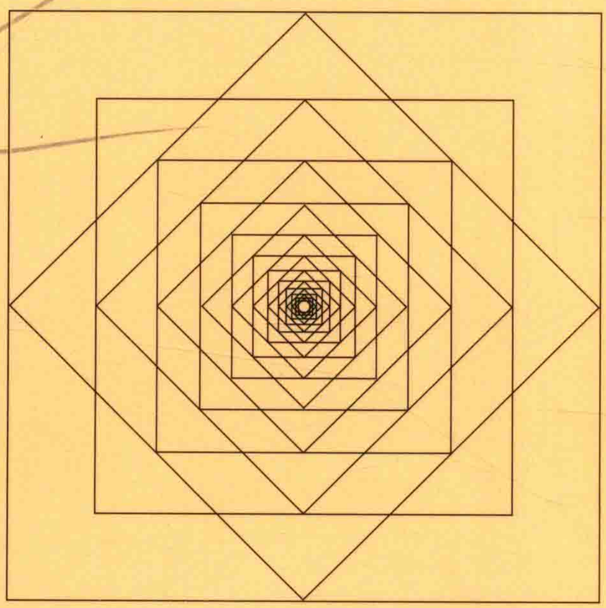
实用矩阵分析基础

Fundamental to Practical Matrix Analysis

时 宝 刘孝磊 盖明久 周 刚 毛 凯 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

实用矩阵分析基础

Fundamental to Practical Matrix Analysis

时　宝　刘孝磊　盖明久　周　刚　毛　凯　编著

国防工業出版社
National Defense Industry Press
·北京·

内容简介

全书共分为9章：第1章介绍度量空间、线性空间和内积空间的基本概念；第2章介绍矩阵的Smith标准形和Jordan标准形这两个重要的标准形概念及其计算，还介绍了很有用的Schur引理和Hermite二次型等；第3章介绍赋范线性空间的概念，向量和矩阵的范数理论，谱半径的估计等；第4章介绍矩阵序列与矩阵级数、Hamilton-Cayley定理及其应用、最小多项式、矩阵函数和函数矩阵；第5章介绍矩阵和函数矩阵在求解线性系统和离散线性系统中的应用，以及在线性控制系统中可控性、可观性和传递矩阵概念上的应用；第6章介绍矩阵的三角分解、Schmidt QR分解内容、满秩分解、谱分解和Beltrami-Jordan奇异值分解等；第7章介绍矩阵特征值的估计、Gershgorin圆盘定理和Hermite矩阵特征值的估计等；第8章介绍了常用的各种广义逆矩阵的概念、性质和计算方法，以及在求解线性方程组中的应用；第9章介绍几类重要矩阵的概念，包括非负矩阵、M矩阵、稳定矩阵、矩阵方程和线性矩阵不等式（LMI）等。

本书适合高校（包括军校）高年级学生和理工专业硕士研究生学习和研究之用，也可供高校（包括军校）教师教学和科研参考。

图书在版编目（CIP）数据

实用矩阵分析基础/时宝等编著. -- 北京：国防工业出版社, 2018. 6

ISBN 978-7-118-11470-6

Ⅰ.①实… Ⅱ.①时… Ⅲ.①矩阵分析 Ⅳ.①TN701

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第278801号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码 100048)

三河市众誉天成印务有限公司

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 **印张** 22½ **字数** 440千字

2018年6月第1版第1次印刷 **印数** 1—2000册 **定价** 49.00元

国防书店: (010) 88540777 发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755 发行业务: (010) 88540717

前　　言

本来矩阵分析可以作为线性代数的一部分, 但由于它在各种学科中所具有的重要作用, 人们通常把它单独拿出来, 作为硕士研究生的必修内容. 本书就是这样来处理的.

先非常简单地回顾一下线性代数 (包括矩阵分析) 的发展历程.

线性代数可以认为是由 P. Fermat① 和 R. Descartes② 开创的, 这应该是 1636 年左右的事情. 但直到 18 世纪末, 线性代数也还是局限在平面和空间的范畴.

1801 年, J. Gauss③ 在著作 "Disquisitiones arithmeticae" 中给出了 "行列式" 一词.

1804 年, B. Bolzano④ 发表的关于初等几何基础的著作给出了最早的向量概念, 其中点、线、面是无定义的元素, 而只定义它们的运算. 这是向几何公理化的重要一步, 是线性空间概念抽象化的早期推动.

---

① Pierre de Fermat (1601.08.17—1665.01.12), 法国人, 微积分学的先驱, 被称为 "业余数学家之王".

② René Descartes (1596.03.31—1650.02.11), 法国人, 解析几何的开创者, 人们在他的墓碑上刻下了这样一句话: "Descartes, 欧洲文艺复兴以来, 第一个为人类争取并保证理性权利的人", 他是欧洲近代哲学的奠基人之一, G. Hegel 称他为 "现代哲学之父".

③ Johann Carl Friedrich Gauss (1777.04.30—1855.02.23), 德国人, 与 Archimedes of Syracuse 和 Sir I. Newton 并称 "三大数学家"; 1812 年第一次对级数的收敛性进行系统研究, 开创了级数收敛性研究的新时代; 1801 年奠定近代数论的基础; 1809 年还提出正态分布; 1828 年奠定近代微分几何的基础; P. Laplace 认为他是世界上最伟大的数学家, 有 "数学王子" 之称.

④ Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781.10.05—1848.12.18), 捷克人, 与 K. Weierstrass 独立地给出了处处连续而无处可微的函数.

1850 年, J. Sylvester① 给出了 “矩阵” 这个术语.

在 1853—1858 年间, A. Cayley② 在 “Memoir on the theory of matrices” 中首次引入了 n 维向量空间的概念和矩阵的概念及其运算, 给出了行列式的标准记号, 他详细地讨论了矩阵的性质, 得到了著名的 Hamilton③-Cayley 定理而成为了矩阵理论的先驱. 他的矩阵理论后来产生了很大的影响. 在第 4 章将给予重点介绍.

到 1870 年, 因为 M. Jordan④ 在 “Treasure on substitutions and algebraic equations” 的工作中提出了 Jordan 标准形概念而使矩阵理论达到了其顶点. 在第 2 章将给予重点介绍并且贯穿全书.

到 1888 年, G. Peano⑤ 第一个给出了实线性空间的公理化定义, 几乎包含了线性空间和线性代数的现代引入. 他还给出了维数概念, 证明有限维线性空间有基, 给出了无限维线性空间的例子, 定义了线性算子, 以及线性算子的和与积. 线性空间的公理化理论是第 1 章的主要内容.

1907 年, Bôcher⑥ 的重要著作 “Introduction to higher algebra” 让矩阵理论占据了数学中的适当位置.

后来, O. Toeplitz⑦ 将线性代数的主要定理推广到了一般的向量空间中.

在读者已有微积分学和线性代数等知识的基础上, 本书比较详细地讨论矩阵分析的基础理论及其应用.

下面来谈谈本书的内容安排.

全书共分为 9 章:

第 1 章介绍度量空间、线性空间、线性变换和内积空间的基本概念, 还简要介绍线性空间概念的发展简史, 其中包括重要的一致连续性和一致收敛性、开集与闭集等微积分中基本的概念和定理, 对理解数学概念以及将来在攻读博士学位时能更好地理解无穷维情形的泛函分析打下一定的基础;

第 2 章介绍矩阵的 Smith⑧ 标准形和 Jordan 标准形这两个重要的标准形

---

① James Joseph Sylvester (1814.09.03—1897.03.15), 英国人.

② Arthur Cayley (1821.08.16—1895.01.26), 英国人.

③ Sir William Rowan Hamilton (1805.08.04—1865.09.02), 爱尔兰人, 在研究四元数的时候给出过 Hamilton-Cayley 定理的特殊情形.

④ Marie Ennemond Camille Jordan (1838.01.05—1922.01.22), 法国人, 他给出了简单闭曲线将平面分成两个部分的 Jordan curve theorem, 即通常所称的 Jordan 引理.

⑤ Giuseppe Peano (1858.08.27—1932.04.20), 意大利人, 1889 年给出用集合定义自然数的 Peano 公理; 1890 年第一次构造出充满正方形的连续曲线的例子.

⑥ Maxime Bôcher (1867.08.28—1918.09.12), 美国人.

⑦ Otto Toeplitz (1881.08.01—1940.02.15), 波兰人.

⑧ Henry John Stephen Smith (1826.11.02—1883.02.09), 爱尔兰人, 将 J. Gauss 的实二次型理论推广到复二次型理论.

概念及其计算, 还介绍了很有用的 Schur① 引理和 Hermite② 二次型等;

第 3 章介绍赋范线性空间的概念, 向量和矩阵的范数理论, 谱半径的估计等;

第 4 章介绍矩阵序列与矩阵级数、Hamilton-Cayley 定理及其应用、最小多项式、矩阵函数和函数矩阵, 还像在微积分中一样, 以极限理论为基础介绍函数矩阵理论基础, 包括极限、连续、可导、可积等, 即函数矩阵的微积分, 包括对矩阵变量的导数;

第 5 章专门详细地介绍矩阵和函数矩阵在求解定常和非定常线性系统和离散线性系统、定常和非定常高阶线性系统和离散线性系统中的应用, 以及在定常线性控制系统和离散线性控制系统中可控性、可观性和传递矩阵概念上的应用;

第 6 章介绍矩阵的各种分解, 包括三角分解 (Gauss LU 分解和 Schmidt③ QR 分解)、满秩分解、谱分解和 Beltrami④-Jordan 奇异值分解等;

第 7 章介绍矩阵特征值的估计、Gershgorin⑤ 圆盘定理和 Hermite 矩阵特征值的估计等;

第 8 章比较详细地介绍广义逆矩阵的概念、性质和计算方法, 主要包括 $\{1\}$-广义逆矩阵、$\{1,2\}$- 广义逆矩阵、$\{1,3\}$- 广义逆矩阵、$\{1,4\}$- 广义逆矩阵和伪逆矩阵等, 以及在求解线性方程组中的应用.

如学时不够, 前面章节的部分内容和第 9 章可以作为选讲内容或作为研究生的自学内容, 其中第 9 章比较详细地介绍几类重要矩阵的概念, 包括非负矩阵、M 矩阵、稳定矩阵、矩阵方程和线性矩阵不等式 (LMI) 等, 它们在工程应用中有重要应用.

其中, 第 1 章增写了度量空间的内容, 还包括重要的一致连续性和一致收敛性、开集与闭集等微积分中基本的概念和定理; 第 3 章将范数概念改写为赋范线性空间的概念; 为了突出本书的实用性, 第 4 章增加了 Hamilton-Cayley 定理的应用; 由原来第 4 章的部分内容扩充, 专门在第 5 章中介绍矩阵和函数矩阵在求解线性系统和离散线性系统、高阶线性系统和高阶离散线性系统中的应用, 以及在线性控制系统和离散线性控制系统中可控性、可观性和传递矩阵概念上的应用; 第 6 章细化了 Schmidt QR 分解内容, 并且增加了矩阵的谱分解内容; 第 7 章细化了 Gershgorin 圆盘定理和 Hermite 矩阵特征值的估计等, 增加了镶

---

① Issai Schur (1875.01.10—1941.01.10), 白俄罗斯人, F. Frobenius 的学生.

② Charles Hermite (1822.12.24—1901.01.14), 法国人.

③ Erhard Schmidt (1876.01.13—1959.12.06), 德国人, 现代抽象泛函分析的奠基者之一.

④ Eugenio Beltrami (1835.11.16—1900.02.18), 意大利人, 最重要的工作是给出了非 Euclid 几何的具体实现.

⑤ Semyon Aranovich Gershgorin (1901.08.24—1933.05.30), 白俄罗斯人.

边矩阵的概念与基本性质; 为了使研究生更全面地了解在工程技术上有着重要应用的广义逆矩阵理论, 第 8 章对广义逆矩阵的概念、性质和计算方法进行了系统的改写; 而第 9 章的内容是新增加的, 都在将来的学习与工作中是十分有用的内容, 主要是作为选讲内容或作为研究生的自学内容.

本书是对作者 2010 年编写的《矩阵分析引论及其应用》一书进行增写和改写的基础上完成的, 习题也有较大的增加. 还顺便对原书的一些不当之处和错误进行了改正.

本书整个内容的选取是根据作者多年在科学研究、军校理工专业硕士研究生和博士研究生教学过程中所获得的一些体会. 在编撰过程中, 借鉴了书后参考文献中的部分内容, 在这里表示感谢.

本书可以与作者《实用泛函分析基础》视为姊妹篇, 书中特别注意了它们内容的前后衔接以及叙述方式的一致性.

本书适合高校 (包括军校) 高年级学生和理工专业硕士研究生学习及研究之用, 也可供高校 (包括军校) 教师教学和科研参考.

由于作者水平有限, 再加上时间比较仓促, 谬误之处在所难免, 并且只能挂一漏万, 敬请读者和同行不吝以各种方式赐教.

编著者

2017 年 11 月于烟台

目　　录

第 1 章 线性空间与线性变换

线性空间和线性变换是现代矩阵理论经常用到的两个概念, 线性代数对这两个概念已做了初步的介绍. 本章将进一步介绍线性空间与线性子空间, 线性变换及其矩阵表示, 特征子空间的基本理论.

1.1 度量空间

矩阵分析的基础是建立在具有两种结构的集合 (set) 之上的, 一种是代数结构即线性结构, 另一种就是拓扑结构即度量结构. 这一节研究的度量空间是基本的拓扑结构, 其在矩阵分析理论及其应用中是最基本的, 是极为有用的, 是描述极限和连续性这些分析属性的一般框架.

1.1.1 一致连续性与一致收敛性

这一小节介绍一致连续性与一致收敛性的概念, 它们在工科微积分中几乎不提, 然而在深入学习数学时是回避不了的.

为了对比学习一致连续性, 先回顾一下大家在微积分中已经熟悉的连续性定义.

定义 1.1.1 设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, $x_0 \in I$.

(1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在点 $x_0 \in I$ 是连续的 (continuous);

(2) 若 $f(x)$ 在每个点 $x \in I$ 都是连续的, 则称其在区间 I 上是连续的.

Riemann[①] 函数 (Riemannian function)

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p, q \text{ 是互素整数}, q>0, \\ 0, & x \text{是无理数}\end{cases}$$

有非常奇妙的性质, 它在每个无理点上是连续的, 而在每个有理点上是不连续的.

连续性定义有等价的 Heine[②] 归结定理, 它表明序列 (sequence) 的收敛性在研究函数的连续性时是非常重要的, 会经常用到.

定理 1.1.1 (Heine 归结定理, Heine resolution theorem) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $|x_n-x_0|\to 0$, $n\to\infty$ 蕴涵着 $|f(x_n)-f(x_0)|\to 0$, $n\to\infty$.

证明 必要性. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 令 $x_n\to x_0$, $n\to\infty$, 则存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-x_0|<\delta$. 因此, 对任意的 $n>N$, 都有 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$.

充分性. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不是连续的, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的正整数 n, 都存在 $x_n\neq x_0$, 它虽然满足 $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$. 显然, $x_n\to x_0$, $n\to\infty$. 但 $f(x_n)\not\to f(x_0)$, $n\to\infty$. 矛盾. 证完. □

H. Heine 给出的一致连续性概念, 它是比较精细的概念, 是整体性概念, 是深入学习数学不可回避的基本概念, 在这里进行补充学习.

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 是区间 I 上的函数. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x_1, x_2\in I$, $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的 (uniformly continuous).

定理 1.1.2 (1) 一致连续函数是连续的; (2) 一致连续函数在任意子区间上是一致连续的.

下面的例子说明连续函数不一定是一致连续的.

例 1.1.1 连续函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不是一致连续的.

证明 事实上, 可以用反证法 (proof by contradiction/reduction to absurdity)

① Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826.09.17—1866.07.20), 德国人, 人们认为他把数学向前推进了几代人的时间.

② Heinrich Eduard Heine (1821.03.16—1881.10.21), 德国人.

来证明. 若不然, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(0,1)$, $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}<1$$

令 $n\geqslant 2$, $x'=\frac{1}{n}$, $x''=\frac{1}{2n}$, 则 $|x'-x''|=\frac{1}{2n}$, $|f(x')-f(x'')|=n\geqslant 2>1$. 故只要取 $n>\frac{1}{2\delta}$ 就引出矛盾, 从而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不是一致连续的. 证完. □

关于一致连续性的 Cantor[①] 定理是很重要的结论. 为此, 先介绍几个有关实数理论的结果, 其中, 确界概念是深入学习数学不可回避的基本概念, 有必要在这里进行补充学习.

先回顾上下界的概念.

定义 1.1.3 设 A 是非空实数集 (nonempty set of real numbers).

(1) 若存在 u, 使得对任意的 $a\in A$, 有 $a\leqslant u$, 则称其为集合 A 的上界 (upper bound);

(2) 若存在 ℓ, 使得对任意的 $a\in A$, 有 $a\geqslant \ell$, 则称其为集合 A 的下界 (lower bound).

非空实数集若有上界则不存在最大的. 例如, 2 是 $[0,1]$ 的上界, 然而, $3,4,\cdots$ 都是 $[0,1]$ 的上界, 不存在最大的. 类似地, 非空实数集若有下界则也不存在最小的.

下面给出上下确界的概念.

定义 1.1.4 设 A 是非空实数集.

(1) 若集合 A 有上界, 则称其最小上界为上确界 (supremum), 记为 $\sup A$;

(2) 若集合 A 有下界, 则称其最大下界为下确界 (infimum), 记为 $\inf A$.

从中可看到, 若集合 A 有最大值 (maximum) 或最小值 (minimum), 则必是其上确界或下确界. 例如, $[0,1]$ 的最大值 1 就是其上确界 (最小值 0 就是其下确界).

然而, 若集合无最值, 其确界有没有? 应该怎么来确定? 例如, $(0,1)$ 无最值. 对此, 有 J. Dedekind[②] 的确界公理. 事实上, 大多数人讨论实数理论都是从这个公理来出发的.

① Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.03.03—1918.01.06), 德国人, 是他一个人独自创立了集合论.

② Julius Wihelm Richard Dedekind (1831.10.06— 1916.02.12), 德国人.

公理 1.1.1 (Dedekind 确界公理, Dedekind completeness axiom) 有上界的非空实数集有上确界.

Dedekind 确界公理也可以等价地写为: 有下界的非空实数集有下确界.

对无上界的实数集 (set of real numbers) A, 约定 $\sup A = +\infty$; 对无下界的实数集 A, 约定 $\inf A = -\infty$. 这样就可将 Dedekind 确界公理 (公理 1.1.1) 修改为广义的形式: 非空实数集有确界.

必须强调, 它在实数集中才成立, 而在有理数集 (set of rational numbers) 中不成立.

例 1.1.2 考虑由 $\sqrt{2}$ 做成的序列: $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, \cdots$, 它所构成集合 $A = \{a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, \cdots\}$ 的上确界是 $\sqrt{2}$, 然而, 它是无理数, 并不在这个有理数集中.

由上确界定义有下面的结论.

定理 1.1.3 实数 β 是集合 A 上确界的充要条件是

(1) β 是 A 上界, 即对任意的 $a \in A$, 都有 $a \leqslant \beta$;

(2) 比 β 小的实数不是 A 上界, 即对任意的 $\beta' < \beta$, 存在 $a' \in A$, 使得 $a' > \beta'$.

类似地, 由下确界定义有下面的结论.

推论 1.1.1 实数 α 是集合 A 下确界的充要条件是

(1) α 是 A 下界, 即对任意的 $a \in A$, 都有 $a \geqslant \alpha$;

(2) 比 α 大的实数不是 A 下界, 即对任意的 $\alpha' > \alpha$, 存在 $a' \in A$, 使得 $a' < \alpha'$.

可以看到 $(0,1)$ 无最值, 但 $\sup(0,1) = 1$, $\inf(0,1) = 0$. 这说明确界可不在集合中.

下述定理和推论给出确界和序列之间的密切联系.

定理 1.1.4 设实数集 A 有上确界, $\beta = \sup A$. 则存在序列 $\{a_n\} \subseteq A$, 使得 $a_n \to \beta$, $n \to \infty$.

事实上, 由上确界定义, 对任意的正整数 n, 存在 $a_n \in A$, 使得 $\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta$, 故 $a_n \to \beta$, $n \to \infty$.

推论 1.1.2 设实数集 A 有下确界, $\alpha = \inf A$. 则存在序列 $\{a_n\} \subseteq A$, 使得 $a_n \to \alpha$, $n \to \infty$.

下面给出聚点的概念.

定义 1.1.5 设 A 是非空实数集. 若对任意的 $\varepsilon>0$, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内至少存在不同于 a 的点属于 A, 则称 a 为集合 A 的聚点 (accumulation point).

例 1.1.3 $(0,1]$ 的每个点都是聚点. $0\notin(0,1]$, 但它也是聚点; 而 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的每个点都不是聚点. $0\notin\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 但它是聚点.

例 1.1.4 设集合 A 是 $(0,1)$ 内的所有有理数, 则 $[0,1]$ 的每个点都是 A 的聚点.

下面给出重要的子序列概念和 Bolzano-Weierstrass① 定理.

定义 1.1.6 设 $\{x_n\}$ 是无限序列, $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 是一串趋于 $+\infty$ 的自然数, 则 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的子序列 (subsequence).

例如, 序列 $2,4,\cdots,2n,\cdots$ 就是正整数序列的子序列.

关于子序列可以证明下述结论.

定理 1.1.5 (1) 收敛序列的任意子序列都是收敛的, 并与原序列有相同极限; (2) 序列的两个子序列有不同极限, 则原序列是发散的.

定理 1.1.6 (Bolzano-Weierstrass 定理, Bolzano-Weierstrass theorem) 有界序列有收敛子序列.

现在给出关于一致连续性的 Cantor 定理.

定理 1.1.7 (Cantor 定理, Cantor theorem) 闭区间上的连续函数是一致连续的.

证明 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 若它不是一致连续的, 则存在 ε_0, 对任意的 n, 存在 $x_n,x_n'\in[a,b]$, 满足 $|x_n-x_n'|<\frac{1}{n}$, 使得 $|f(x_n)-f(x_n')|\geqslant\varepsilon_0$.

由于序列 $\{x_n\}$ 的有界性, 由 Bolzano-Weierstrass 定理 (定理 1.1.6) 可知, 存在收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\to\xi$, $k\to\infty$. 从而由 $x_{n_k}-\frac{1}{n_k}<x_{n_k}'<x_{n_k}+\frac{1}{n_k}$; 序列 $\{x_n'\}$ 的对应子序列 $\{x_{n_k}'\}$ 也收敛于 ξ, 即 $x_{n_k}'\to\xi$, $k\to\infty$.

由于函数 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 当 $x',x''\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 时, 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$.

---

① Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815.10.31—1897.02.19), 德国人, 被称为 "现代分析之父"; 他更大的贡献是培养了众多的伟大数学家, 如 H. Bachmann, O. Bolza, G. Cantor, F. Engel, F. Frobenius, L. Gegenbauer, K. Hensel, O. Hölder, A. Hurwitz, W. Killing, F. Klein, A. Kneser, L. Königsberger, M. Lerch, S. Lie, J. Lueroth, F. Mertens, H. Minkowski, G. Mittag-Leffler, E. Netto, F. Schottky, K. Schwarz 和 O. Stolz 等.