

单尊

解题研究
丛书

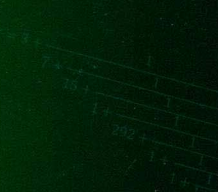
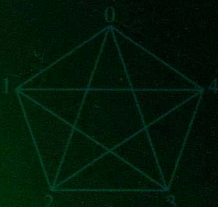
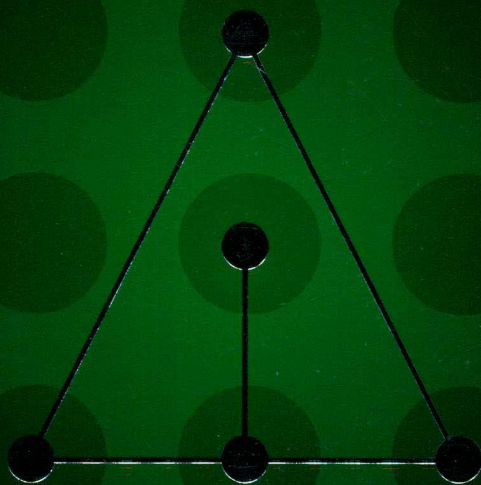
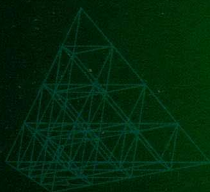
单尊◎著

我怎样解题

一本武功秘籍！找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

WO ZENYANG
JIETI



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE



单樽◎著

我怎样解题



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

我怎样解题 / 单埏著. —上海: 上海教育出版社, 2017.3
(2017.12 重印)
ISBN 978-7-5444-7380-4

I. ①我... II. ①单... III. ①数学—解法 IV. ①01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第061425号



策划编辑 刘祖希
责任编辑 刘祖希 谭桑梓
书籍设计 陆 弦

我怎样解题
单 埏 著

出版发行 上海教育出版社有限公司
官 网 www.seph.com.cn
地 址 上海市永福路 123 号
邮 编 200031
印 刷 昆山市亭林印刷有限责任公司
开 本 700×1000 1/16 印张 27.5
版 次 2017 年 5 月第 1 版
印 次 2017 年 12 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-7380-4/G·6081
定 价 68.00 元



如发现质量问题, 请向本社调换 电话 021-64377165

数学中充满问题,例如尺规作图的三大问题,希尔伯特(Hilbert)的23个问题,费马(Fermat)大定理,黎曼(Riemann)假设,庞加莱(Poincaré)猜想等等.

数学,正是在不断发现问题,不断解决问题中前进、发展的.

学数学,就要学习发现问题,解决问题.

当然,我们目前讨论的问题,只限于中学阶段可能涉及的问题.

我们希望帮助同学们提高解题能力,帮助教师们教会学生解题,帮助师范院校的教师教会未来的教师学会教解题.

说到解题,不可不说到波利亚(G. Pólya, 1887—1985).

波利亚是数学家,也是教育家.他关于数学教育的文章与著作,特别是《怎样解题》,《数学的发现》(上、下),为数学解题理论奠定了坚实的基础.

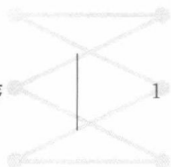
波利亚有很多深刻的思想与独到的见解,真正是解题理论的大成先师.

我国有许多研究解题理论的学者,如过伯祥、张在明、罗增儒等先生.

我也写过一些关于解题的书.承蒙上海教育出版社青睐,计划将我的有关书籍集中出版发行,其中包括:

1. 《解题研究》
2. 《解题漫谈》
3. 《我怎样解题》
4. 《数学竞赛研究教程》(上、下)

等等.



我这几本书，阐释波利亚的解题理论，希望能对学生、教师、教师的教师有所帮助。

波利亚的理论，不是教条，而是实际解题的指南。

因此，我们采用大量实例，特别是自己做过的数学问题，与读者一同讨论如何解题，如何总结解题的经验。

我们特别着重于两类问题。

一是基础问题。这类问题中的数学技巧、方法、思想，往往被人忽视，以为不足道，其实却是至关重要的。例如，“用字母表示数”就是如此。

很多人在数学学习中遇到困难，原因往往是没有注意打好基础，忽视细节。须知绊倒人的，多半正是那些不起眼的小石头。反过来，如果平时注意加强基础，讲究技巧，在各种考试（如中考、高考）中，一定会减少失误或赢得更多的时间。

二是竞赛问题。它需要更多的创造性，而这正是数学学习中应当特别注意培养与发扬的。波利亚的著作中，对竞赛问题讨论较少，因为在他的时代，竞赛数学远不如今天这样风靡。

关于竞赛问题的解题研究，我们做了一些工作，期待有更多的人参加，共同努力将研究做得更加广泛深入。

特别希望读者朋友参加这项工作，对我们的这几本书提出建议与批评。

感谢上海教育出版社刘祖希先生、张莹莹、谭桑梓女士，促成这套书的出版。

单墀

数学题多,太多了!

准备高考的同学都做了大量的题.题多,很多人称之为“题海”.

数学竞赛的题更多了.高考题的内容限定了课本,题型也都是常见的,而竞赛则不断推陈出新,变化无穷.竞赛题多,比大海还要浩瀚,可以称之为“题洋”.

但我们不必“望洋兴叹”.因为本来就没有必要做完所有的题,喝干“洋”水.“弱水三千,只取一瓢”.从大洋中舀一瓢水,细细品味,就可以知道大洋的成分.同样地,从众多的竞赛题中选出一部分,仔细分析,就可以基本了解竞赛题的全貌.

为此,我们选择了一百多道竞赛题.认真地做好这一百多道题,可以提高解题的能力,在题洋中自由自在地游来游去.

这就好像《唐诗三百首》,好像《古文观止》,从众多的唐诗、古文中选出一部分有代表性的作品,熟读之后,对古代的诗、文就有所了解,甚至“不会做诗也会吟”.

选择的标准是:

1. 有代表性的题,解这种题的思想方法值得学习.
2. 有一定难度的好题,有讨论的价值与必要.
3. 我自己做过的题(但我以前的书中写过的,注意少收,以免重复).

这本书不是一本习题集,它的目标不是给出一百多道题的解答,而是想说

一说如何去寻找问题的解答。

元遗山说：“鸳鸯绣了从教看，莫把金针度与人”。其实“鸳鸯绣了从教看”就已经是“欲把金针度与人”。一个自己动手去绣的人，一个细心而又有悟性的人，往往能从绣好的鸳鸯看出针法与诀窍。

我们的目的当然是“金针度人”，所以不仅有较为详细的解答（“绣好的鸳鸯”），而且也谈一些自己解题的经验、体会与探索的过程。

当然，探索的过程是很难写的，因为思路往往是难以说清的，何况“一个人不能两次进入同一条河”。在写解题思路时，那思路可能已经不是原始的状态，“欲辩已忘言”。有时，真实的探索过程又十分的漫长，完全写出来也有点乏味。所以，我们只能尽可能真实而又尽可能简洁地复原一些思考过程，并尝试用各种不同的方法来描述。例如，增加分析的分量，夹叙夹议，比较多种解法，适时总结，略作评注等。有时，还请来两个学生甲、乙一同讨论。

事实上，《我怎样解题》的“我”并不只是作者一个人，而是包括了与作者一同讨论的众多朋友，特别是广大的学生群体。这些学生或看过我写的书，或听过我的讲课，而在与他们的讨论中，我也学到了许多好的解法，获益良多。所以，书名中的“我”，其实是“我们”。写成“我”只是为了少印一个字，符合“简单”的原则。

我解过很多的题，但并无什么“绝招”。

有位学生给我写了一封信，讲到解题的事。摘录如下：

“最近，我在×××老师那边上了十天课。他强调解题时要运用原则，运用对称性分析、结构分析、图象化、图表化等方法。听他讲课时总觉得他的解法是一种必然。但自己实际做题时，往往觉得原则无处可用，只能像以前一样瞎做。在这点上，我觉得你和×××老师很不一样，你解题时十分重视感觉，很少

谈一些原则.你总认为解题没有万能的方法,最好的方法就是探索.我想知道,解题到底是靠什么?”

解题到底靠什么?我靠的也就是平常的、普通人的常识,即:

1. 必须自己动手解题,才能提高解题能力.
2. 要做一些有质量的题,一百道左右(本书每一节的问题,大多写在开始部分,目的就是让读者先自己动手去试).
3. 仔细审题.搞清题意并不容易.有时做完题回顾时才弄清楚,有时做完了题还不一定清楚题意.
4. 从简单的做起.尽量找些简单具体直观的实例,由这些实例入手.
5. 注意总结.要弄清关键所在.有哪几个关键步骤?为什么这样做?要做一题有一题的体会,彻底弄清楚,弄透彻,不仅知其然而且知其所以然.要像大哲学家康德所说:“通过经验使理解力发展到直觉的判断力,再发展到思想观念”,“学会思考”.

虽然努力想写好这本书,但是自身才力所限,疵病一定不少,敬请大家批评指正.

第一章 不等式的证明

1 Janous 不等式	3
2 不等式与恒等式	5
3 调整	7
4 还是调整	9
5 分而治之	12
6 两种相等的情况	13
7 柯西不等式	15
8 用柯西不等式“通分”	19
9 老老实实去分母	21
10 还是上次的办法	23
11 加强归纳假设	25
12 估计上界、下界	27
13 挤挤紧	30
14 又逢等差数列	33
15 一题多解	37
16 和比积好	42
17 最小的参数	45
18 放宽些子又何妨	48
19 三角不等式	51
20 绝对值的不等式	54

21	n 维向量	58
22	拉格朗日配方法	62
23	截搭题	65
24	自己想办法	68
25	题目有误	71
26	凸函数	75
27	二次形式	78

第二章 几何

1	四边形的中高线	89
2	四圆共点	91
3	四个内切圆	93
4	三线共点	95
5	外接三角形	98
6	位似	102
7	经过定点	106
8	剪成锐角三角形	109
9	方程帮忙	114
10	征解问题	117
11	外公切线围成菱形	120
12	射影平分周长	123
13	勾三股四弦五	125
14	分断式命题	129
15	解析几何	133
16	两角相等	136
17	做过三次的题	138
18	富瑞基尔定理	140

19	轴对称	142
20	表示比值	145
21	旁心	150
22	结论强 解法简	152
23	高与中线	154
24	又一个几何不等式	158
25	平面向量的有限集合	160
26	向量的应用	162
27	内心	165
28	平分周长	167
29	n 个向量的和	169
30	寺庙中的几何题	172
31	四点共圆	176
32	极点与极线	181
33	帕斯卡定理	184
34	三线共点	185
35	正确地提出问题	186
第三章 数论		
1	正因数的个位数字的和	191
2	最小公倍数的最小值	192
3	平方是有理数	194
4	和被 $2n$ 整除	197
5	形如 $ 3^b - 2^a $ 的数	199
6	分数与小数	201
7	走自己的路	203
8	取整函数	205

9	不断地变更问题	207
10	同余方程组	209
11	三个连续的正整数	211
12	互不同余	214
13	各行的乘积能否相等	216
14	素数的幂次	218
15	连中三元	221
16	应当自己去想	222
17	忘却了的显然	224
18	解不会太多	227
19	最小剩余	229
20	惊鸿一瞥	232
21	费马小定理	234
22	因数排圈	236
23	一半是9	238
24	最小的A	240
25	都是素数	242
26	小数部分	244
27	越来越多	247
28	一个整除问题	249
29	估计	251
30	知识障	253
31	数字和	258
32	运用三进制	262
33	不在其中	264

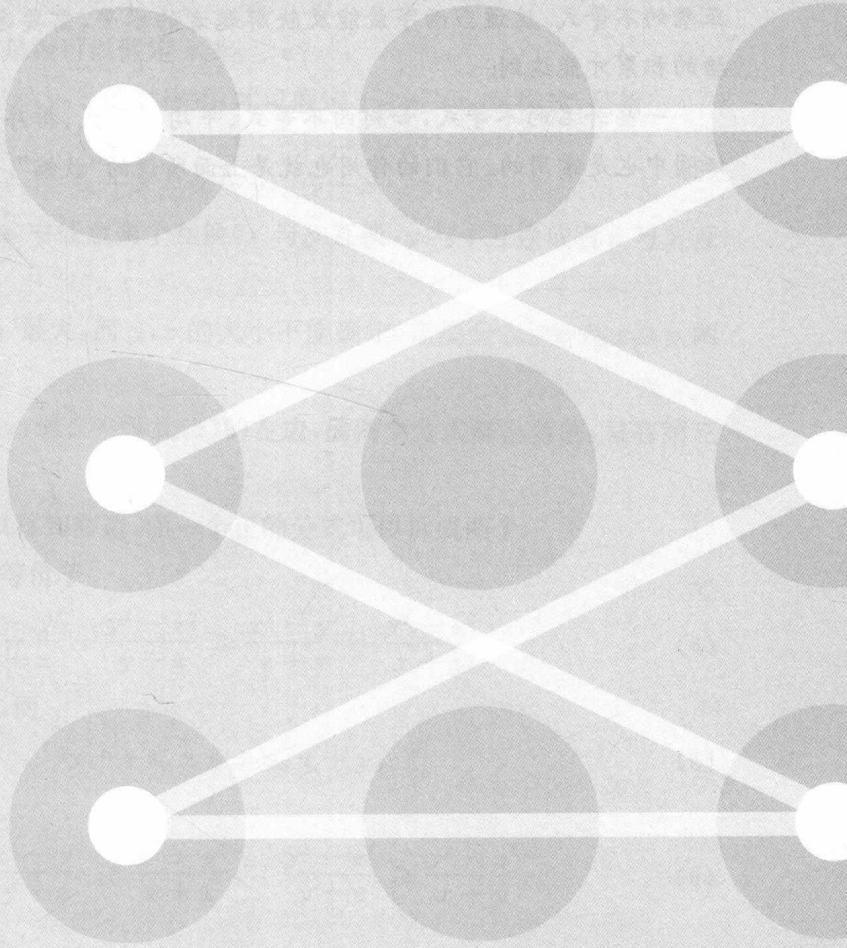
第四章 组合数学

1 取棋子	269
2 老虎与驴子	271
3 抽屉原理	273
4 似难实易	275
5 三箱倒(dǎo)球	277
6 直尺上标刻度	279
7 圆周排数	281
8 虽不中 亦不远矣	283
9 意义何在	285
10 元素的和	287
11 $ X $ 的最小值	289
12 平面格点	293
13 圆桌会议	296
14 红圈加蓝圈	298
15 0,1 数表	300
16 正有理数集的分拆	302
17 两部分图	306
18 填 ± 1	309
19 三角形剖分	313
20 好想法要贯彻到底	316
21 映射的个数	320
22 线段染色	322
23 总和为 0	327
24 吴伟朝先生的名片	330
25 车站个数	334

第五章 数列、函数及其他

1 吴康先生的方程组	347
2 猜答案	350
3 还是猜	352
4 概率问题	353
5 表为平方和	355
6 n 是 3 的幂	357
7 几项整数	359
8 项项是平方	363
9 推广	366
10 整数之和	374
11 三元函数	378
12 一个函数方程	382
13 映射	384
14 寻找函数	387
15 又一个函数方程	393
16 整值多项式	396
17 n 个实根	399
18 切比雪夫多项式	401
19 只有一次多项式	404
20 f 合数	408
21 带余除法	412
22 存在两组数	414
23 线性无关	417
24 整基	419

第一章 不等式的证明



不等式的证明,在数学竞赛中经常出现.不等式的种类繁多,解法千变万化,做不等式的题能够培养学生对数、式的感觉,培养灵活的思维.

不等式的证法很多,其中最重要、最常见的方法就是将式子变形.首先,是“恒等”变形,如通分、合并同类项等,“恒等”变形用得很多,必须熟练,不可出错.其次,是“不等的”变形,即将某一边增大或减小,简称为“放缩”.这种变形在证明中往往只出现一两次,但却是证明不等式的关键.我们要抓住时机,在适当的地方大胆地放缩,简化不等式.但放缩不等式又必须适当,过分了就会产生不正确的不等式.这适当两字最能反映解题者的水平,需要通过大量的解题与经验的积累才能达到.

一些著名的不等式,如柯西不等式、平均不等式、排序不等式等,在不等式证明中也是常用的.它们的作用也就是上面所说的“放缩”.

Janous 提出一个如下的不等式:

x, y, z 为正实数, 证明:

$$\frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} + \frac{x^2 - z^2}{y + z} \geq 0. \quad (1)$$

师: 不等式(1)左边在将 x, y, z 换成 y, z, x (即将 x 换成 y, y 换成 z, z 换成 x) 时, 不变. 这样的式子称为 (x, y, z) 的轮换式. 上式常常简记为

$$\sum \frac{y^2 - x^2}{z + x}. \quad (2)$$

看到表达式(2), 应当知道它是不等式(1)的左边.

甲: 对于轮换式, 是否可以假定 $x \geq y \geq z$?

师: 不可以. 对于 x, y, z 的对称式, 才可假定 $x \geq y \geq z$. 对称式, 是指

$$\frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} + \frac{x^2}{y + z} \quad (3)$$

这样的式子, 在 x, y, z 中任意两个互换 (x 与 y 互换, y 与 z 互换或者 z 与 x 互换) 时, 不变.

轮换式, 只能设 x 最大, 而 y, z 的大小不能确定, 需要分 $y \geq z$ 与 $z \geq y$ 两种情况讨论.

乙: 如果 $x \geq y \geq z$, 那么不等式(1)的左边, 前两个分式都是负的, 只有第三个是正的.

师: 负的分式可以移到右边, 而一个正的分式可以拆成两个.

甲: 即不等式(1)等价于

$$\frac{x^2 - y^2}{y + z} + \frac{y^2 - z^2}{y + z} \geq \frac{x^2 - y^2}{z + x} + \frac{y^2 - z^2}{x + y}. \quad (4)$$

两边的分式都是正的, 而

$$y + z \leq z + x \leq x + y, \quad (5)$$

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{y + z} \geq \frac{x^2 - y^2}{z + x}, \quad \frac{y^2 - z^2}{y + z} \geq \frac{y^2 - z^2}{x + y}. \quad (6)$$

从而, 不等式(4)成立.