Equilibrium Optimization
Theory with Applications

平衡优化理论与应用

刘彦奎　陈艳菊　杨国庆　著

科学出版社

平衡优化理论与应用

Equilibrium Optimization Theory with Applications

刘彦奎　陈艳菊　杨国庆　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要介绍不确定决策系统中的平衡度量理论、静态与两阶段动态平衡优化方法及其应用. 在平衡度量理论中, 介绍平衡度量的构造方法, 引入平衡均值和风险值等优化指标, 讨论基于平衡度量的收敛模式等. 在静态平衡优化方法方面, 引入评价函数来评估决策向量的优劣; 依据所选择的评价函数, 建立各种不同的静态优化模型. 在动态平衡优化方法方面, 介绍如何将可信性优化与随机优化两种处理不确定性的建模方法融合在一个优化体系中, 来解决多阶段决策问题.

本书可作为应用数学专业高年级本科生或运筹学与控制论专业研究生的教材, 也可作为从事运筹学、管理科学及信息科学研究的高校教师和科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

平衡优化理论与应用/刘彦奎, 陈艳菊, 杨国庆著. —北京: 科学出版社, 2018.12

ISBN 978-7-03-059429-7

Ⅰ. ①平… Ⅱ. ①刘… ②陈… ③杨… Ⅲ.①平衡-度量-最优化算法 Ⅳ. ①O174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 253877 号

责任编辑: 胡庆家 李 萍 / 责任校对: 杜子昂
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 铭轩堂

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 12 月第一次印刷 印张: 17 1/4 插页: 1
字数: 340 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

带有不确定信息的决策与优化方法是当今系统科学领域的研究热点, 其中不确定信息分布的精细化表示与精准化度量是亟待解决的科学问题. 目前国内外同行主要采用模糊集合论方法刻画主观不确定信息的分布函数, 但该方法在处理多源不确定信息交叉融合运算中具有很大的局限性.

本书作者通过多年系统、深入地研究, 提出了基于平衡机会的不确定信息表示的理论体系, 建立了一套处理多源不确定信息的理论和方法, 在一定程度上解决了不确定信息分布的精细化表示与精准化度量两方面的关键问题. 本书共 10 章, 介绍不确定性平衡优化理论与应用的最新研究进展, 包括理论基础、模型的建立与分析, 以及平衡优化方法的应用等.

第 1 章给出一些有关线性规划、非线性规划和概率约束规划的基本知识.

第 2 章介绍静态平衡优化理论. 首先讨论模糊随机变量的可测性准则, 引入平衡机会的定义并讨论平衡机会的性质, 然后在此基础上研究平衡机会规划的凸性.

第 3 章给出几种双重不确定变量序列的收敛模式, 建立各种平衡收敛模式之间的关系; 通过非线性积分引入两种双重不确定变量的平衡均值; 针对可积双重不确定变量序列, 讨论单调收敛定理和控制收敛定理; 最后给出双重不确定变量的逼近方法.

第 4 章主要介绍有价证券选择问题. 首先采用随机优化方法建立带有 VaR 约束的优化模型; 其次在收益率的概率分布信息部分已知的情形下, 重点讨论概率–可信性平衡风险值优化方法.

第 5 章主要介绍单阶段平衡枢纽选址问题. 首先在离散随机时间情形下研究枢纽选址问题的建模与求解; 其次在随机时间的概率分布信息部分已知的情形下, 讨论枢纽选址问题的概率–可信性平衡优化方法.

第 6 章主要介绍两阶段平衡枢纽选址问题. 首先介绍随机需求情形下的最小风险建模方法, 进而在双重不确定需求下, 基于平衡关键值准则建立相应的两阶段枢纽选址优化模型.

第 7 章主要介绍平衡供应链网络设计问题. 本章通过随机向量刻画现实供应链网络问题中的不确定参数, 在精确联合概率分布信息已知和联合概率分布信息部分已知两种不同情形下研究供应链网络设计问题.

第 8 章主要介绍平衡冗余优化问题. 在部件寿命用概率分布刻画的情形下, 分两种情形讨论冗余优化问题的建模方法. 重点讨论在概率分布信息部分已知情形

下, 如何建立相应的平衡冗余优化模型.

第 9 章主要介绍多站点平衡供应链计划问题. 本章通过联合概率分布刻画现实供应链计划问题中的不确定参数, 在联合概率分布信息部分已知的情形下讨论多站点供应链计划问题的优化方法.

第 10 章主要介绍两阶段平衡供应合同问题. 在不确定参数的精确概率分布信息已知和概率分布信息部分已知两种情形下, 分别讨论两阶段供应合同问题的优化方法.

借此机会, 作者对“风险管理与金融工程”实验室的所有研究生表示感谢, 他们在学习和讨论初稿的过程中, 对第 1 章概率约束规划一节提出了很好的改进意见和建议, 在此表示感谢.

本书的研究工作得到国家自然科学基金 (No.61773150, No.61374184) 的资助, 在此作者表示衷心的感谢.

作　者

2018 年 1 月

常 用 符 号

$(\Omega, \Sigma, \mathrm{Pr})$	概率空间
$(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Cr})$	可信性测度空间
α, β	概率/可信性置信水平
Pr	概率
Cr	可信性测度
Pos	可能性测度
Nec	必要性测度
Ch	平衡机会
E_γ	模糊变量期望值
E_ω	随机变量期望值
Var	方差
σ	标准差
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$	决策向量
VaR	风险值
$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$	随机模糊向量或模糊随机向量
ξ, η	随机模糊变量或模糊随机变量
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}(\gamma),\ \boldsymbol{\Sigma})$	正态分布
$\boldsymbol{\mu}$	模糊期望值向量
$\boldsymbol{\Sigma}$	模糊协方差矩阵
$\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$	均匀分布
(r_1, r_2, r_3, r_4)	梯形模糊变量
(r_1, r_2, r_3)	三角模糊变量
$n(m, \sigma)$	正态模糊变量
I, J, K, L, M	指标集
exp	以 e 为底的指数函数
PSO	粒子群算法
GA	遗传算法
$\top$	三角模
UHL	无能力约束的枢纽中心选址

$\rho_{\mathrm{CVaR}}^{\alpha}$	模糊变量的条件风险值
d^{+}	正偏差变量
d^{-}	负偏差变量
Ξ	随机模糊向量或模糊随机向量的支撑
$\Re$	实数集
$\Re^{n}$	n 维欧氏空间

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

本章介绍线性规划模型、非线性规划模型和随机规划模型中的一些基本概念和结论, 主要包括线性规划的可行域及其对偶规划、凸集、凸函数、方向导数和次梯度等概念, 凸规划, 非线性规划的 Kuhn-Tucker 条件及其对偶规划, 具有联合概率约束的随机规划问题及其简约梯度法, 具有可分离概率约束的随机规划问题及其等价凸规划.

1.1　线 性 规 划

1.1.1　可行域

在一组线性等式或不等式约束下, 求一个线性函数的最大值或最小值的问题称为线性规划.

下面考虑线性规划问题的如下标准形式:

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{c} \in \Re^n$, $\boldsymbol{b} \in \Re^m$, $\boldsymbol{A} \in \Re^{m\times n}$ 是确定的, $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ 是决策向量. 其他形式的线性规划都可以转化为此标准形式.

称 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 为线性规划 (1.1) 的约束, 称满足约束的向量 $\boldsymbol{x}$ 为问题 (1.1) 的一个可行解. 所有的可行解组成的集合称为问题 (1.1) 的可行集, 记为 $\mathfrak{B}$, 即

$$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

如果可行解 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{B}$ 满足对所有的 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{B}$, 都有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 \leqslant \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, 则称可行解 $\boldsymbol{x}_0$ 为线性规划的最优解.

可用如下定理判断线性规划问题可行集是否非空.

定理 1.1 (Farkas 引理)　线性规划问题 (1.1) 的可行集 $\mathfrak{B} \neq \varnothing$ 当且仅当 $\{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}\} \subset \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \geqslant 0\}$.

给定一个线性规划问题, 若 $\mathfrak{B} = \varnothing$, 则称该问题不可行或无解. 若 $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, 但目标函数在 $\mathfrak{B}$ 上无下界, 则称该问题无下界. 若 $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, 且目标函数有有限的最优值, 则称该问题有最优解.

1.1.2 对偶理论

下面介绍线性规划的对偶理论.

对每个线性规划 (1.1), 称其为原规划, 其对偶线性规划为

$$\begin{cases} \max & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{c}. \end{cases} \tag{1.2}$$

定理 1.2 设线性规划问题 (1.1) 和 (1.2) 分别有可行解 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$, 则

(1) $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$;

(2) 问题 (1.1) 和问题 (1.2) 都有最优解.

定理 1.3 (对偶性定理) 线性规划问题 (1.1) 有最优解 $\boldsymbol{x}^o$ 当且仅当问题 (1.2) 有最优解 $\boldsymbol{y}^o$, 并且 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^o = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^o$.

对于任意形式的线性规划, 可以先转化为形如 (1.1) 的标准线性规划, 然后根据 (1.2) 给出对偶线性规划.

如果原规划为

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1.3}$$

根据定义, 对偶线性规划为

$$\begin{cases} \max & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1.4}$$

根据定义, 如果原规划为

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1.5}$$

则对偶线性规划为

$$\begin{cases} \max & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \geqslant -\boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1.6}$$

如果原规划为

$$\begin{cases} \max & \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{f}, \end{cases} \tag{1.7}$$

则得到对偶线性规划

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g}, \\ & \boldsymbol{w}\geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1.8}$$

因此, 对偶的对偶就是原规划.

用 $\mathfrak{B}$ 表示原规划的可行集, 用 $\mathfrak{D}$ 表示对偶规划的可行集. 如果 $\mathfrak{B}=\varnothing$, 则令 $\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathfrak{B}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=+\infty$, 如果 $\mathfrak{D}=\varnothing$, 则令 $\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathfrak{D}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=-\infty$. 下面介绍原规划和对偶规划之间的关系.

定理 1.4 对于线性规划 (1.1) 和它的对偶线性规划 (1.2), 有

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathfrak{B}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathfrak{D}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$

定理 1.5 设 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{D}$ 分别是线性规划 (1.1) 和它的对偶线性规划 (1.2) 的可行集. 如果 $\mathfrak{B}\neq\varnothing$ 或者 $\mathfrak{D}\neq\varnothing$, 则有

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathfrak{B}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathfrak{D}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$

如果 (1.1) 和 (1.2) 中有一个可解, 则另一个也可解, 且

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathfrak{B}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\max_{\boldsymbol{u}\in\mathfrak{D}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$

定理 1.6 $\mathfrak{B}\neq\varnothing$ 当且仅当由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$ 可推导出 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\geqslant 0$.

1.2 非线性规划

1.2.1 凸集与凸函数

定义 1.1 设 $S\subset\Re^n$ 是 n 维欧氏空间的一个点集, 若对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$, 以及任意的 $\lambda\in[0,1]$, 都有

$$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in S,$$

则称 S 是一个凸集.

凸集有如下的重要性质.

定理 1.7 任意多个凸集的交还是凸集.

定义 1.2 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义. 自点 P 引射线 $\boldsymbol{l}$. 设 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上的另一点且 $P'\in U(P)$, 两点间的距离为 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

存在, 则称此极限值为函数 f 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}.$$

现在来介绍凸函数的概念及其性质.

定义 1.3　设 $S \subset \Re^n$ 是非空凸集, 函数 $f: S \to \Re^1$, 如果对任意的 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$, 以及任意的 $\lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^2),$$

则称 f 为 S 上的凸函数, 如果上述的 "$\leqslant$" 变为 "$<$", 且 $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$, 则称 f 为 S 上的严格凸函数. 另外, 如果 $-f$ 是 S 上的凸函数, 那么称 f 为 S 上的凹函数.

由凸函数的定义, 容易验证, 如果 f_1, f_2 都是 S 上的凸函数, $a \geqslant 0$, 那么 af_1 和 $f_1 + f_2$ 都是凸函数. 需要注意的是, 两个凸函数的乘积不一定是凸函数.

下面的定理给出了凸函数和凸集的关系.

定理 1.8　设 $S \subset \Re^n$ 是非空凸集, 函数 $f: S \to \Re^1$ 是凸函数, 那么集合

$$H_c(f, S) = \{\boldsymbol{x} \in S \mid f(\boldsymbol{x}) \leqslant c\}$$

对每个 $c \in \Re^1$ 都是凸集.

定理 1.9　设 $S \subset \Re^n$ 是非空凸集, 函数 $f: S \to \Re^1$ 是凸函数, 那么 f 在 S 的内部连续.

下面的定理用于判别一个可微函数是否为凸函数.

定理 1.10　设 $S \subset \Re^n$ 是非空开凸集, $f: S \to \Re^1$ 可微, 则 f 是 S 上的凸函数的充分必要条件是: 对任意的 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$, 有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \leqslant f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1),$$

其中 $\nabla f(\boldsymbol{x}^1) = \left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$ 是函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^1$ 处的一阶导数或梯度.

定理 1.11　设 $S \subset \Re^n$ 是非空开凸集, $f: S \to \Re^1$ 二阶连续可微, 则 f 是 S 上的凸函数的充分必要条件是 f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上是半正定的.

定义 1.4　令 $f: \Re^n \mapsto \Re$ 为一个凸函数, 如果向量 $\boldsymbol{d} \in \Re^n$ 满足

$$f(\boldsymbol{z}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}, \quad \forall \boldsymbol{z} \in \Re^n,$$

则称向量 $\boldsymbol{d}$ 是 f 在点 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ 上的一个次梯度.

定理 1.12　令 $f: \Re^n \mapsto \Re$ 为一个凸函数, 向量 $\boldsymbol{d} \in \Re^n$. $\boldsymbol{d}$ 是 f 在点 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ 上的一个次梯度当且仅当

$$f(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \geqslant f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}, \quad \forall \boldsymbol{z} \in \Re^n.$$

1.2.2 凸性

非线性规划研究非线性函数的数值最优化问题. 考虑如下标准形式的非线性规划问题

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中函数 $f: \Re^n \to \Re^1, \boldsymbol{g}: \Re^n \to \Re^p$, $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ 是决策向量, 目标函数和约束函数中至少有一个是关于 $\boldsymbol{x}$ 的非线性函数. 目标函数和约束函数都是连续可微的 (偏导函数是连续的). 记 $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x} \in \Re^n \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{0}\}$ 为规划问题 (1.9) 的可行集. $\mathfrak{B}$ 中的元素是非线性规划问题 (1.9) 的可行解.

如果存在 $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathfrak{B}$ 的一个邻域 U 使得 $f(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant f(\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{y} \in U$, 则称 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是非线性规划问题 (1.9) 的一个局部最小点. 如果 $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant f(\boldsymbol{z}), \forall \boldsymbol{z} \in \mathfrak{B}$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是非线性规划问题 (1.9) 的一个全局最小点.

如果函数 $\varphi: \Re^n \to \Re^1$ 是可微的, $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Re^n$ 是其局部最小点, 则

$$\nabla\varphi(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

如果 φ 是凸的, 则 $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Re^n$ 是全局最小点当且仅当

$$\nabla\varphi(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

很多情况下只能得到问题的局部最优解和局部最优值, 甚至只能得到满足某些条件的解. 下面考虑一类特殊的数学规划问题 —— 凸规划问题, 它的局部最优解一定是整体最优解.

对于非线性规划问题 (1.9), 如果 $\mathfrak{B}$ 是凸集, 并且 f 是 $\mathfrak{B}$ 上的凸函数, 则称问题 (1.9) 为一个凸规划问题.

定理 1.13 凸规划的任意一个局部最优解都是其整体最优解.

1.2.3 Kuhn-Tucker 条件

令 $I(\hat{\boldsymbol{x}}) := \{i | g_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0\}$. 称

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\nabla g_i(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0, i \in I(\hat{\boldsymbol{x}}) \Longrightarrow \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0 \tag{1.10}$$

为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 处的正则性条件.

定理 1.14 设 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为非线性规划 (1.9) 的一个局部最优解, 如果 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 处正则性条件 (1.10) 成立, 则存在 $\hat{\boldsymbol{u}} \geqslant \boldsymbol{0}$, 使得