非线性动力学丛书

26

旋转流体动力学
——混沌、仿真与控制

王贺元 著

科学出版社

非线性动力学丛书 26

旋转流体动力学
——混沌、仿真与控制

王贺元 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了同心球间及同轴圆筒间旋转流动的动力学行为及其数值仿真问题，包含了著者近二十年在这一领域所取得的代表性研究成果，包括如下四方面内容：Navier-Stokes 方程分歧点的谱 Galerkin 逼近；同心球间旋转流动对称破缺分歧及 TB 点的谱 Galerkin 逼近；同轴旋转圆筒间的 Couette-Taylor 流的数值模拟；两种旋转流动动力学行为的低模分析以及混沌控制与同步及其数值仿真.

本书可供理工科院校的数学、流体力学、航空航天、地球物理等相关专业的教师、研究生和高年级本科生以及流体机械等工程实践领域科技工作者开展相关研究与应用时使用，也可供航空航天、大气物理等相关部门参考.

图书在版编目(CIP)数据

旋转流体动力学：混沌、仿真与控制/王贺元著. —北京：科学出版社，2018.6

(非线性动力学丛书；26)

ISBN 978-7-03-058058-0

Ⅰ. ①旋…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ.①流体动力学-研究　Ⅳ.①O351.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 132903 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第　一　版　开本：720×1000　B5
2018 年 6 月第一次印刷　印张：15
字数：300 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“非线性动力学丛书”序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素，诸如机械系统中的间隙、干摩擦，结构系统中的材料弹塑性、构件大变形，控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等。实践中，人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统，以方便地获得其动力学行为的某种逼近。然而，被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差，使得线性逼近成为一场徒劳。特别对于系统的长时间历程动力学问题，有时即使略去很微弱的非线性因素，也会在分析和计算中出现本质性的错误。

因此，人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题。早期研究可追溯到 1673 年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察。从 19 世纪末起，Poincaré，Lyapunov，Birkhoff，Andronov，Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究，Duffing，van der Pol，Lorenz，Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现。他们的杰出贡献相辅相成，形成了分岔、混沌、分形的理论框架，使非线性动力学在 20 世纪 70 年代成为一门重要的前沿学科，并促进了非线性科学的形成和发展。

近 20 年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展。这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题，采用非线性动力学理论和方法对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略。一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂的非线性动力学现象具有正确的认识和理解。

近年来，非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展。伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高，已逐步接近一些实际系统。在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化。人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响，使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求，而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类。

在这样的背景下，有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套“非线性动力学丛书”，着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展，特别是我国学者的研究成果，为

从事非线性动力学理论及应用研究的人员，包括硕士研究生和博士研究生等，提供最新的理论、方法及应用范例。在科学出版社的大力支持下，我们组织了这套“非线性动力学丛书”。

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的“非线性科学丛书”(上海教育出版社出版)，它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验。与国外的同类丛书相比，它更具有整体的出版思想，每分册阐述一个主题，互不重复。丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果，有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践，还有一些选题取自作者多年的教学成果。

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力，使这套丛书取得成功。

胡海岩

2001 年 8 月

前　言

混沌被认为是继相对论、量子力学之后的又一重大科学发现, 混沌现象普遍存在于自然界和人类社会中的这一事实已被广泛接受, 目前人们对混沌运动的规律及其在各个科学领域的表现已经有了丰富的认识, 如何应用混沌研究的成果为人类服务已成为非线性科学的重要课题之一. 流动的稳定性和流体的分岔与混沌问题密切相关, 是应用数学和计算数学领域的重大课题之一, 也是重大难题. 稳定性发生变化, 流动的形态就会发生突变. 有人曾提出, 逐次分岔会导致其行为向混沌过渡, 与此有关的数学理论可用来说明湍流生成的机理. 无论在理论上还是计算上, Navier-Stokes 方程都是物理和工程科学中的重大难题. 在美国 Clay 数学研究所发布的千禧年七大数学难题中, Navier-Stokes 方程解的正则性就是其中之一, 而计算上的困难也一直困扰着科学家们. 同心球间及同轴圆筒间旋转流动是两种典型的旋转流体流动问题, 在轴承润滑理论、流体机械、航空航天、地球物理等工程实践领域有着广泛的应用, 随雷诺数的增大, 这两种旋转流动在从稳态层流发展到湍流的过程中, 表现出丰富的、典型的非线性动力学行为, 它们所对应的无穷维非线性动力系统解的长时间行为及其数值逼近问题是非线性科学的一项重大课题, 其中的系统稳定性, 随参数变化系统的分岔行为以及从分岔到混沌过渡方式等问题在理论和应用上都是极其重要的.

本书将围绕这些相关问题展开讨论, 系统总结了同心球间及同轴圆筒间旋转流体的动力学行为及其数值仿真问题, 包含了作者近二十年在这一领域所取得的代表性研究成果, 包括如下四方面内容: Navier-Stokes 方程简单分歧点的谱 Galerkin 逼近; 同心球间旋转流动的对称破缺分歧及 TB 点的谱 Galerkin 逼近; 同轴旋转圆筒间的 Couette-Taylor 流的数值模拟; 同心球间及同轴圆筒间旋转流动的类 Lorenz 系统的定常分岔问题和动力学行为分析以及混沌控制与同步及其数值仿真.

第 1 章是绪论, 简要介绍了本书的研究内容和研究背景.

第 2 章研究了 Navier-Stokes 方程分歧点的谱 Galerkin 逼近, 构造了定常的 Navier-Stokes 方程非退化简单分歧点的扩充系统及其谱 Galerkin 逼近系统, 证明了非退化简单分歧点的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 运用 Stokes 算子的特征值负指数幂, 给出谱 Galerkin 逼近的 H^1 范数下的误差估计. 运用分块迭代技巧求解扩充系统的正则解, 从而为 Navier-Stokes 方程非退化简单分歧点的数值逼近提供了有效的算法.

第 3 章研究了同心球间旋转流动对称破缺分歧及球 Couette 流的谱 Galerkin

逼近问题, 首先构造了同心球间旋转流动 Navier-Stokes 方程对称破缺分歧点及 TB 点扩充系统的谱 Galerkin 逼近系统, 证明了谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 通过 Stokes 算子的特征值给出谱逼近的误差估计; 其次根据所构造的扩充系统导数的具体形式, 采用分块分裂迭代等技巧计算了对称破缺分歧点及 TB 点, 不仅减少了计算量, 而且获得了高阶收敛性. 最后给出了同心球间旋转流动 Navier-Stokes 方程的流函数-涡度形式, 推导了球间隙区域 Stokes 算子特征函数的解析表达式, 证明了其正交性, 并对特征值进行了估计; 利用所求出的 Stokes 算子的特征函数作为逼近子空间的基函数, 给出了球 Couette 流的谱 Galerkin 逼近方程, 证明了其非奇异解的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 并给出谱 Galerkin 逼近的误差估计和数值计算结果.

第 4 章利用谱方法对轴对称的旋转圆筒间的 Couette-Taylor 流进行数值模拟, 首先推导了 Navier-Stokes 方程在柱坐标下的流函数形式; 其次给出了 Stokes 算子特征函数的解析表达式, 证明其正交性, 并对特征值进行估计; 最后利用所求出的 Stokes 算子的特征函数作为逼近子空间的基函数, 给出了 Couette-Taylor 流的谱 Galerkin 逼近方程, 证明了其非奇异解的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 并给出谱 Galerkin 逼近的误差估计和数值计算结果.

第 5 章讨论同心球间旋转流动的低模分析问题及数值仿真问题, 对同心球间旋转流动的 Navier-Stokes 方程谱展开后进行模态截断, 讨论所得到的类 Lorenz 方程组在定常情形下的分歧问题. 寻找其静态奇异点, 确定奇异点的类型, 并计算出解分支. 讨论了球 Couette 流低模态类 Lorenz 型方程组的动力学行为, 包括平衡态的稳定性、极限环的出现、吸引子的存在性及其数值仿真等相关问题.

第 6 章讨论同轴圆筒间旋转流动的低模分析问题及混沌控制与同步及其数值仿真问题, 对同轴圆筒间旋转流动的 Navier-Stokes 方程谱展开后进行模态截断, 讨论所得到的类 Lorenz 方程组在定常情形下的分歧问题. 寻找其静态奇异点, 确定奇异点的类型. 探讨了同轴圆筒间旋转流动的 Couette-Taylor 流的部分动力学行为及仿真问题. 讨论了 Couette-Taylor 流三模态类 Lorenz 型方程组的动力学行为, 包括定态的失稳、极限环的出现、吸引子的存在性及其 Hausdorff 维数上界的估计、分岔与混沌的演变和全局稳定性分析等, 通过线性稳定性分析和数值模拟等方法给出了此三维模型分岔与混沌等动力学行为及其演化历程, 并借此解释了 Couette-Taylor 流实验中观察到的部分涡流的演化过程. 基于系统的分岔图、Lyapunov 指数谱、功率谱、庞加莱 (Poincaré) 截面和返回映射等指标揭示了系统混沌行为的普适特征. 讨论了旋转流动的低模系统的混沌控制与同步及其数值仿真问题.

本书的特色是数值仿真结合低模分析方法. 无穷维动力系统复杂的动力学行为通常源于简单的起源, 要解释和预测无穷维动力系统的混沌现象, 通常采用有限模态的简化系统来进行低模分析, 这种低模分析 (维数约化) 方法, 其理论基础和依

据是惯性流形和近似惯性流形理论 (它们被认为是一种包含全局吸引子, 且指数吸引所有轨道的低维光滑流形), 有限维的演化方程必须能反映无穷维动力系统的动力学行为, 即保持无穷维动力系统的结构 (保辛), 然后利用数学中的分岔理论、突变论等分析演化方程的不稳定性、分歧混沌等动力学行为. 有限维演化方程中的状态变量通常称为序参量, 如果序参量中的一个或几个役使和支配其他的序参量, 这时演化系统 (方程) 通常是协调稳定的, 如果序参量不能相互役使和支配, 那么序参量间相互抗争而随机地起支配作用, 演化系统 (方程) 通常进入混沌状态, 这就是哈肯协同学的思想. 哈肯的协同学从广义上讲, 是将无穷维动力系统通过绝热消去法和寻找序参量使之约化为有限维动力系统, 并且认为有限维动力系统的性质可以代表无限维动力系统的性质. 我们并不知道它们在时间演化和空间模式两方面的差异究竟有多大, 不过, R. Temam 和 C. Foias 等引入的惯性流形的概念, 从理论上证明了上述的时间演化性质是一致的, 这对协同学无疑是一个重大贡献. 在讨论无穷维动力系统问题中引入惯性流形概念, 从理论上证实了一些无穷维动力系统可用有限维来代替, 并且给出了寻找有限维维数的一些方法. 由于惯性流形存在, 有限维动力系统的长时间演化结果就能代表无穷维动力系统的长时间演化结果. 普里高京和哈肯提出了研究复杂系统的新思想, 但并没有从理论上加以严格证明, 中心流形定理提供了在特殊情况下约化思想成立的理论依据, 现在无穷维动力系统的惯性流形理论又一次证明了约化思想的正确性, 而且更为重要的惯性流形说明在非中心流形情况下这种用不变流形约化系统的想法仍然成立. 由此我们可以猜想这种约化思想在更为普遍的情况下也是成立的. 这种简化模态的低模分析方法不但可以克服无穷维动力系统性质不好把握的困难, 而且所得到的简化模型方程组将包含非常丰富而有意义的内容, 这对探讨动力系统的分岔、混沌等非线性现象是十分有意义的. 虽然简化的方程组的性态与原来无穷维动力系统的不尽相同, 但它可以把要模拟的自由度数减到最少, 同时又能抓住问题的某些本质特征, 这种用简单模型去反映复杂问题某些特性的低模分析方法是一种有价值的尝试.

在本书完成之际, 我对所有对本书做出贡献的人们表示衷心感谢.

本书的撰写和出版工作得到了国家自然科学基金项目 —— 同轴圆筒间旋转流动的吸引子及混沌仿真与控制 (编号 11572146)、辽宁省教育厅科学基金项目 —— 旋流式反应系统的混沌仿真及其控制与同步研究 (编号 L2013248) 和锦州市科技专项基金项目 —— 化学反应系统的混沌仿真及控制与同步研究 (编号 13A1D32) 的资助, 在此表示衷心的感谢.

作 者

2017 年 11 月 18 日

目　　录

符　号　表

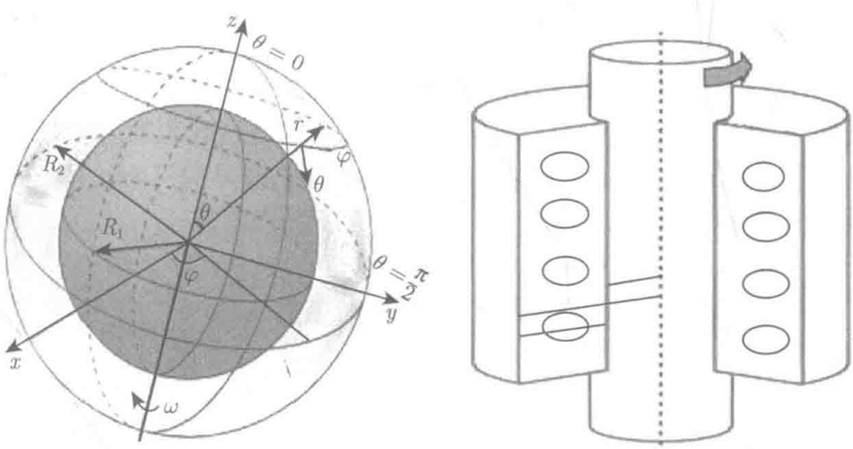
R	实数集
N	自然数集
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\subset$	包含于
$\oplus$	直和
$\overline{A}$	集合 A 的闭包
V'	空间 V 的对偶空间
$A\backslash B$	$\{x \in A : x \notin B\}$
$A\|_M$	算子 A 在 M 上的限制
A^{-1}	算子 A 的逆算子
A^*	算子 A 的共轭算子
$\ker(A)$	算子 A 的核空间
$\mathrm{Range}(A)$	算子 A 的像空间
$\mathrm{span}(A)$	由线性空间的子集 A 生成的线性子空间
$f'(x), \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$	一元函数 f 对变元 x 的导数
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	多元函数 f 对变元 x 的偏导数
$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$	函数 f 在区域 Ω 上的积分
$D_uA(u,v)$	算子 A 的 Fréchet 偏导数
DA	算子 A 的 Fréchet 全导数
D^nA	算子 A 的 n 阶 Fréchet 全导数
Δ, ∇^2	Laplace 算子
$U \times V$	空间 U 与空间 V 的乘积空间
V^d	空间 V 的 d 次乘积空间

$L^p(\Omega)(p \geqslant 1)$	Ω 上的 p 次可积函数全体
$H^1(\Omega)$	Ω 上的 L^2 可积且一阶弱导数 L^2 可积的函数的全体
$\|M\|$	矩阵 M 的行列式
$C(\Omega)$	Ω 上连续函数全体
$\sup_B f$	函数 f 在集合 B 上的上确界
$\inf_B f$	函数 f 在集合 B 上的下确界
$\max\{a, b\}$	数 a 和数 b 的最大值
$\min\{a, b\}$	数 a 和数 b 的最小值

第1章 绪 论

本书共包含如下四部分内容: Navier-Stokes 方程简单分歧点的谱 Galerkin 逼近; 同心球间旋转流动的对称破缺分歧及 Takens-Bogdanov 点 (TB 点) 的谱 Galerkin 逼近; 同轴旋转圆筒间 Couette-Taylor 流的数值模拟; 同心球间及同轴圆筒间旋转流动的 Navier-Stokes 方程谱展开后进行模态截断所得到的类 Lorenz 型方程组的定常分歧问题和动力学行为分析及混沌控制与同步及其数值仿真. 下面叙述这几部分内容的研究历史和现状, 我们的研究动机及主要结论.

流动现象是自然界和人类生产生活中最为常见的物理现象, Navier-Stokes 方程是流动现象应普遍遵循的偏微分方程, 这种典型的非线性方程刻画了流体的运动规律, 如大气运动、海洋流动、轴承润滑、透平机械内部流动等, 研究它对人们认识和控制湍流至关重要. 由于人们对非线性现象的本质认识有限, 因而数值模拟就成为一种十分有效的重要手段. 同心球间图 1.1(a) 及同轴圆筒间图 1.1(b) 两种旋转流动问题 (图 1.1) 的数值模拟均需要求解无穷维动力系统, 因而探讨有效的数值算法是至关重要的问题.



(a) (b)

图 1.1 两种旋转流动装置示意图

当雷诺数较小时, Navier-Stokes 方程的解是存在并且唯一的, 这时, 有许多较为有效的算法求解 Navier-Stokes 方程, 如谱方法、有限元法等. 当雷诺数较大时, Navier-Stokes 方程的解可能不唯一, 这时, 要求解 Navier-Stokes 方程, 就必须将奇异解和非奇异解分开讨论.

对于 Navier-Stokes 方程的非奇异解的有限元逼近, V. Girault 和 P. A. Raviart 在他们的专著[1] 中进行了详细讨论. F. Brezzi 等在文献 [2] 中研究了一般非线性方程的非奇异解分支的有限维逼近. 在文献 [3] 和 [4] 中, F. Brezzi 等对一般非线性问题的极限点和简单分歧点做了详细研究. 也有人利用扩充系统等方法研究了一般非线性问题的奇异解算法, 如雷晋干等[5], 王立周, 李开泰[6,7]. 但是, Navier-Stokes 方程的奇异解的有效算法方面的文献还较为少见.

对于 Navier-Stokes 方程的一般奇异解的有限维逼近, 情况复杂而困难, 这是因为, 牛顿法等经典算法在奇异点处已不适用. 而且一般情况下逼近方程不能保持原方程的奇点类型, 而是它的一个扰动. 由于 Navier-Stokes 方程的奇异解是和流体流动的分歧、湍流等现象紧密相连的, 因此有效地计算 Navier-Stokes 方程的奇异解又是非常重要的.

为简单起见, 用 $F(u,\lambda)=0$ 表示 Navier-Stokes 方程, 用 $F_m(u,\lambda)=0(m=1,2,\cdots)$ 表示 Navier-Stokes 方程的谱 Galerkin 逼近方程. 这里参数 $\lambda=1/\nu$, ν 为运动黏性系数, 问题的维数为 2 或 3. 众所周知, 当 λ 充分小时, Navier-Stokes 方程存在唯一解 u_c, 谱 Galerkin 逼近方程也存在唯一解 u_m, 且 u_m 收敛到 u_c, 并有如下误差估计 (参见文献 [8]):

$$|u_m-u_c|\leqslant c\lambda_{m+1}^{-1}, \tag{1.1}$$

$$\|u_m-u_c\|\leqslant c'\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

其中, $|\cdot|$ 表示 L^2 范数; $\|\cdot\|$ 表示 H^1 范数; $\lambda_i, i=1,2,\cdots$ 为 Stokes 算子的特征值; c,c' 为和 m 无关的正常数. 事实上, 当 λ 较小时, Navier-Stokes 方程的唯一解是它的非奇异解 (参见文献 [1] 和 [2]), 之所以能得到上述的逼近结果, 其本质在于解的非奇异性. 当 λ 比较大时, Navier-Stokes 方程的解是奇异的, 因此, 要给出一般情形下谱逼近的误差估计, 就应将非奇异解和奇异解分开考虑.

对于 Navier-Stokes 方程的非奇异解的谱 Galerkin 逼近, 文献 [7] 证明了如下结论: 设 u_c 是 Navier-Stokes 方程的非奇异解, 则存在 $m_0\in N$, $a>0$, 使当 $m>m_0$ 时, 存在唯一的 u_c^m 满足:

i) $\|u_c^m-u_c\|\leqslant a$,

ii) $F_m(u_c^m,\lambda)=0$,

且 u_c^m 也是 $F_m(u,\lambda)=0$ 的非奇异解, 并有类似于式 (1.1) 和 (1.2) 的误差估计:

$$|u_m-u_c|\leqslant c\lambda_{m+1}^{-1}, \tag{1.3}$$

$$\|u_c^m-u_c\|\leqslant c'\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

一般来说, 逼近方程不能保持原方程的奇点类型, 而是它的一个扰动. 比如在文献 [4] 中, Raviart 等研究了简单分歧点的情形. 奇点扰动后可能出现的奇点类型

的多少取决于奇点的余维数 (参见文献 [9]). 余维数越高, 扰动后出现的奇点类型也越多, 情况就越复杂. 对余维数为 0 的非退化转向点, 情况比较简单. 非退化转向点的扰动一定是非退化转向点.

在文献 [3] 中, Brezzi 等利用分歧方法, 详细研究了一般非线性方程的非退化转向点的有限维逼近, 并给出逼近的误差估计. 文献 [6] 用扩充系统的方法研究了 Navier-Stokes 方程最简单的奇异解 —— 非退化简单转向点的谱 Galerkin 逼近问题, 构造了 Navier-Stokes 方程的非退化简单转向点的扩充系统及其谱 Galerkin 逼近系统, 将求解 Navier-Stokes 方程的简单非退化转向点转化为求解这个扩充系统的非奇异解. 第 2 章将进一步研究 Navier-Stokes 方程的另一类奇异解 —— 非退化简单分歧点的谱 Galerkin 逼近问题, 我们拟采用谱方法, 构造扩充系统去研究 Navier-Stokes 方程简单分歧点的有限维逼近.

文献 [6] 证明了如下结论:

设 (u_c, λ_c) 是 $F(u,\lambda)=0$ 的非退化转向点,

$$\phi_c \in \ker[D_u F(u_c, \lambda_c)], \quad \|\phi_c\| = 1,$$

则存在 $m_0 \in N, a > 0$, 使当 $m > m_0$ 时, 存在唯一的 $(u_c^m, \lambda_c^m, \phi_c^m)$, 满足:

i) $|\lambda_c^m - \lambda_c| + \|u_c^m - u_c\| + \|\phi_c^m - \phi_c\| \leqslant a$,

ii) (u_c^m, λ_c^m) 是 $F_m(u,\lambda)=0$ 的非退化转向点,

$$\phi_c^m \in \ker[D_u F_m(\lambda_c^m, u_c^m)], \quad \|\phi_c^m\| = 1,$$

且有误差估计

$$|\lambda_c^m - \lambda_c| + |u_c^m - u_c| + |\phi_c^m - \phi_c| \leqslant c\lambda_{m+1}^{-1}, \tag{1.5}$$

$$|\lambda_c^m - \lambda_c| + \|u_c^m - u_c\| + |\phi_c^m - \phi_c\| \leqslant c'\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

用类似的方法, 本书第 2 章研究了 Navier-Stokes 方程简单分歧点的谱 Galerkin 逼近问题, 通过把 Navier-Stokes 方程 $F(u,\lambda)=0$ 嵌入扩充系统 $T(u,\lambda,u_1,u_2,u_3)=0$ 中, 构造其逼近系统 $T_m(u,\lambda,u_1,u_2,u_3)=0$, 得到如下结论:

若 (u_0, λ_0) 是 Navier-Stokes 方程的非退化简单分歧点, 设 $\|DT(x_0)^{-1}\| \leqslant M$, 则存在 $m_0 \in N, a > 0$, 使当 $m > m_0$ 时, 存在唯一的谱 Galerkin 逼近 $x_0^m = (u_0^m, \lambda_0^m, \phi_0^m, \phi_0^{*m}, v_0^m)$, 满足:

$$T_m(u_0^m, \lambda_0^m, \phi_0^m, \phi_0^{*m}, v_0^m) = 0,$$

并有如下误差估计:

$$||u_0 - u_0^m|| + ||\phi_0 - \phi_0^m|| + ||\phi_0^* - \phi_0^{*m}|| + ||v_0 - v_0^m|| + |\lambda_0 - \lambda_0^m| \leqslant c\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$