仔细学习。”在王老师的带领和推动下,对构造论的研究成为中国马尔可夫过程研究的一个重要的特色之一。中南大学、湘潭大学、湖南师范大学等单位的学者已在国内外出版了几部关于马尔可夫过程构造论的专著。

1962年,他发表了另一交叉学科的论文《随机泛函分析引论》,这是国内较系统地介绍、论述、研究随机泛函分析的第一篇论文。在论文中,他求出了广义函数空间中随机元的极限定

理。此文开创了我国研究随机泛函的先河，并引发了吉林大学、武汉大学、四川大学、厦门大学、中国海洋大学等高校的不少学者的后继工作，取得了丰硕成果。

20世纪60年代初，王老师将邓肯的专著《马尔可夫过程论基础》译成中文出版，该书总结了当时的苏联概率论学派在马尔可夫过程论研究方面的最新成就，大大推动了中国学者对马尔可夫过程的研究。

20世纪60年代前期，王老师研究了一般马尔可夫过程的通性，如0-1律、常返性、马丁（Martin）边界和过分函数的关系等。他证明的一个很有趣的结果是：对于某些马尔可夫过程，过程常返等价于过程的每一个过分函数是常数，而过程的强无穷远0-1律成立等价于过程的每一个有界调和函数是常数。

20世纪60年代后期和70年代，由于众所周知的原因，王老师停下理论研究，应海军和国家地震局的要求，转向数学的实际应用，主要从事地震统计预报和在计算机上模拟随机过程。他带领的课题小组首创了“地震的随机转移预报方法”和“利用国外大震以预报国内大震的相关区方法”，被地震部门采用，取得了实际的效果。在这期间，王老师也发表了一批实际应用方面的论文，例如，《随机激发过程对地极移动的作用》等，还有1978年出版的专著《概率与统计预报及在地震与气象中的应用》（与钱尚玮合作）。

20世纪70年代，马尔可夫过程与位势理论的关系是国际概率论界的热门研究课题。王老师研究布朗运动与古典位势的关系，求出了布朗运动、对称稳定过程的一些重要分布。如对球面的未离时、未离点、极大游程的精确分布。他求出的自原点出发的 d （不小于3）维布朗运动对于中心是原点的球面的未离时分布，是一个当时还未见过的新分布，而且分布的形式很简单。美国数学家格图（R. K. Gettoor）也独立地得到了同样的结果。王老师还证明了：从原点出发的布朗运动对于中心是

原点的球面的首中点分布和末离点分布是相同的，都是球面上的均匀分布。

20世纪80年代后期，王老师研究多参数马尔可夫过程。他于1983年在国际上最早给出多参数有限维奥恩斯坦-乌伦贝格(OU, Ornstein-Uhlenbeck)过程的严格数学定义并得到了系统的研究成果。如三点转移、预测问题、多参数与单参数的关系等。次年，加拿大著名概率论专家瓦什(J. B. Walsh)也给出了类似的定义，其定义是王老师定义的一种特殊情形。1993年，王老师在引进多参数无穷维布朗运动的基础上，给出了多参数无穷维OU过程定义，这是国际上最早提出并研究多参数无穷维OU过程的论文，该文发现了参数空间有分层性质。王老师关于多参数马尔可夫过程的开创性工作，推动和引发了国内对于多参数马尔可夫过程的研究，如中山大学、武汉大学、南开大学、杭州大学、湘潭大学、湖南师范大学等的后继研究。湖南科学技术出版社1996年出版的杨向群、李应求的专著《两参数马尔可夫过程论》，就是在王老师开垦的原野上耕耘的结果。

20世纪90年代至今，王老师带领同事和研究生研究国际上的重要新课题——测度值马尔可夫过程(超过程)。测度值马氏过程理论艰深，但有很明确的实际意义。粗略地说，如果普通马尔可夫过程是刻画“一个粒子”的随机运动规律，那么超过程就是刻画“一团粒子云”的随机飘移运动规律。王老师带领的集体在超过程理论上取得了丰富的成果，特别是他的年轻的同事和学生们的同事们，做了许多很好的工作。

2002年，王老师和张新生发表论文《生命信息遗传中的若干数学问题》，这又是一项旨在开拓创新的工作。1953年沃森(J. Watson)和克里克(F. Crick)发现DNA的双螺旋结构，人们对生命信息遗传的研究进入一个崭新的时代，相继发现了“遗传密码字典”和“遗传的中心法则”。现在，人类基因组测序数据已完成，其数据之多可以构成一本100万页的书，而且

书中只有4个字母反复不断地出现。要读懂这本宏厚的巨著，需要数学和计算机学科的介入。该文首次向国内学术界介绍了人类基因组研究中的若干数学问题及所要用到的数学方法与模型，具有特别重要的意义。

除了对数学的研究和贡献外，王老师对科学普及、科学研究方法论，甚至一些哲学的基本问题，如偶然性、必然性、混沌之间的关系，也有浓厚兴趣，并有独到的见解，做出了一定的贡献。

在“文化大革命”的特殊年代，王老师仍悄悄地学习、收集资料、整理和研究有关科学发现和科学研究方法的诸多问题。1977年“文化大革命”刚结束，王老师就在《南开大学学报》上连载论文《科学发现纵横谈》（以下简称《纵横谈》），次年由上海人民出版社出版成书。这是“文化大革命”后中国大陆第一本关于科普和科学方法论的著作。这本书别开生面，内容充实，富于思想，因而被广泛传诵。书中一开始就提出，作为一个科技工作者，应该兼备德识才学，德是基础，而且德识才学要在实践中来实现。王老师本人就是一位成功的德识才学的实践者。《纵横谈》是十年“文化大革命”后别具一格的读物。数学界老前辈苏步青院士作序给予很高的评价：“王梓坤同志纵览古今，横观中外，从自然科学发展的历史长河中，挑选出不少有意义的发现和事实，努力用辩证唯物主义和历史唯物主义的观点，加以分析总结，阐明有关科学发现的一些基本规律，并探求作为一名自然科学工作者，应该力求具备一些怎样的品质。这些内容，作者是在‘四人帮’^①形而上学猖獗、唯心主义横行的情况下写成的，尤其难能可贵……作者是一位数学家，能在研究数学的同时，写成这样的作品，同样是难能可贵的。”《纵横谈》以清新独特的风格、简洁流畅的笔调、扎实丰富的内容吸引了广大读者，引起国内很大的反响。书中不少章节堪称

^① 指王洪文、张春桥、江青、姚文元。

优美动人的散文，情理交融回味无穷，使人陶醉在美的享受中。有些篇章还被选入中学和大学语文课本中。该书多次出版并获奖，对科学精神和方法的普及起了很大的作用。以至19年后，这本书再次在《科技日报》上全文重载（1996年4月4日至5月21日）。主编在前言中说：“这是一组十分精彩、优美的文章。今天许许多多活跃在科研工作岗位上的朋友，都受过它的启发，以至他们中的一些人就是由于受到这些文章中阐发的思想指引，决意将自己的一生贡献给伟大的科学探索。”1993年，北京师范大学出版社将《纵横谈》进一步扩大成《科学发现纵横谈（新编）》。该书收入了《科学发现纵横谈》、1985年王老师发表的《科海泛舟》以及其他一些文章。2002年，上海教育出版社出版了装帧精美的《莺啼梦晓——科研方法与成才之路》一书，其中除《纵横谈》外，还收入了数十篇文章，有的论人才成长、科研方法、对科学工作者素质的要求，有的论数学学习、数学研究、研究生培养等。2003年《莺啼梦晓——科研方法与成才之路》获第五届上海市优秀科普作品奖之科普图书荣誉奖（相当于特等奖）。2009年，北京师范大学出版社出版的《科学发现纵横谈》（第3版）于同年入选《中国文库》（第四辑）（新中国60周年特辑）。《中国文库》编辑委员会称：该文库所收书籍“应当是能够代表中国出版业水平的精品”“对中国百余年来来的政治、经济、文化和社会的发展产生过重大影响，至今仍具有重要价值，是中国读者必读、必备的经典性、工具性名著。”王老师被评为“新中国成立以来成绩突出的科普作家”，绝非偶然。

王老师不仅对数学研究、科普事业有突出的贡献，而且对整个数学，特别是今日数学，也有精辟、全面的认识。20世纪90年代前期，针对当时社会上对数学学科的重要性有所忽视的情况，王老师受中国科学院数学物理学部的委托，撰写了《今日数学及其应用》。该文对今日数学的特点、状况、应用，以及其在国富民强和提高民族的科学文化素质中的重要作用等做了

全面、深刻的阐述。文章提出了今日数学的许多新颖的观点和新的认识。例如，“今日数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。”“高技术本质上是一种数学技术。”“某些重点问题的解决，数学方法是唯一的，非此‘君’莫属。”对今日数学的观点、认识、应用的阐述，使中国社会更加深切地感受到数学学科在自然科学、社会科学、高新技术、推动生产力发展和富国强民中的重大作用，使人们更加深刻地认识到数学的发展是国家大事。文章中清新的观点、丰富的事例、明快的笔调和形象生动的语言使读者阅后感到是高品质的享受。

王老师在南开大学工作28年，吃食堂42年。夫人谭得伶教授是20世纪50年代莫斯科大学语文系的中国留学生，1957年毕业回国后一直在北京师范大学任教，专攻俄罗斯文学，曾指导硕士生、博士生和访问学者20余名。王老师和谭老师1958年结婚后育有两个儿子，两人两地分居26年。谭老师独挑家务大梁，这也是王老师事业成功的重要因素。

王老师为人和善，严于律己，宽厚待人，有功而不自居，有傲骨而无傲气，对同行的工作和长处总是充分肯定，对学生要求严格，教其独立思考，教其学习和研究的方法，将学生当成朋友。王老师有一段自勉的格言：“我尊重这样的人，他心怀博大，待人宽厚；朝观剑舞，夕临秋水，观剑以励志奋进，读庄以淡化世纷；公而忘私，勤于职守；力求无负于前人，无罪于今人，无愧于后人。”

本8卷文集列入北京师范大学学科建设经费资助项目，由北京师范大学出版社出版。李仲来教授从文集的策划到论文的收集、整理、编排和校对等各方面都付出了巨大的努力。在此，我们作为王老师早期学生，谨代表王老师的所有学生向北京师范大学、北京师范大学出版社、北京师范大学数学科学学院和李仲来教授表示诚挚的感谢！

杨向群 吴 荣 施仁杰 李增沪

2016年3月10日

目 录

随机过程通论(下卷)

第 2 版下卷作者的话	(2)
第 10 章 随机微分方程与马尔可夫过程	(4)
§ 10.1 对维纳过程的随机积分	(4)
§ 10.2 随机微分	(15)
§ 10.3 随机微分方程的马尔可夫过程解	(24)
参考文献	(36)
第 11 章 高维布朗运动与牛顿位势	(37)
§ 11.1 势论大意	(38)
§ 11.2 布朗运动略述	(45)
§ 11.3 首中时与首中点	(55)
§ 11.4 调和函数	(65)
§ 11.5 狄利克雷问题	(72)
§ 11.6 禁止概率与常返集	(79)
§ 11.7 测度的势与投影问题	(86)

§ 11.8 平衡测度	(91)
§ 11.9 容 度	(98)
§ 11.10 暂留集的平衡测度	(102)
§ 11.11 极 集	(108)
§ 11.12 末遇分布	(113)
§ 11.13 格林函数	(122)
第 12 章 二维布朗运动与对数位势	(129)
§ 12.1 对数位势的基本公式	(129)
§ 12.2 平面格林函数	(137)
§ 12.3 对数势	(140)
§ 12.4 平面上的容度	(145)
§ 12.5 补 充	(152)
参考文献	(153)
第 11 章和第 12 章内容的历史的注	(155)
附篇 测度论的基本知识	(156)
关于生灭过程与马尔可夫链的参考文献	(190)
新参考书目	(199)
随机过程通论(下卷)名词索引	(204)

各章间关系图

