普通高等教育精品教材

经济数学

JING JI SHU XUE

主编 李忠宁 胡俊红 凌寿铨

航空工业出版社

普通高等教育精品教材

经济数学

主编　李忠宁　胡俊红　凌寿铨

航空工业出版社

北京

内 容 提 要

本书以经济学原理为基础，并结合最新的课程改革理念编写而成。全书共 8 章，内容包括行列式和矩阵、向量组与向量空间、线性规划初步、概率论、数理统计、一元回归分析、MATLAB 基础及其应用、Excel 在概率与数理统计中的应用等内容。

本书以培养应用型人才为目标，遵循启发式教学，注重培养读者的数学思维，可作为高等院校经济管理类、商务类、外贸类以及相关专业的经济数学教材。

图书在版编目（C I P）数据

经济数学 / 李忠宁，胡俊红，凌寿铨主编. -- 北京：航空工业出版社，2017.1（2018.1 重印）
ISBN 978-7-5165-1171-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①李… ②胡… ③凌… Ⅲ. ①经济数学—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 023477 号

经济数学
Jingji Shuxue

航空工业出版社出版发行
（北京市朝阳区北苑 2 号院 100012）
发行部电话：010-84936597 010-84936343

北京市科星印刷有限责任公司印刷 全国各地新华书店经售
2017 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 2 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：11.75 字数：293 千字
印数：3001—6000 定价：35.00 元

编者的话

数学与人类文明同样古老，特别是在当今的信息技术时代，数学的基础性与应用性更加突出。科学家指出：新世纪社会科学与自然科学将进一步结合并定量化。由于计算机的应用，数学科学将更加广泛并不断向各领域渗透，成为整个科学技术发展水平的带动因素。在经济管理和商业领域中，数学已成为不可或缺的重要工具。

高等数学课程是近代数学的重要内容，也是高等教育各应用专业的重要基础课和工具课，它对培养学生的理性思维、创新精神以及借助数学解决实际问题的能力都具有非常重要的作用。本教材在编写过程中，进一步贯彻“以应用为目的，理论知识以‘必需，够用’为度”的原则，对经济数学的教学内容进行改革，具有如下几个特点：

1．内容广而精

本教材内容涉及线性代数、概率统计和线性规划初步的主要理论部分，而且还包括两个计算机软件“Matlab”和“Excel”在经济数学中的初步应用。理论部分以实际应用为主导，删除了一些冗繁的理论推导和复杂且不常用的内容。教学内容可根据具体情况加以调整，考虑在 90～110 学时内完成。

2．渗透数学思想

虽然理论精简，但在阐述重要数学概念时，仍然注意从具体、形象和直观出发，并保留有一定量的推理论证，使学生易于理解数学概念和定理的本来面目，以达到培养学生的数学意识和自觉使用数学方法解决实际问题的目的。

3．突出应用背景

本书用于讲述某一数学概念的引例和巩固所学知识的习题大多来自经济管理和商业领域，更利于学生了解数学在经济社会中的应用。

4．结合 Excel 软件进行概率统计教学

通过学习和使用 Matlab 软件，尽管可以提高学生的计算能力，但该软件在商业中的应用并不普及。Excel 作为当今最普及的办公软件之一，在经济管理和商业贸易领域具有广泛的应用。为此，本书将 Excel 软件纳入教学内容，结合 Excel 软件进行概率统计教学，可以大大提高学生在实际工作中应用数学理论和数学工具解决经济问题的能力。

全书由李忠宁、胡俊红、凌寿铨担任主编，李祥、董丽君、赵江、任福捷、赵景伟担任副主编。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正。

编　者

2018 年 1 月

目录

第 1 章　行列式和矩阵……1
1.1　行列式……1
1.1.1　行列式的概念……1
1.1.2　行列式的性质……4
1.1.3　克莱姆法则……5
1.1.4　运用克莱姆法则讨论齐次线性方程组的解……6
习题 1-1……7
1.2　矩阵……8
1.2.1　矩阵的概念……8
1.2.2　矩阵的运算……10
1.2.3　逆矩阵……14
1.2.4　矩阵的初等变换……16
习题 1-2……18
1.3　应用实例……19
1.3.1　列昂惕夫投入产出模型……19
1.3.2　人口问题……21
复习题 1……23
第 2 章　向量组与向量空间……25
2.1　向量组及其线性组合……25
2.1.1　向量组……25
2.1.2　向量组的线性组合……27
习题 2-1……29
2.2　向量组的线性相关性……29
2.2.1　线性相关性及其判别法……29
2.2.2　线性相关的几个重要定理……33
2.2.3　向量组的等价……35
习题 2-2……36

2.3 向量组的秩 ······ 36
习题 2-3 ······ 40
2.4 向量空间 ······ 40
2.4.1 向量空间的概念 ······ 40
2.4.2 基、维数与坐标 ······ 41
2.4.3 基变换与坐标变换 ······ 43
习题 2-4 ······ 46
2.5 向量组的应用——线性方程组解的结构 ······ 47
2.5.1 齐次线性方程组 $Ax=0$ 解的结构 ······ 47
2.5.2 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的结构 ······ 51
习题 2-5 ······ 53
2.6 应用实例 ······ 53
最少调味品的种类问题 ······ 53
复习题 2 ······ 56
第 3 章 线性规划初步 ······ 59
3.1 线性规划问题的数学模型 ······ 59
习题 3-1 ······ 62
3.2 线性规划问题的图解法 ······ 62
习题 3-2 ······ 64
复习题 3 ······ 65
第 4 章 概率论 ······ 66
4.1 随机事件 ······ 66
4.1.1 随机现象与随机事件 ······ 66
4.1.2 事件间的关系与运算 ······ 67
习题 4-1 ······ 69
4.2 随机事件的概率及运算 ······ 70
4.2.1 预备知识 ······ 70
4.2.2 概率的定义 ······ 71
4.2.3 条件概率 ······ 74
4.2.4 事件的独立性 ······ 76
4.2.5 独立试验概型 ······ 76
习题 4-2 ······ 78
4.3 随机变量及其分布 ······ 79
4.3.1 随机变量的概念 ······ 79

4.3.2 离散型随机变量及其分布 80
4.3.3 连续型随机变量及其概率密度 82
习题 4-3 85
4.4 随机变量的数字特征 86
4.4.1 离散型随机变量的数学期望 86
4.4.2 连续型随机变量的数学期望 88
4.4.3 数学期望的性质 88
4.4.4 方差 89
4.4.5 常用分布的期望与方差 90
习题 4-4 91
4.5 应用实例 91
4.5.1 投资项目的数学期望决策分析 91
4.5.2 概率统计在经济管理决策中的应用 92
复习题 4 93
第 5 章 数理统计 95
5.1 总体、样本、统计量 95
5.1.1 总体、个体和样本 95
5.1.2 统计量 96
5.1.3 几种常用统计量的分布 96
5.2 点估计与区间估计 98
5.2.1 点估计 98
5.2.2 区间估计 99
5.3 假设检验 102
5.3.1 假设检验概念 102
5.3.2 两类错误 103
5.3.3 单个正态总体的假设检验 104
5.4 应用实例 107
概率论与数理统计原理在投资风险报酬分析中的应用 107
复习题 5 111
第 6 章 一元回归分析 112
6.1 一元线性回归方程的建立 112
6.1.1 散点图 113
6.1.2 最小二乘法原理 114
6.1.3 回归方程 114

6.2 线性相关关系的显著性检验 …… 116
6.2.1 相关系数 …… 116
6.2.2 线性相关显著性检验方法 …… 117
复习题 6 …… 118

第 7 章 MATLAB 基础及其应用 …… 119
7.1 MATLAB 概述 …… 119
7.1.1 MATLAB 的特点 …… 119
7.1.2 MATLAB 的操作界面 …… 121
7.2 MATLAB 的运算符号及函数 …… 122
7.3 MATLAB 中的极限、微分与积分 …… 123
7.3.1 利用 MATLAB 求极限 …… 123
7.3.2 利用 MATLAB 求微分 …… 124
7.3.3 利用 MATLAB 求积分 …… 126
7.4 利用 MATLAB 绘制二维图形 …… 128
习题 7-3 和 7-4 …… 130
7.5 MATLAB 在线性代数中的应用 …… 130
7.5.1 矩阵的基本运算 …… 130
7.5.2 解线性方程组 …… 132
7.5.3 线性规划问题求解 …… 134
习题 7-5 …… 136

第 8 章 Excel 在概率与数理统计中的应用 …… 138
8.1 Excel 的主要统计功能与数据引用 …… 138
8.1.1 Excel 的主要统计功能 …… 138
8.1.2 Excel 数据的引用 …… 139
8.2 常用的统计函数 …… 140
习题 8-2 …… 149
8.3 数据分析 …… 150
8.3.1 Excel 数据分析——描述统计 …… 152
8.3.2 数据分析——直方图 …… 154
8.3.3 数据分析——回归 …… 156
习题 8-3 …… 160

习题答案 …… 161

附录 ······ 169
附表 I 泊松（Poisson）分布表 ······ 169
附表 II 标准正态分布函数表 ······ 172
附表III t 分布临界值表 ······ 173
附录IV F 分布表 ······ 174
附表 V χ^2 检验临界值表 ······ 175
附表VI 相关系数检验表 ······ 177
参考文献 ······ 178

第 1 章 行列式和矩阵

在生产实践和科学研究中，很多问题都可以归结为一个线性方程组，行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的. 作为数学工具，行列式在数学的许多分支中都有着广泛应用.

现实生活中对许多问题的研究最终往往都归结为对矩阵的研究，这使得矩阵成为代数特别是线性代数中的一个极其重要的概念和主要研究对象，它在数学与其他自然学科、工程技术、社会科学（特别是经济学）中都有着广泛的应用.

1.1 行列式

1.1.1 行列式的概念

1. 二阶行列式

中学阶段我们学过用消元法解二元一次方程组.

例 1 设二元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

其中，x_j $(j=1,2)$ 为未知量，a_{ij} $(i,j=1,2)$ 为未知量系数，b_i $(i=1,2)$ 为常数项.

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了研究和记忆的方便，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1 将由 4 个数排列成 2 行 2 列（横排为行，竖排为列）并左右两边各加一条竖线的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式，用 D 表示．其中，a_{ij} $(i, j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素，简称元；上式的右端 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的展开式．

在行列式中，从左上角元素到右下角元素的直线称为主对角线，从右上角元素到左下角元素的直线称为次对角线．二阶行列式的展开式可用对角线法则来记忆，即等于主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积，如图 1-1 所示．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1-1

在例 1 中，若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，则称 D 为二元线性方程组的系数行列式，把系数行列式第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后得到二阶行列式 D_j $(j=1,2)$，即有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时，例 1 方程组的唯一解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}.$$

2. 三阶行列式

定义 2 与二阶行列式类似，可以定义三阶行列式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}1) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

三阶行列式的值也遵循对角线法则，如图 1-2 所示．需要注意的是，对角线法则仅适用于二、三阶行列式的计算．

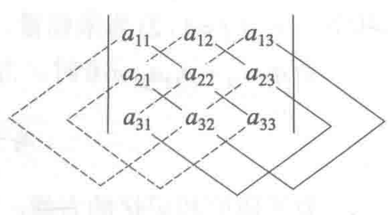

图 1-2

我们注意到，一个三阶行列式是它的第一行各元素分别与 3 个二阶行列式乘积的代数和．因此我们也称式（1-1）右端为三阶行列式按第一行展开的展开式．事实上，三阶行列式还可以按第二行和第三行展开，即

$$D=(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$D=(-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. n 阶行列式

定义 3 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列，并在左右两边各加一竖线的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示一个由确定的运算关系所得到的代数式，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\ .$$

其中，数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素；M_{ij} 为从 D 中划去第 i 行第 j 列（即划去 a_{ij} 所在的行和列）所有元素后，剩余元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式；$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

注 意

由元素 a_{ij} 的余子式及代数余子式的定义可知，a_{ij} 的余子式 M_{ij} 及代数余子式 A_{ij} 均只与 a_{ij} 的位置有关，而与 a_{ij} 的大小无关.

4. 特殊行列式

（1）对角行列式

定义 4 形如 $D_n=\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{vmatrix}$ 的行列式称为 n 阶对角行列式，其中 $r_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不全为 0.

由行列式按行展开的方法容易证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{vmatrix}=r_1r_2\cdots r_n\ ,$$

即对角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积.

（2）上三角和下三角行列式

定义 5 主对角线以下的元素都为 0 的行列式称为上三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

主对角线以上的元素都为 0 的行列式称为下三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式按行展开的方法容易证明，上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}，\quad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

1.1.2 行列式的性质

首先介绍转置行列式的定义. 将行列式 D 的行、列互换后，所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号.

推论 1 如果行列式有两行（列）的对应元素完全相同，则此行列式的值等于 0.

推论 2 n 阶行列式某一行各元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\ (i\neq k).$$

性质 3 如果行列式中有一行（列）的元素全为 0，则此行列式的值为 0.

性质 4 行列式某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 3 行列式某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 4 行列式中如果有两行（列）元素对应成比例，则此行列式的值为 0.

性质 5 若行列式某一行（列）的所有元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行（列）以外，其余的元素与原来行列式的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 将行列式某一行（列）的各个元素都乘以同一常数 k 后，再加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变．

今后用记号 $kr_i\ (kc_i)$ 表示将第 i 行（列）乘 k；用 $r_i \leftrightarrow r_j\ (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示将第 i 行（列）与第 j 行（列）交换；用 $kr_i + r_j\ (kc_i + c_j)$ 表示将第 i 行（列）各元素的 k 倍加到第 j 行（列）的对应元素上．

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$．

解 利用行列式的性质把它化为上三角行列式，再求值．

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\times 1\times(-2) = -2 .$$

1.1.3 克莱姆法则

现在我们讨论利用行列式解 n 元线性方程组的问题，在这里只考虑方程个数和未知数的个数相等的方程组．

定理 1（克莱姆法则） 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于 0，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

那么，它有唯一解，且其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} .$$

其中，D_j $(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数列代替后得的n阶行列式.

例 3 解线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$.

解 (1) 计算系数行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[-3r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{4r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}=9\neq 0.$$

根据定理 1 可知，此线性方程组有唯一解.

(2) 计算D_j.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{-7r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\times 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}=18,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{-7r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\times 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{-7r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\times 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}=0.$$

(3) 写出线性方程组的唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=0.$$

(4) 检验.(具体过程略)

在应用克莱姆法则求解含有n个方程、n个未知数的线性方程组时，需要计算$n+1$个n阶行列式，计算量很大. 所以，在一般情况下我们不采用克莱姆法则求解高阶线性方程组.

以下我们用克莱姆法则讨论一类特殊线性方程组——齐次线性方程组解的情况.

1.1.4 运用克莱姆法则讨论齐次线性方程组的解

形如$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$的线性方程组称为齐次线性方程组.

显然，所有未知数取值皆为 0 是它的一个解，这个解称为零解. 此外，若未知数不全为 0 的取值也是它的解，则称这样的解为非零解.

由克莱姆法则显然有：

定理 2 当齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它一定有唯一的零解.

定理 3 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式 $D=0$.

例 4 确定齐次线性方程组 $\begin{cases} x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_1+2x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有无非零解？

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$，所以，此线性方程组有非零解.

习题 1-1

1．a 为何值时，$\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=0$.

2．写出行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{22}，a_{32} 的余子式及代数余子式.

3．用行列式定义计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4．用行列式的性质计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 12\,457 & 12\,357 \\ 28\,532 & 28\,432 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

5．用克莱姆法则解下列方程组.

（1）$\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2; \end{cases}$（2）$\begin{cases} x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+4x_3=1, \\ 2x_1-x_2=2. \end{cases}$

1.2 矩阵

1.2.1 矩阵的概念

引例　线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$. 它的系数按照原来的次序可排成系数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

它的常数项也可排成一个数表$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

由此抽象出矩阵的定义.

定义 1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,3,\cdots,m;\ j=1,2,3,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示. 上述矩阵可以记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有时也记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

矩阵中的 $m\times n$ 个数称为矩阵的元素，简称为元素，a_{ij} 称为矩阵的第 i 行 j 列元素. 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本章只讨论实矩阵.

下面介绍几种特殊矩阵.

（1）当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶方阵.

（2）当 $m=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为行矩阵，此时 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$；当 $n=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为列矩阵，此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.