息化部普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

下册

主编　戚永委　曾钰　韩晓艳

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

息化部普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

下册

主　编　戚永委　曾　钰　韩晓艳
副主编　姜翠萍　鹿泉育　占　飞
编　委　韩淑芹　邓　臻　郑素华　陈红艳

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 戚永委, 曾钰, 韩晓艳主编. —北京: 电子工业出版社， 2017.1
ISBN 978-7-121-30636-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①戚… ②曾… ③韩… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 305962 号

策划编辑：郝国栋
责任编辑：马　杰
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：720×1000　1/16　　印张：12.5　　字数：193 千字
版　　次：2017 年 1 月第 1 版
印　　次：2017 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：28.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（0532）83712386，邮箱：majie@phei.com.cn

前　言

本书是为适应经济类、管理类各专业对数学要求不断提高的趋势，在编者多年教学实践经验和吸收众多国内外教材成果的基础上编写的，其主要特点是把微积分和经济学的有关内容进行了有机的结合。

本书总的编写原则是：教学内容的深广度与经济类、管理类各专业微积分课程的教学基本要求相当，与教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的微积分的内容相衔接，注重适当渗透现代数学思想，加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求。

全书分为上、下两册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分；下册内容包括定积分、微分方程初步、多元函数微分学、二重积分、级数；各章、节配有适量的习题。

本书由戚永委主编，具体参与编写本书的老师有戚永委，负责第一、二、十、十一章；曾钰，负责第四、五、六、九章；韩晓艳，负责三、七、八章。他们都是具有多年教学实践的一线老师，为本书编写付出了艰苦的劳动。

赵克友教授认真审阅了全书，提出了宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢。

本书可作为高等院校经管类各专业通用教材或高等院校教师的教学参考书，还可供经济管理人员参考。

编　者

2016 年 7 月

目　录

第 6 章　定积分及其应用

本章我们将讨论积分学中的另一个基本问题——定积分. 它的实际背景非常丰富，例如，求平面图形的面积，求变速直线运动的路程等，它在几何学、力学、经济学等领域中也有广泛的应用，本章将从实例出发引入定积分的概念，然后讨论它的性质，并介绍它的计算方法.

不定积分和定积分是两个完全不相同的概念，牛顿和莱布尼茨先后发现了它们之间通过原函数存在内在联系。正是由于这种联系，才使得定积分的计算得以简化，从而使得积分成为解决实际问题的有力工具.

第 1 节　定积分的概念

一、问题引入

1. 曲边梯形的面积问题

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上非负连续函数，则由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的平面图形称为**曲边梯形**，见图 6-1.

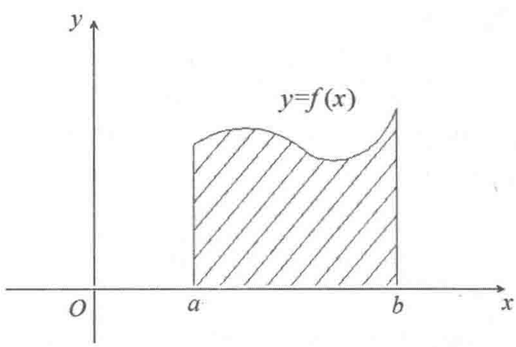

图 6-1

【例 1】如图 6-2 所示，由 $y=x^2$，$y=0$，$x=1$ 所围的平面图形称为**曲边三角形**，$y=x^2$ 称为曲边，求这个曲边三角形的面积.

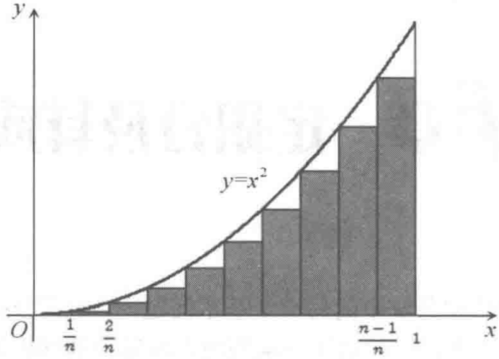

图 6-2

【分析】曲边三角形是一种不规则图形，它的面积不能直接用公式来计算. 考虑到 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上是连续函数，即在 $[0,1]$ 的一个很小的子区间上，x^2 的变化并不大，在这样的子区间上，曲边梯形接近于矩形. 我们考虑用极限的思想来求曲边三角形的面积，具体步骤为

分割——近似——求和——取极限

(1) **分割**

在区间 $[0,1]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，把区间 $[0,1]$ 分成 n 等分. 每个小区间长为 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$，$x_i=\dfrac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)$，设 $x_0=0$，$x_n=1$.

(2) **近似**

过每个分点 $x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 作平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形. 把每个小曲边梯形近似地看作矩形.

如果取每个小区间的左端点对应的函数值为矩形的高，小区间的长度为矩形的底，它们的面积依次为

$$0,\frac{1}{n^3},\frac{2^2}{n^3},\frac{3^2}{n^3},\cdots,\frac{(n-1)^2}{n^3}$$

如果取每个小区间的右端点对应的函数值为矩形的高，小区间的长度为矩形的底，它们的面积依次为

$$\frac{1}{n^3},\frac{2^2}{n^3},\frac{3^2}{n^3},\cdots,\frac{n^2}{n^3}$$

(3) **求和**

把各个小矩形的面积加起来，所得之和作为曲边三角形面积 S 的近似值. 即

$$S_1=0+\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$
$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
$$S_2=\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$
$$=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

(4) 取极限

随着对区间[0,1]划分的不断加细，第 3 步所得曲边三角形面积 S 的精确度将不断提高，并不断逼近曲边三角形面积的精确值. 当 $n\to\infty$ 时，两个面积的近似值都趋近于 $\frac{1}{3}$. 于是可以认定这个曲边三角形的面积就是 $\frac{1}{3}$.（实际上 $S_1\leqslant S\leqslant S_2$.）

下面把上述过程推广应用到一般的曲边梯形，即推广到由连续曲线 $y=f(x)\,(f(x)\geqslant 0)$，$y=0$，$x=a$，$x=b$ 所围成的平面图形情况(见图 6-3).

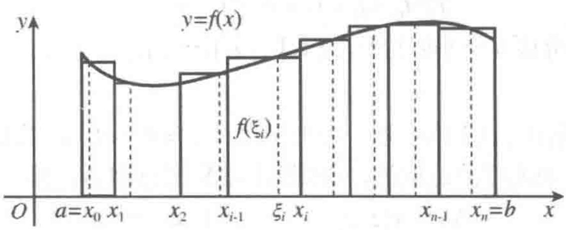

图 6-3

(1) 分割

如图 6-3 所示，在区间$[a,b]$中任意插入若干个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{n-1},x_n]$，第 i 个小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 近似

在$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，以$[x_{i-1},x_i]$为底、$f(\xi_i)$为高的窄矩形面积近似替代第 i 个窄曲边梯形的面积，即得

$$\Delta A_i=f(\xi_i)\Delta x_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

(3) 求和

把这样得到的 n 个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即得

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限

取 $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，则当 $\lambda \to 0$ 时(这时分段数 n 无限增多，即 $n \to \infty$)，取上述和式的极限，便得曲边梯形的面积：

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

【例 2】设某物体作变速直线运动，在时刻 t 的速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的连续函数，且 $v(t) \geqslant 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程 S.

【分析】对于匀速直线运动，其路程=速度×时间，但现在讨论的问题中，速度不是常量而是随时间变化的变量，所求路程 S 不能直接按匀速直线运动的路程公式来计算，同样可以考虑用极限的思想来求. 具体步骤如下：

(1) 分割

在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点：

$$T_1=t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小时段 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$.

(2) 近似

在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 内任取一个时刻 $\tau_i(t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i)$，以 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 作为 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的速度的近似值，得到路程 ΔS_i 的近似值，即

$$\Delta S_i \approx v(\tau_i)t_i \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

(3) 求和

把每段时间内物体经过的路程的近似值加起来，得到全路程的近似值，即有

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

(4) 取极限

记 $\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，取上述和式的极限，就得到变速直线运动的路程：

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

以上两个问题的实际意义虽然不相同，但从数学的角度来看，其解决问题的思想和方法是相同的. 它们都归结为具有相同结构的求和式的极限问题. 把这一方法加以概括抽象，就得到了定积分的定义.

二、定积分的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

① 在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

每个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

② 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

③ 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

④ 记 $\lambda=\max\{\Delta x,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，作极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

如果对 $[a,b]$ 的任意分法以及在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的任意取法，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 总趋近于同一个定数 I，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**，其极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**(简称积分)，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，a 称为**积分下限**，b 称为**积分上限**，$[a,b]$ 称为**积分区间**.

利用定积分的定义，前面所讨论的两个具体问题可用定积分表示如下：

① 由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

② 物体以变速 $v=v(t)$ $(v(t)\geqslant 0)$ 作直线运动，从 T_1 时刻到 T_2 时刻经过的路程为

$$S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$$

关于定积分的概念，需要注意下面几个问题：

① 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个**确定的数值**，而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 却表示由 $f(x)$ 的全体原函数构成的集合，因而定积分与不定积分是完全不相同的两个概念.

② $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与闭区间 $[a,b]$ 的分法和 ξ_i 的取法均无关，只与被积函数及积分区间有关.

③ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

对于定积分，自然有这样一个问题：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足怎样的条件才可积？本教材对这个问题不作深入讨论，只是不加证明地给出以下两个充分条件.

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

三、定积分的几何意义

① 若连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负，即 $f(x)\geqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A，如图 6-4 所示.

② 若连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非正，即 $f(x)\leqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数 $-A$，如图 6-5 所示.

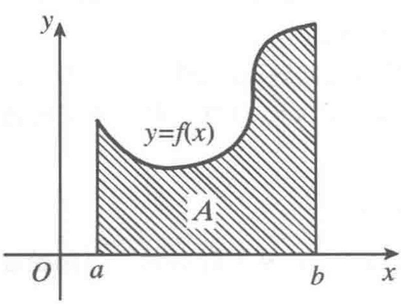

图 6-4

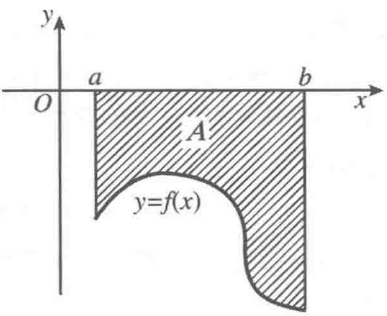

图 6-5

③ 若连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上既能取得正值又能取得负值，即函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴的下方，见图 6-6，则

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的代数和，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$$

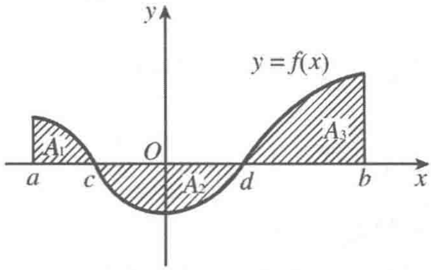

图 6-6

【例 3】 利用定积分的几何意义求定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

【解】 在几何上，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示半径为 1 的圆在第一、二象限部分的面积，见图 6-7，因此

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

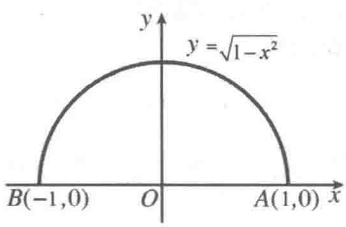

图 6-7

练习 6-1

1. 用定积分的几何意义计算下列定积分的值.

(1) $\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$.

*2. 用定积分表示下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$.

第2节 定积分的性质

在以上定积分的定义中，实际上假定了$a<b$，为了便于计算和应用，先对定积分做以下规定：

① 当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；

② 当$a=b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

这样规定以后，定积分的下限不一定非要小于上限。

下面讨论定积分的性质，下列各性质中积分上下限的大小，如不特别指明，均不加限制，并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质1 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

此性质可推广到有限个函数.

性质2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，($k$为常数).

上述两个性质统称为定积分的**线性性质**.

性质3（积分区间的可加性）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

说明：只要$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$，$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$存在，不论a,b,c的相对位置如何，总有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

例如，当$a<b<c$时，由于

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

性质4 若在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv 1$，则$\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质5 若在区间$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论1 若在区间$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明　因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质 5 得

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0$$

再利用性质 1 便得要证的不等式.

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$，$a<b$.

证明　因为 $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$，所以由推论 1 及性质 2 可得

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

性质 6(估值定理)　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 M 与 m，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

证明　因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，由性质 5 的推论 1 得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$$

由性质 2 和性质 4，得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

由估值定理可知，根据被积函数在积分区间上的最大值和最小值可以估计积分值的范围.

性质 7(积分中值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)\quad,\quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

或

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\quad,\quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

证明　因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m.

由性质 6，得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

从而有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M$$

根据闭区间上连续函数的介值定理可知，在区间$[a, b]$上至少存在一点ξ，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}, \quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a), \quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

积分中值定理有如下的几何解释：若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，在区间$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a, b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积与某个同底边而高为$f(\xi)$，$\xi\in[a, b]$的矩形面积相等，如图 6-8 所示.

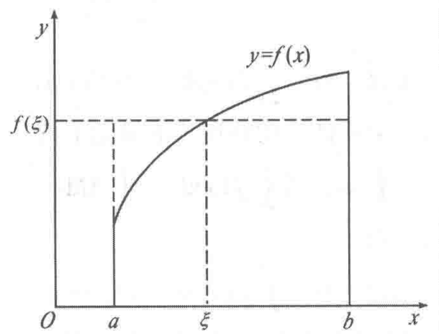

图 6-8

通常称$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的平均值.

【例 1】 比较定积分$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$和$\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$的大小.

【解】 在区间$[1, 2]$上有

$$\ln x\geqslant\ln^2 x$$

由性质 5 的推论 1 知

$$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x\geqslant\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$$

【例 2】 比较定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$与$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$的大小.

【解】 在区间$[0, 1]$上有

$$\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\mathrm{e}^x$$

由性质 5 的推论 1 知

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

【例 3】估计定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x$ 的值.

【解】在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 上有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\leqslant\sin x\leqslant\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

从而有

$$\frac{4}{7}\leqslant\frac{1}{1+\sin^2x}\leqslant\frac{2}{3}$$

因此，$\frac{\pi}{21}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{18}$.

【例 4】利用定积分的性质证明

$$1<\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x<e$$

【证明】设 $f(x)=e^{x^2}$，则 $f'(x)=2xe^{x^2}\geqslant 0$.
在 $[0,1]$ 上，$f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，从而有

$$f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$$

即

$$1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$$

因此由推论 1 和性质 4 得，$1=\int_0^1\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 e\,\mathrm{d}x=e$.

练习 6-2

1. 估计下列各积分的值.

(1) $\int_1^4(x^2-1)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\cos^2x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,\mathrm{d}x$；　(4) $\int_2^0 e^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

2. 不通过计算，比较下列各对积分中哪一个的值较大.

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　(2) $\int_3^4\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4(\ln x)^3\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{-2}x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{-2}e^x\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

3. 证明不等式 $2\leqslant\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x<2\sqrt{2}$.