华南师范大学附属中学校本选修教材

总主编 吴青

高中数学问题探究

罗碎海 周建锋★编著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

华南师范大学附属中学校本选修教材

总主编 吴青

高中数学
问题探究

罗碎海 周建锋★编著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

高中数学问题探究/罗碎海，周建锋编著．—广州：暨南大学出版社，2017.7
（华南师范大学附属中学校本选修教材）
ISBN 978－7－5668－2132－4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①罗…②周…　Ⅲ.①中学数学课—高中—课外读物
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第136260号

高中数学问题探究
GAOZHONG SHUXUE WENTI TANJIU
编著者：罗碎海　周建锋

出 版 人：徐义雄
责任编辑：黄　球　崔思远
责任校对：周海燕
责任印制：汤慧君　周一丹

出版发行：暨南大学出版社（510630）
电　　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
网　　址：http://www.jnupress.com　http://press.jnu.edu.cn
排　　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：13.75
字　　数：275千
版　　次：2017年7月第1版
印　　次：2017年7月第1次
定　　价：39.80元

（暨大版图书如有印装质量问题，请与出版社总编室联系调换）

本书出版得到华南师范大学附属中学经费资助

序

罗碎海老师嘱我为他的新作《高中数学问题探究》写序，推却不过才勉力为之.

我与罗老师的个人交往，多与一些趣味数学及游戏有关. 曾有几年和罗老师在同一办公室，我常笑他玩“七巧板”时像小学生一样专注，他常摆弄些诸如“伤脑筋十二块”“九连环”的玩意儿，有时我也会加入他的“烧脑游戏”讨论中，比如他的“世界末日问题——贝拿勒斯梵塔”“哥尼斯堡新问题”等. 又如他曾给我一套鲁班锁，将我“整”得好几天茶饭不思，甚至半夜睡不着，起床“攻克难题”直到天亮. 对那个好玩的鲁班锁的探究过程，我还记忆犹新：第一次偶然成功“搭”出来了，以为掌握了方法，拆了试图重组一次，又不顺手了，反反复复练习后，终于能够熟练掌握组装的方法了. 当我向罗老师演示我的“研究成果”时，他对我的方法进行小结：你解鲁班锁先是靠运气，反复试错找到路径，再反复训练熟悉路径，这只是最初级的玩法. 接着他提出问题：若给你一套“不合格”（无解）的鲁班锁，你将永远找不到组装的路径，如何证明“成功的组装方法”不存在，或者证明“合格”的鲁班锁只有一种解法？他又一次让我“烧脑”了.

在罗老师眼中，生活中到处都是数学，世界就是按数学的原理和规律设计出来的，所有的巧合、有趣的和不可理喻的东西，都是那么的理所当然. 所以，他会关注阳台上“呈左手螺旋状的忍冬花藤缠绕在呈右手螺旋状的豌豆藤上”，他会在餐桌上思考“玉米粒的三重联结在穗内的形成”，他也会在厨房里思考“六边形鳞皮和斐波那契数的关系”，以致忘记了客厅里等着吃菠萝的朋友们.

……

前面讲的都是“佐料”，案前这本《高中数学问题探究》才是我要介绍的“主菜”，这是经过长期研究形成的选修课“数学探究”专题的结晶. 据我所知，罗碎海、周建锋都是高产的数学教师，课余勤于写作，他们的许多论文和研究课题，都与中学生的数学学习和课本知识有关，内容涵盖高中数学中函数、三角、数列、概率、几何等，善于对课本中的知识进行引申、探究，不仅能启发学生科学思维的形成和发展，更让学生在对数学的欣赏和发现中得到美的享受. 对一名中学生来说，如果只考虑努力提高数学成绩，争取在考试中增加几分，选修他们的课程不一定是最佳的选择；如果试图从数学的“苦”中找到一点“乐”，在日常解题的“折磨”下获得“享受”，选修这一课程一定是不错的选择. “佐料”已经如此美味，“主菜”当然值得期待！

最后交代一下我写此小序的本意. “推却”是因为我在中学时代数学成绩平平，大学念的是物理，现任中学物理教师，虽说“世界是按照数学规律形成和发展的”，物理和数学不分家，但中学的物理涉及的数学知识有限，我一直在数学门外徘徊. “为之”是因为我觉得兴趣是最重要的老师，也是最长久的动力，一本有趣的书、一位风趣的老师、一堂有意思的课，都可能会给学生留下深刻的印象，影响学生对一门学科的态度，甚至是一辈子的生活态度和方向. 眼前有一位“好玩”的老师，他有一本“好玩”的书，他会带你进入一个“好玩”的世界，这可能会诱发你的兴趣，所以我愿意将他介绍给你.

李璧亮

2017 年 4 月 10 日

前　言

阿波罗尼斯（Apollonius of Perga，约前 262—前 190）是古希腊亚历山大时代的数学家. 他是第一个依据一个平面与一个圆锥相截所得的截面来研究圆锥曲线的人，他的巨著《圆锥曲线论》共八卷，包含 487 个命题，是古希腊几何的登峰造极之作，其中椭圆就是其主要研究对象之一. 1609 年，开普勒在《火星运行记》一书中公布了他的发现：行星沿椭圆轨迹绕日运行，太阳位于椭圆的一个焦点上.

18 世纪法国学者马拉尔狄实测了蜂房底部菱形，得出一个令人惊异的有趣结论：拼成蜂房底部的每个菱形蜡板，钝角是 $109°28'$，锐角是 $70°32'$. 数学家经过精心计算，得出结果更令人吃惊：建造同样体积且用料最省的蜂房，菱形两角正是 $109°28'$ 与 $70°32'$.

为什么数学家在纸上演算研究出来的圆锥曲线竟是空间星球运行的曲线？为什么小小蜜蜂竟知道用有限的材料造最大容积的蜂房？因为“世界是按照数学规律形成和发展的”，这种数学形式的发展与现实内容的统一，正是数学的魅力、数学的价值所在. 正是它使得一代又一代数学家为之折腰、孜孜不倦地追求.

数学的发展无疑是两条道路，一是数学形式的演变，二是解决现实中的问题. 这两方面是紧密联系的，有时形式先于内容（实际问题），有时内容先于形式. 正像电磁感应一样，电变磁、磁变电互相补充促其发展. 既然数学是这样发展的，世界是这样形成的，那么我们应该顺着它发展的道路去认识世界、认识数学，去教数学、学数学.

本书主要选编自罗碎海、周建锋老师针对学生课本知识学习而撰写的论文，以及选修课“数学探究”专题教案. 内容涵盖高中数学的函数、三角、数列、向量、几何、概率等问题，对课本知识进行引申、探究. 这种探究既有助于科学

思维方法的形成和发展，也是对数学内在美的发现和欣赏. 书中的有些问题已解决了，但有些问题仅仅是提出来，其目的是让学生学会思考，学会发现，学会创造. 本书可作为高中生课内学习辅导用书，也可作为高中选修课用书，对老师的专业提升也有很大的帮助. 感谢黄毅文、叶巧卡、桂鹏等老师参与选修课“数学探究”的开设与本书部分内容的编写.

由于作者水平有限，书中难免存在错误或纰漏之处，敬请读者指正.

罗碎海

2017 年 2 月

目　录

1. “借腹生子”除法与“克隆”除法

在小学二年级，我们就学会了除法. 除法比较麻烦，它与加法、减法、乘法的列式计算完全不同. 本节介绍几种怪异的除法.

一、“借腹生子”除法与“克隆”除法

1. 化$\frac{1}{7}$为小数的非正常方法

算术中有一道光芒四射、诡异万分的“借腹生子”的怪题. 众所周知，分数$\frac{1}{n}$（n是一个与10互素的自然数）是数学里的一个“怪胎”. 例如最平常的$\frac{1}{7}$，就可以产生一个六位循环小数，它们就像元宵节的“走马灯”，转来转去绕圈子.

怎样计算$\frac{1}{7}$呢？毫无疑问，当然是用1除以7，得$\frac{1}{7}=0.\dot{1}42\,85\dot{7}$. 能不能通过“非正常途径”来算出$\frac{1}{7}$呢？能！就像一位代女怀胎、“出租子宫”、同时兼外祖母与母亲两职于一身的老妇一样，借腹生子.

方法是：起先两步，仍执行普通除法，就是拿1除以7，得到部分商14之后，出现余数2；这个时候，就不用7而改用5去除14，把此步所得到的商数2写在14的正下方，使2与4对齐，余数4与14的十位数1对齐；再下去，用42做被除数，除数仍为5，如法炮制. 显然，这样的除法要比常规除法1÷7快得多，直至“一曲告终”，出现循环为止. 详细步骤如下：

14　“走马灯”数的产生

42　通过“借腹生子”除法

28　$\frac{1}{7}=0.\dot{1}42\,85\dot{7}$

35　合法母亲（正式除数）：7
07　代理母亲（代理分母）：5
21　出现循环，算到此结束
……

2. 其他数的代理分母

在$\frac{1}{7}$中代理分母是5，我们可以找到其他数的代理分母.

$\frac{1}{19}$的代理分母是2，验证如下：

先算$\frac{1}{19}$的前两位小数0.05，接下来用代理分母2仿以上$\frac{1}{7}$的操作，算出$\frac{1}{19}=0.\dot{0}52\ 631\ 578\ 947\ 368\ 42\dot{1}$.

在$\frac{2}{13}$中代理分母是4，先算出0.15，接下来用代理分母4除15，仿以上$\frac{1}{7}$的操作，算出$\frac{2}{13}=0.\dot{1}53\ 84\dot{6}$. 在$\frac{1}{39}$中代理分母是4，只不过要先算出$\frac{1}{39}$的前三位小数0.025，接下来用代理分母4除25，仿以上$\frac{1}{7}$的操作，算出$\frac{1}{39}=0.\dot{0}25\ 64\dot{1}$. 在$\frac{1}{29}$中代理分母是3，只不过要先算出$\frac{1}{29}$的前五位小数0.034 48，接下来用代理分母3除8. 在$\frac{1}{23}$中代理分母是7，只不过要先算出$\frac{1}{23}$的前九位小数0.043 478 260，接下来用代理分母7除60. 再仿以上$\frac{1}{7}$的操作，算出

$$\frac{1}{29}=0.\dot{0}34\ 482\ 758\ 620\ 689\ 655\ 172\ 413\ 793\ \dot{1}$$

$$\frac{1}{23}=0.\dot{0}43\ 478\ 260\ 869\ 565\ 217\ 391\ \dot{3}$$

正常分母与代理分母之间有何关系？代理分母从哪一位开始执行？本质的规律到底是什么？

3. “克隆”除法

时代在发展，社会在进步，过去的“遗传”问题发展成当代的“借腹生子”，而今天已进入了“克隆”时代. 我们的除法能否像绵羊自身“生出”克隆绵羊一样，由商来决定商呢？这种“技术”在数学上早已存在，我们就叫它“克隆”除法吧！

为了明晰这种新除法，我们以 $\frac{1}{19}$ 为例进行计算（表1中第三列）. $\frac{1}{19}$ 的“克隆”除法的操作步骤是：先用0.1除以2，商0.05，余0；这时，将最后的商数5复制到余数0之后为05，再用05除以2，商2余1；再将商数2复制到余数1后为12，继续用2除，直到出现循环为止.

表1

传统除法	“借腹生子”除法	“克隆”除法
0.0526315789 19)1.0000000000 95 50 38 120 114 60 57 30	0.05 12 06 03 11 15 17 18 09 14 07 13 16 08 04 02 01 10 05 出现循环	0.05263157894 2)0.10000000000 10 05 4 12 12 06 6 03 2 11 10 15 14 17 ⋮

“克隆”除法即带有时间延迟，把商数作为“遗传因子”，传给“下一代”的“革命性”的除法. 它与“借腹生子”除法一样，其速度是传统除法所望尘莫及的，而且还不容易出错. “克隆”除法的本质是什么呢？这种除法有没有普遍性？

二、问题探幽

1. 代理分母的求法

$\frac{1}{7}$ 的代理分母是5，$\frac{1}{39}$ 的代理分母是4，$\frac{1}{29}$ 的代理分母是3. 实际上，正常分母和代理分母之间的关系跟循环节的末位数有关（循环节的末位数乘以分母所得积的个位数必为9），$\frac{1}{7}$ 的循环节末位数是7，$\frac{1}{39}$ 的循环节末位数是1，$\frac{1}{29}$ 的

循环节末位数是 1，那么我们可以发现：

$$(7\times7+1)\div10=5$$
$$(39\times1+1)\div10=4$$
$$(29\times1+1)\div10=3$$

5 即为 7 的代理分母，4 即为 39 的代理分母……所以当正常分母为 n 时（这里先设 n 与 2，5 互质，否则为混循环小数），设 $\frac{1}{n}$ 的循环节末位数是 m，那么 $\frac{1}{n}$的代理分母为 $s=\frac{mn+1}{10}$，即 $10s=mn+1$.

2. 代理分母何时上岗

在“借腹生子”除法中，正常除法除到哪一位开始用代理分母？其实我们可以从循环节末位数开始，如 $\frac{1}{7}$ 的循环节末位数是 7，代理分母是 5. 7 除以 5 商 1 余 2，21 除以 5 商 4 余 1，…，一直下去直到循环（表 2 第一列）. 在 $\frac{1}{23}$ 中循环节末位数是 3，代理分母是 7，3 除以 7 商 0 余 3，30 除以 7 商 4 余 2，…，一直下去直到循环（表 2 第二列）.

表 2

$\frac{7}{21}$	$\frac{3}{30}$
14	24
42	33
28	54
35	57
07	18
21	42
⋮	⋮

$\frac{1}{19}$的“克隆”除法中 0.1 的来源：循环节末位前加小数点，然后用代理分母 2 作“克隆”除法. 当然，在$\frac{1}{23}$中，应该是“0.3 除以 7”的“克隆”除法了（循环节末位数为 3，代理分母为 7）.

由此可知，“借腹生子”除法与“克隆”除法具有普遍性.

3. 本质探究

在 $\frac{1}{23}$中，循环节末位数为 3（循环节末位数和分母 23 的乘积的个位数必为 9），代理分母为 $(23\times3+1)\div10=7$. 假如代理分母的除法从循环节末位数 3 开始，那么按照正常分母的除法，此时余数为 1，即从 10 开始除以 23. 下面比较一下用正常分母和代理分母的除法的异同：

表 3

正常分母的除法	代理分母的除法
$10 \div 23 = 0 \cdots 10$	$3 \div 7 = 0 \cdots 3$
$100 \div 23 = 4 \cdots 8$	$30 \div 7 = 4 \cdots 2$
$80 \div 23 = 3 \cdots 11$	$24 \div 7 = 3 \cdots 3$
$110 \div 23 = 4 \cdots 18$	$33 \div 7 = 4 \cdots 5$
$180 \div 23 = 7 \cdots 19$	$54 \div 7 = 7 \cdots 5$
$190 \div 23 = 8 \cdots 6$	$57 \div 7 = 8 \cdots 1$
$60 \div 23 = 2 \cdots 14$	$18 \div 7 = 2 \cdots 4$

依此类推，我们发现左右两边的商都对应相等，即对于 $\frac{1}{23}$ 从循环节末位数开始做代理分母的除法是可行的. 此外，我们还能发现：（左边被除数 ×3）/10 = 右边的被除数，即左右两边的被除数之比为 10 ∶ 3.

下面我们证明：对于任意与 2，5 互质的 n，$\frac{1}{n}$ 都能通过代理分母的除法得到.

设 $\frac{1}{n}$ 的循环节末位数是 m，代理分母为 $s = \frac{mn+1}{10}$，那么 $10s = mn+1$. 代理分母的除法从循环节末位数 m 开始除以 n，此时按照正常分母的除法，余数为 1，即从 10 开始. 两个被除数之比为 $10 : m$，那么此时设：$10k = n \times t_1 + r_1$，$mk = s \times t_2 + r_2$，$0 \leqslant r_1 < n$，$0 \leqslant r_2 < s$，$k \in \{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$.

首先证明 $t_1 = t_2$：

$$t_1 = \left[\frac{10k}{n}\right],\ t_2 = \left[\frac{mk}{s}\right]$$

$$\therefore \frac{10k}{n} - \frac{mk}{s} = \frac{k(10s - mn)}{ns} = \frac{k}{ns} < \frac{1}{s}$$

当 $\frac{mk}{s}$ 为整数时，$t_2 = \frac{mk}{s}$，又因为 $\frac{10k}{n} - \frac{mk}{s} < \frac{1}{s} < 1$，所以 $t_1 = \left[\frac{10k}{n}\right] = t_2$；

当 $\frac{mk}{s}$ 不为整数时，因为 m，k，s 都为自然数，所以 $\left[\frac{mk}{s}\right] + 1 - \frac{mk}{s} \geqslant \frac{1}{s}$，又因为 $\frac{10k}{n} - \frac{mk}{s} < \frac{1}{s}$，所以 $\frac{mk}{s} < \frac{10k}{n} < \left[\frac{mk}{s}\right] + 1$，故 $\left[\frac{10k}{n}\right] = \left[\frac{mk}{s}\right]$，即 $t_1 = t_2$.

综上所述，$t_1 = t_2$ 得证，即当两种除法的被除数之比是 10：m 时，商相等.

现设 $t = t_1 = t_2$，则有 $10k = n \times t + r_1$，$mk = s \times t + r_2$，下面我们观察一下两种除法下一步的被除数之间的关系：

第一种：按照正常分母的除法，余数为 r_1，所以下一步的被除数为 $10r_1$；

第二种：利用代理分母做除法，商为 t，余数为 r_2，所以下一步的被除数为 $10r_2 + t$.

$$\because 10k = n \times t + r_1,\ mk = s \times t + r_2$$
$$\therefore (mn - 10s)t + mr_1 - 10r_2 = 0$$
$$\therefore 10r_2 + t = mr_1$$

即在第二种除法中，下一步的被除数为 mr_1，此时两种除法的被除数的比仍然是 10：m，故商依然相等，且再下一步的被除数也会满足 10：m 的关系，依此类推，两种除法中每一步的商都相等，且被除数都满足 10：m 的关系，所以代理分母的除法是可行的！

$\frac{1}{n}$（n 为与 2，5 互质的正整数）的问题已经解决了，那么把分子换成 $p(1 < p < n,\ p \in \mathbf{N})$ 又如何解决呢？

$\frac{p}{n}$的求法跟$\frac{1}{n}$类似，设$\frac{1}{n}$的循环节末位数为 m，代理分母为 $s = \frac{mn+1}{10}$，此时只要从 mp 开始做代理分母的运算即可.

最后我们来看$\frac{1}{n}$（n 含有质因子 2 或 5）的情况：

首先设 $n = 2^{\alpha} \times 5^{\beta} \times n_1$（$\alpha,\ \beta \in \mathbf{N}$，$n_1$ 与 2，5 互质），则

（1）当 $\alpha > \beta$ 时，$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^{\alpha} \times 5^{\beta} \times n_1} = \frac{5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha} \times n_1} = \frac{1}{10^{\alpha}} \times \frac{5^{\alpha-\beta}}{n_1}$，此时由于 n_1 与 2，5 互质，$\frac{5^{\alpha-\beta}}{n_1}$可以用上述代理分母的除法算出来，然后小数点向左移动 α 位即可.

（2）当 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$ 时，方法同（1）.

随着$\frac{1}{n}$（n 含有质因子 2 或 5）的情况的解决，对于任意 $m,\ n \in \mathbf{N}$，$\frac{m}{n}$ 都能用代理分母的除法得出.

三、新的问题

除了上面介绍的两种除法外，还有一些更特殊的除法，请看下面的问题：

87 是一个合数：$87=3\times29$. 怎样求出 87 的倒数的小数呢？用传统除法求出部分商 0.011 494 25 时，余数为 25. $25=5^2$，将 5 换成 2，得到 $2^2=4$. 4 便是 $\frac{1}{87}$ 的代理分母！

下面我们可以丢掉合法分母而随心所欲. 先在纸上记下原先除得的前三位小数 011，至于后面的五个数字，形成一个直角拐弯，如图 1 所示.

011
4
9
4
2
5
…

图 1

011
34
9
4
2
5
2
…

图 2

011
34
29
14
22
25
12
8
7
3
5
…

图 3

下一步是用 11 做被除数，4 做除数，很明显，$11\div4$ 得到商数 2，余数 3. 仍把商数记在 5 的下面，而把余数 3 记在第二排数字 4 的左边，这时，就演变成图 2 的模式.

将上述步骤反复执行下去：$34\div4$ 得到商数 8，余数 2，将 8 沿竖线写在 2 的下面，将 2 写在 34 下面的 9 的左边，第三排得到 29；$29\div4$ 得到商数 7，余数 1，将 7 沿着竖线写在 8 的下面，将 1 写在 29 下面的 4 的左边，第四排得到 14……这样，就可以把 $\frac{1}{87}$ 的循环节一股脑儿都求出来，

$\frac{1}{87}=0.\dot{0}11\ 494\ 252\ 873\ 563\ 218\ 390\ 804\ 597\ \dot{7}$，一共 28 位. 你能说出其中的奥妙吗？

思考

你还有其他计算除法的方法吗？