学校"十三五"规划教材

数学建模与数学实验

（第二版）

◎主编　曹建莉　肖留超　程涛

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高　　　　　　　　教材

数学建模与数学实验

（第二版）

主　编　曹建莉　肖留超　程　涛
副主编　焦万堂　王　磊　党　健　王俊岭

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书介绍数学建模和数学实验中的一些基本知识以及数学建模竞赛中的一些典型问题，主要内容包括数学建模概论、初等数学模型、微分方程与差分方程模型、随机模型、规划模型、图论模型、其他模型、Mathematica 软件简介、LINDO 软件简介等。本书所举案例均具有很强的实践性和针对性，其中的数学实验以数学软件为平台，将数学知识与计算机操作方法有机地融为一体。

本书可作为高等学校各专业学生数学建模与数学实验课程的教材，也可供相关专业的研究生、教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验/曹建莉，肖留超，程涛主编. —2 版. —西安：西安电子科技大学出版社，2018.8

ISBN 978－7－5606－5006－7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①曹… ②肖… ③程… Ⅲ. ①数学模型 ②高等学校—实验 Ⅳ. ①O141.4 ②O13－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 163977 号

策划编辑　秦志峰
责任编辑　买永莲
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2018 年 8 月第 2 版　2018 年 8 月第 2 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　18.5
字　　数　438 千字
印　　数　3001～5000 册
定　　价　42.00 元

ISBN 978－7－5606－5006－7/O

XDUP　5308002－2

前　言

本书上一版自2014年2月出版以来，承蒙广大教师和学生的厚爱，已被多所学校选用为数学建模课程和数学建模竞赛的辅助教材。本书作为河南工业大学的校级规划教材，是数学类专业的数学模型课教材，也是面向全校开设的数学建模公选课教材，还是各类数学建模竞赛的培训教材。目前河南工业大学的数学建模公选课已入选第一批校级精品通识平台公选课，数学类专业的数学模型课也被河南工业大学理学院以优培课程方式进行了立项资助建设。在此，对学校和学院的支持表示衷心的感谢。

在长期的教学实践中，数学建模课程组定期研讨，总结经验，结合数学建模发展现状和最新竞赛数据，对本书的内容和结构又有了一些新的思考。同时，广大读者在阅读和学习过程中也对本书提出了新的期望和建议。因此，本书在保持第一版清晰易懂、便于自学的基础上，对其中的部分内容进行了更新和修订。

本次修订的主要内容有以下三个方面：第一，对上一版中存在的疏漏进行了订正；第二，调整、删减和合并了部分章节，如将第2章中的2.1.3节内容合并到2.1.2节，将2.2.4节内容合并到第7章的7.6.1节，删减了第3章3.1.2节和3.5.3节中的部分例题，将第4章的4.1.2节内容合并到4.1.1节，将4.1.3节内容调整为4.1.2节，将4.1.4节和4.1.5节内容合并到4.1.3节，将4.1.6节和4.1.7节内容合并到4.1.4节，将第7章的7.2.4节内容合并到7.2.1节，删减了原7.2.2节内容，将7.2.5节修改为7.2.2节，将7.4.2节内容合并到7.4.1节等；第三，新增和修改了部分章节内容，如新增了7.6.2节和7.6.3节内容，新增了历年全国大学生数学建模竞赛题目等，修改了第4章中的表4.1内容等。

本书由河南工业大学的老师编写和修订，第1、2、4章由曹建莉编写，第3章由党健和王俊岭编写，第5、9章由肖留超编写和修订，第6、8章由程涛编写，第7章由焦万堂和王磊编写。本次的修订工作由主编曹建莉、肖留超、程涛全面负责和执行。作为一门实践性、应用性很强的课程，数学建模和数学实验课程的内容体系更应具有科学性、创新性和时代性，相信经过修订后，本书的可读性会更强，学习效果会更好。

审稿同志认真审阅了本次的修订内容，对此我们表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2018年4月于河南工业大学

第一版前言

数学建模是用数学知识解决实际问题的一个桥梁，是数学理论直接为现实对象服务的一种手段，是把数学思维、计算机技术联合应用于实际问题的一个方法。数学建模也是数学各分支的一个大融合，随着现代数学和计算机技术的快速发展，数学建模的作用越来越重要，它的应用遍及各个领域。

作为现代数学的一种实践形式，数学实验体现了现代教育的思想和理念，能有效培养学生对数学学习的兴趣和对数学知识的感知能力、思考能力。

本书突出数学理论和建模方法，强调数学实验与数学建模的联系和渗透，精选反映当代科技进步与社会发展的问题作为教学案例，尝试研究学习与课程设计，以提高学生的学习能力和系统解决问题的能力。

本书共分为 9 章，包括数学建模概论、初等数学模型、微分方程与差分方程模型、随机模型、规划模型、图论模型、其他模型、数学软件 Mathematica、LINDO 软件简介等内容。章末附有习题，书末附有部分习题参考答案。

本书由曹建莉、肖留超、程涛担任主编，焦万堂、王磊、党健担任副主编。其中，第 1、2、4 章由曹建莉编写，第 3 章由党健编写，第 5、9 章由肖留超编写，第 6、8 章由程涛编写，第 7 章由焦万堂、王磊编写。

张强、马晓茹、冯彦鹏、陈凯怡、刘莉静、张晓博、王聪蕾、闫向蕊、高荟等几位学生，在本书的编写过程中积极搜集素材，从读者的角度为本书提供思路，为本书的编写完成做了很多工作，在此深表感谢。

审稿的同志认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，在此也表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥、疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者
2013 年 8 月

目　录

第 1 章　数学建模概论

半个多世纪以来，随着计算机技术的迅速发展，数学不仅在工程技术、自然科学等领域中发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等等新的领域渗透。数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分。

在实际生活中，应用数学知识和计算机技术去解决各门学科和社会生产中的实际问题时，首先要对实际问题进行分析和研究，组建用以解决此问题的数学模型，使用数学的理论和方法，以及编程计算等手段对模型进行分析，从中得到结果，再运用得到的模型结果来解决实际问题。

1.1　数学模型和数学建模

1.1.1　模型

模型是客观实体有关属性的模拟。例如，陈列在橱窗中展览的飞机模型是参照飞机实体的形状，严格按照一定比例减缩而制作成的。其外形要求一定要像真正的飞机，而至于它是否能够飞起来则无关紧要。但是，参加航模比赛的飞机就不同了，如果飞机性能不佳或者飞不起来，就不能算是一个好的模型。

模型并非一定是实体的一种仿照，也可以是对实体的某些基本属性的抽象。例如，一张建筑模型图就并不需要按实物来模拟，它可以用抽象的符号、文字和数字来反映建筑物的结构特征。

1.1.2　数学模型

数学模型(Mathematical Model)是由数字、字母或者其他的数学符号组成的、描述现实对象数量规律的数学公式、图形或者算法。数学模型作为模型的一类，也是对现实的一种模拟，它以数学符号、数学表达式、程序、图形等为工具，对现实问题的本质属性进行抽象而又简洁的刻画，它或者能够解释某些客观现象，或者能够预测未来的发展规律，或者对于某种现象的发展提供某种意义上的最优化策略等。

数学模型不是对现实系统的简单模拟，而是对现实系统的信息提炼、分析、归纳、翻译的结果，它是人们用以认识现实系统和解决现实问题的工具。数学模型用数学语言精确地表达对象的内在特征，通过数学上的演绎推理和分析求解，我们能够深化对所研究问题

的认识。例如，描述人口 $N(t)$ 随着时间 t 自由增长过程的数学模型 $\mathrm{d}N(t)=rN(t)\mathrm{d}t$，忽略了性别、年龄、社会经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素，把实际人口的动态变化过程大大简化了。这个数学模型对现在人口的预测有较大偏差，但它所揭示出的人口指数增长的结论还是值得人们参考的。

数学模型越来越多地出现在人们的生产、工作和社会活动中。电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制。气象工作者能够精确地预报天气，离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型。生物制药者根据药物浓度在人身体内随时间和空间变化的数学模型，得以分析药物的疗效，有效地指导临床应用。城市规划者必须建立包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为城市发展的决策提供科学依据。生产厂家和经营者要根据产品的需求状况、生产条件、成本及利润等信息，建立一个合理安排生产和销售的数学模型，以获得最大的经济效益。

1.1.3 数学建模

数学建模主要是运用数学知识来解决实际问题的。数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要基础，没有深厚的数学基础、严密的数学逻辑思维，是很难使用数学模型解决好实际问题的。但是，数学模型本身又具有一些不同于数学的特征，需要掌握其他方面的许多知识，这些都是在学习和掌握数学模型中特别要注意的。

例如经常见到的"航行问题"：甲、乙两地相距 750 千米，船从甲地到乙地顺水航行需要 30 小时，从乙地到甲地逆水航行需要 50 小时，问船速、水速各为多少。

解 如果用 x、y 分别代表船速、水速，可以得到方程：

$$(x+y)\times 30=750$$

$$(x-y)\times 50=750$$

实际上，这组方程就是描述上述问题的数学模型。列出方程后，原问题就转化为纯粹的数学问题。方程的解（$x=20$（千米/小时），$y=5$（千米/小时）），最终给出了航行问题的答案。

在实际生活中，真正的数学模型通常要复杂得多，但是数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中，那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景作出必要的简化假设（航行中设船速和水速为常数），用字母表示待求的未知量（x、y 分别代表船速和水速），利用相应的物理或者其他规律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）列出数学式子（二元一次方程），求出数学上的解（$x=20$，$y=5$），用这个答案解释原问题（船速和水速分别为 20 千米/小时、5 千米/小时），最后还要用现实现象来验证上述结论。

1.2 建立数学模型的过程与建模示例

1.2.1 建立数学模型的过程

在实际生活中，数学模型的建立一般来说有表述、求解、分析、验证几个阶段，通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再由数学模型回到现实对象的循环，如图 1.1 所示。

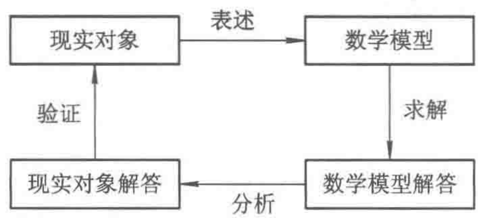

图 1.1　现实对象和数学模型的关系

1. 数学模型的表述

数学模型的表述是指根据建模的目的和掌握的信息，将现实问题翻译成数学问题，选择合适的数学方法，识别常量、自变量和因变量，引入适合的符号并采用适当的单位制，提出合理的简化假设，推导变量和常量所满足的数量关系，表述成数学模型。

2. 数学模型的求解

数学模型的求解是指运用所选择的数学方法求解数学模型。采用适当的计算机软件能够扩大可解决问题的范围，并能减少计算错误。求解数学模型的常用软件有 Maple、Mathematica等计算机代数系统，MATLAB、LINGO 等数值计算软件，SAS、SPSS 等统计软件，Excel 等电子表格处理软件等。

3. 数学模型的分析

数学模型的分析是指对数学模型的解进行分析，包括对结果的误差分析或统计分析、对模型数据的灵敏度分析、对模型假设的强健性分析等。

4. 数学模型的验证

数学模型的验证是指将数学模型的解转换成现实对象的解，给出实际问题所需要的分析、预报、决策或者控制的结果，检验现实对象的解是否符合现实对象的信息(包括实际的现象、数据或计算机仿真)，从而检验数学模型是否合理、适用。如果检验的结果表明数学模型不够合理、不适用于实际对象，首先要考虑最初从实际对象的信息提出的数学问题以及选择的数学方法是否合适，是否要重新提出数学问题、重新选择数学方法；其次要考虑在模型建立阶段所提出的简化假设是否合理、足够，通过修改假设或补充假设，重新建模，然后再次求解、分析、验证。如果检验结果正确或者基本正确，就可以用来指导实际；否则应重复上述过程，直到满意为止。

1.2.2　建模示例：椅子摆放问题

把椅子放在不平的地面上，通常只有三只脚着地，放不稳，然而稍微挪动几次就可以使四只脚同时着地。这个似乎与数学无关的现象能用数学语言给予表述，并用数学工具来证实吗？

1. 模型假设

对椅子和地面应该作一些必要的假设：

(1) 椅子四条腿一样长，椅子脚与地面的接触处可视为一个点，四只脚连线成正方形。

(2) 地面的高度是连续变化的，沿任意方向都不会出现间断，即地面可以视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，椅子在任意位置至少有三只脚同时着地。

假设(1)显然是合理的。假设(2)相当于给出了椅子能够放稳的条件，因为如果地面的高度是不连续的，譬如在有台阶的地方是无法使四只脚同时着地的。假设(3)是要排除的情况，若在地面与椅脚的间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内出现深沟或者凸峰，则三只椅脚无法同时着地。

2. 模型构成

中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表述出来。

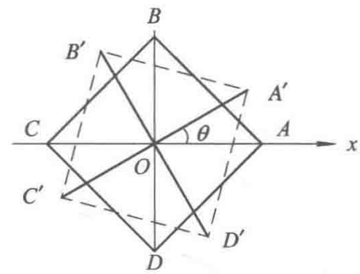

图 1.2　椅子摆放位置图

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表椅子位置的变化，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 1.2 中，椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以可以用对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个距离为零时就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子位置变量 θ 的函数。

虽然椅子有四只脚，有四个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数即可。记 A、C 两脚与地面的距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面的距离之和为 $g(\theta)$ ($f(\theta)$、$g(\theta)\geqslant 0$)。由假设(2)，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数。由假设(3)，椅子在任何位置至少有三只脚着地，所以对于任意的 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta=0$ 时不妨设 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。这样，改变椅子的位置使四只脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$ 且 $g(0)=0$，$f(0)>0$，则存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

可以看到，引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$、$g(\theta)$，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来了，从而构成了这个实际问题的数学模型。

3. 模型求解

上述命题有多种证明方法，这里介绍其中的一种。

将椅子旋转 $\pi/2$，对角线 AC 和 BD 互换，由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $f(\pi/2)=0$ 和 $g(\pi/2)>0$。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则有 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$。由 f 和 g 的连续性知 h 也是连续的。根据连续函数的基本性质，必存在 θ_0 ($0<\theta_0<\pi/2$)，使得 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。最后，因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

因此，可以验证假设，必然存在一个 θ_0，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$，能够使椅子的四只脚同时着地。

1.3　建立数学模型的一般步骤

一般地说，数学模型是我们所研究的实际问题有关属性的模拟，它应当具有实际问题中我们关心和需要的主要特征。数学模型是运用数学的语言和工具，对部分现实世界的信息加以翻译、归纳的产物。数学模型经过演绎、求解、推断、分析，给出数学上的预报、决策或者控制，再经过翻译和解释，回到现实世界中。最后，这些推论或者解释必须接受现实问题的检验，完成实践—理论—实践的循环。

建立一个实际问题的数学模型的方法大致有两种：一种是实验归纳的方法，即根据测试或计算数据，按照一定的数学方法，归纳出问题的数学模型；另一种是理论分析的方法，即根据客观事物本身的性质，分析因果关系，在适当的假设下用数学工具来描述其数量特征。

数学模型的建立一般分为如下几个步骤：

1. 建模准备

首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，收集建模所必需的各种信息，如现象、数据等，弄清对象的特征，由此初步确定用哪一类模型，做好建模准备工作。

2. 模型假设

根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要而合理的简化，再用精确的语言给出解释，可以说是建模的关键一步。一个实际问题的不同简化假设会得到不同的模型：假设不合理或者过分简单，会导致模型失败或者部分失败，从而影响结果；假设过分详细，试图把复杂对象各个方面的因素都考虑进去，可能使工作量加大。通常，作为假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是二者的综合。进行假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化。

3. 模型构成

根据所作的假设，利用适当的数学工具来刻画、描述各种量之间的关系，除需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较广泛的应用数学方面的知识，以开拓思路。同时，数学建模还有一个原则，即应尽量采用简单的数学工具，因为简单的数学模型往往更能反映事物的本质，也容易让更多的人掌握和使用。

4. 模型求解

建立数学模型的目的是解释自然现象，寻找内在规律，以便指导人们认识世界和改造世界。对假设的数学模型，利用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值分析等各种传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术得到数量结果的过程，即模型求解的过程。

5. 模型分析

对模型的解进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时要根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制。不论哪种情况，常常都需要进行误差分析、稳定性分析等。

6. 模型检验

把数学模型求解的结果“翻译”回到实际问题中，与实际情况进行比较，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，看是否符合实际。如果模型结果的解释与实际情况相符合或结果与实际观察基本一致，则表明模型经检验是符合实际的。如果模型的结果很难与实际相符合或与实际观测不一致，则表明这个模型与所研究的实际问题是不相符的，不能直接应用于所研究的实际问题。这时如果数学模型的建立和求解过程没有问题，就需返回到建模前关于问题的假设过程，检查对于问题所作的假设是否恰当，对假设给出必要的修正，重复前面的建模过程，直到建立出符合实际问题的模型为止。

7. 模型应用

用已建立的数学模型分析解释已有现象，并预测未来的发展趋势，以便给人们的决策提供参考。

并非所有数学模型的建立都要经过上述这些步骤，有时各个步骤之间的界限也不是很明显，因此建模过程中不要局限于形式，应以对象的特点和建模的目的为依据。

【例 1.1】（雨中行走问题）天将下雨，从寝室到教室有一段约 1000 米的路程。由于事情紧急，某人没拿雨具就跑出去了，可是刚出门就下起了大雨。如果冒雨行走，则人将会被淋得多湿？

分析 这个问题看起来简单，因为通常认为只要跑得越快就越好，然而若把雨的方向变化考虑进去，就不见得如此。

1）模型准备

给定一个特定的降雨条件，能否设计一个方案使得人被雨淋湿得最少？

这个模型是确定的，因为它完全依赖于雨速、风向、路程与奔跑速度。我们需要给出一个依赖于这些因素的确定淋雨量的公式。通过调查可以知道一组比较经典的数据：雨速＝4 米/秒，走速＝2 米/秒，跑速＝6 米/秒，路程＝1000 米，降雨量＝0.02 米/小时。

与此问题有关的因素及其符号和单位见表 1.1。

表 1.1 例 1.1 有关的因素及其符号和单位

因素	符号	单位
淋雨时间	t	秒
雨速	r	米/秒
雨的角度	θ	度
走速	v	米/秒
人的高度	h	米
人的宽度	w	米
人的厚度	d	米
淋雨量	C	米^3
雨的强度	I	
行走的距离	D	米

2）建立模型

首先建立一个尽可能简单的模型。假设人所走的路线是直线，将人体视为长方体，设雨速为常数，不考虑雨的方向。若在整个 1000 米中人的跑速均为 6 米/秒，则

$$淋雨时间=\frac{1000\text{ 米}}{6\text{ 米/秒}}\approx 167\text{ 秒}=2\text{ 分 }47\text{ 秒}$$

若降雨量为 2 厘米/小时，则 2 分 47 秒中的降雨量为 $2\times 167\times 0.01\div 3600$ 米。

此时，若取人高为 1.5 米、宽为 0.5 米、厚为 0.2 米，则前后的表面积为 1.5 米^2，侧面积为 0.6 米^2，顶部面积为 0.1 米^2，这样总面积为 2.2 米^2。设这些表面积都淋雨，则

$$淋雨量=\frac{2\times 167\times 0.01\times 2.2}{3600}\approx 2.041\times 10^{-3}(\text{米}^3)$$

通常，我们假设雨是垂直而下的。前面的因素并不都是变量，事实上 r、θ、v、t 和 C 是变量，而其他量在这个特殊情况不是变量。另外，雨速和降雨量是有区别的。如果雨像河流那样是连续水流，则根据雨速就能确定特定面积上的降雨量。显然，这是不现实的，因为雨是离散雨点的流，所以为描述雨量的大小而引入了雨的强度概念。

由上面给出的数据知道雨速为 4 米/秒$=1.44\times 10^6$ 厘米/小时，而降雨量为 2 厘米/小时。雨速与降雨量的比值是 7.2×10^5，定义雨的强度 $I=1/(7.2\times 10^5)$。这样雨的强度就反映了雨的大小。如果 $I=0$，说明没有降雨。当强度 $I=1$ 时是暴雨，雨水就形成了连续水流。

由于速度已取为常数，则淋雨时间 $t=D/v$（秒）。为考虑被淋湿的程度，必须考虑行走方向与雨的方向的关系问题。

由于雨是呈一个角度降下的，能看到在任何情况下受雨面仅为人的顶部和前部，故而淋在人身上的雨量可以分为以下两种情况来计算：

(1) 考虑人的顶部。

顶部的表面积$=wd$（米^2），雨速的分量为$=r\cos\theta$（米/秒）。

因为淋雨率＝强度×面积×雨速$=Iwdr\cos\theta$（米^3/秒），这样在时间 D/v 中的

$$淋雨量=\frac{IwdDr\cos\theta}{v}\ (\text{米}^3)$$

(2) 考虑人的前部。

前部的面积$=wh$（米^2），雨速的分量$=r\sin\theta+v$（米/秒）。

因此，淋雨率为 $Iwh(r\sin\theta+v)$（米^3/秒），在时间 D/v 中的

$$淋雨量=\frac{IwhD(r\sin\theta+v)}{v}\ (\text{米}^3)$$

由上可知总淋雨量为

$$C=\frac{IwD}{v}[dr\cos\theta+h(r\sin\theta+v)]\ (\text{米}^3)$$

从前面给出的数据 $h=1.5$ 米，$w=0.5$ 米，$d=0.2$ 米，$r=4$ 米/秒，$D=1000$ 米，$I=\frac{1}{7.2\times 10^5}$，于是

$$C=\frac{0.8\cos\theta+6\sin\theta+1.5v}{1.44\times 10^3 v}\ (\text{米}^3)$$

这样所求的数学模型转化为讨论给定 θ，选取怎样的 v 使得 C 最小。

3）模型求解

下面分几种情形来讨论这个模型：首先，如果 $I=0$，则 $C=0$；其次将根据是朝着雨的方向还是背着雨的方向。

（1）若 $\theta=0°$，这时雨是直下的，由 $C=\frac{0.8+1.5v}{1.44\times10^3 v}$ 知：当 v 最大时，C 最小，即当 $v=6$ 米/秒时，总淋雨量为

$$C=\frac{9.8}{1.44\times10^3\times6}\approx1.13\times10^{-3}(\text{米}^3)$$

（2）若 $\theta=30°$，这时雨迎面而下，故有

$$C=\frac{0.4\sqrt{3}+3+1.5v}{1.44\times10^3 v}\ (\text{米}^3)$$

在这种情形下，v 最大时，C 最小，即

$$C=\frac{0.4\sqrt{3}+3+9}{1.44\times10^3\times6}=1.47\times10^{-3}(\text{米}^3)$$

（3）若 θ 为负角，这时雨来自人的后面，取 $\theta=-\alpha$，得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha-6\sin\alpha+1.5v}{1.44\times10^3 v}\ (\text{米}^3)$$

对于充分大的 α，这个表达式会出现负号，而这是不可能的，所以还要回到

$$\text{淋雨量}=\frac{IwdDr\cos\theta}{v}\ (\text{米}^3)$$

进行分析。可分为两种情形来决定人该走多快：

① 若 $v<r\sin\alpha$，则背后的淋雨量为 $\frac{IwhD(r\sin\alpha-v)}{v}$，总淋雨量为

$$C=\frac{IwD}{v}[dr\cos\alpha+h(r\sin\alpha-v)]\ (\text{米}^3)$$

代入数据得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha+1.5(4\sin\alpha-v)}{1.44\times10^3 v}\ (\text{米}^3)$$

这时如果以 $4\sin\alpha$ 的速度行走，这个表达式可以改写为

$$C=\frac{0.8\cos\alpha}{1.44\times10^3\times4\sin\alpha}\ (\text{米}^3)$$

即淋在头顶的雨量。这样雨以 30°的倾角从后面下来，人就应该以 2 米/秒的速度行走，淋雨量仅为(2.4×10^{-4}) 米^3。

② 若 $v>r\sin\alpha$，则背后的淋雨量为 $\frac{IwhD(v-r\sin\alpha)}{v}$，总淋雨量为

$$C=\frac{IwD}{v}\ [dr\cos\alpha+h(v-r\sin\alpha)]\ (\text{米}^3)$$

代入数据得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha+1.5(v-r\sin\alpha)}{1.44\times10^3 v}\ (\text{米}^3)$$

于是，θ 为负角的情况下：

当 $0.8\cos\alpha-6\sin\alpha<0$，即 $\tan\alpha>\dfrac{2}{15}$时，$v_{\min}=r\sin\alpha$，则 C 最小；

当 $0.8\cos\alpha-6\sin\alpha>0$，即 $0<\tan\alpha\leqslant\dfrac{2}{15}$时，$v$ 越大则 C 越小。

4）模型分析

上述结果似乎与实际相符，它告诉我们：如果是逆风行走，则越快越好；如果是顺风，则当雨的倾角大于约 8°时，应该保持与雨速在水平方向的分量一致的速度；当雨基本上是垂直而下时(倾角小于约 8°)，越快越好。

习　题　1

1. 在“椅子摆放问题”的假设条件中，将“四只脚的连线呈正方形”改为“四只脚的连线呈长方形”，其余条件不变，试构造模型并求解。

2. 甲早 8:00 从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午 5:00 到达山顶并留宿。次日早 8:00 沿同一路径下山，下午 5:00 回到旅店。乙说，甲必定两天中的同一时刻经过路径中的同一地点，为什么?

3. 甲、乙两站之间有电车相通，每隔 10 分钟甲、乙两站互发一趟车，但发车时刻不一定相同。甲、乙之间有一中间站丙，某人每天在随机的时间到达丙站，并搭乘最先经过丙站的那趟车，结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站，仅约 10 天到达乙站。问开往甲、乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的。

4. 某人家住 T 市，在他乡工作，每天下班后乘火车于 6:00 抵达 T 市车站，他的妻子驾车准时到车站接他回家。一日他提前下班搭早一班火车于 5:30 抵达 T 市车站，随即步行回家，他的妻子像往常一样驾车前来，在半路上遇到他，即接他回家，此时发现比往常提前了 10 分钟。问他步行了多长时间。