"十二五"普通高等院校规划教材

GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

【专业选学模块】

主编 ◎ 凌巍炜 谢良金

中国社会出版社
国家一级出版社★全国百佳图书出版单位

“十二五”普通高等院校规划教材

GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

【专业选学模块】

主　编：凌巍炜　谢良金

副主编：万　萍　方志宏　邓通德　李繁春

中国社会出版社

国家一级出版社★全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学:专业选学模块 / 凌巍炜,谢良金主编.
—北京:中国社会出版社,2015.2
"十二五"普通高等院校规划教材
ISBN 978-7-5087-5015-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①凌… ②谢… Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 036843 号

书　　名: 高等应用数学:专业选学模块
主　　编: 凌巍炜　谢良金

出 版 人: 浦善新
终 审 人: 李　浩
责任编辑: 薛丽仙　　**责任校对:** 梁峥燕

出版发行: 中国社会出版社　　**邮政编码:** 100032
通联方法: 北京市西城区二龙路甲 33 号
电　　话: 编辑部:(010)58124839
邮购部:(010)58124845
销售部:(010)58124848
传　真:(010)58124856
网　　址: www.shcbs.com.cn

中国社会出版社官方旗舰店

经　　销: 全国各地新华书店

印刷装订: 三河市越阳印务有限公司
开　　本: 185mm×260mm　16 开
印　　张: 18
字　　数: 300 千字
版　　次: 2015 年 2 月第 1 版
印　　次: 2015 年 2 月第 1 次印刷
定　　价: 35.00 元

前言 Preface

高等应用数学是高职院校理工科及经济类、管理类等专业学生的一门重要的公共基础课。在职业教育迅猛发展的今天，高职数学课程如何进行教学改革，以适应高职教育发展的需要，是摆在广大数学教育工作者面前的一个重要的课题。为了进一步深化教学改革，落实"培养适应生产、建设、管理、服务第一线的高等技术应用型专门人才"的培养目标，就必须进行课程结构的调整、课程内容的优化。因此，编写一本目标定位准确，符合高职教育特点的高职数学教材就显得尤为重要。为此，我们在经过充分调研，汲取多种教材经验并经过多轮教学实践的基础上，根据教育部制定的"高职高专教育数学课程教学基本要求"和高职数学教学改革的最新精神，编写了这套《高等应用数学》教材。本册《高等应用数学：专业选学模块》是《高等应用数学：基础模块》的衔接教材。本教材的特点为：

1. 本书涵盖了专业课教学中常用的数学基础知识，在确保科学性和保持衔接性的前提下，将基础模块所涉及的一元函数的微积分等基础知识以外的内容整合成相对独立的十章，方便教师根据不同专业的需求和学时安排以及学生已有的基础情况对教学内容作相应的取舍。虽然内容覆盖广，但经过改造和整合，教材具有"篇幅少、模块化"的特点。其目的是着眼于"教得来，学得下，用得上"这个基本目标，力图真正实现高职数学"专业工具课"的课程性质，并为学生后续专业课程的学习提供有力的支撑。

2. 体现了"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则。在内容的编排上，充分考虑到不同专业的需求，注意与专业课的衔接；在课程结构上，既体现了数学概念的准确性和完整性，又不过分追求理论的严谨性，略去了大多数定理的证明，只对少数重要定理加以证明。立足于实践与应用，以案例驱动的方式，用现实的实例引出概念，尽量用案例说明其实际背景和应用价值，注重培养学生基本的运算能力、分析问题的能力和解决问题的能力。

3. 突出教学内容与高职学生认知基础的吻合性。一些概念、定理尽量采取学生容易理解的方式叙述。在引入概念时，注重理论与实践相结合，尽量按照"实践—理论—实践"的认识过程编写，做到由特殊到一般，再由一般到特殊，力求通俗易懂、深入浅出、循序渐进。

4. 突出与现代教育技术及科学计算手段的融合。在《高等应用数学：基础模块》介绍

了 MATLAB 数学软件功能的基础上，本书第十章针对每一章都安排有相关的数学实验，并使用数学软件解决了本书中有关计算的问题，以培养和深化学生应用计算机技术解决应用问题的能力。数学软件和数学实验内容具有相对独立性，可在完成基本教学内容的基础上，根据实际情况进行教学。

本教材由凌巍炜、谢良金担任主编，万萍、方志宏、邓通德、李繁春担任副主编，具体的编写分工为：万萍负责编写第一、四章，方志宏负责编写第二章，谢良金负责编写第三、六章，邓通德负责编写第五章，凌巍炜负责编写第七、八、九章，李繁春负责编写第十章，全书由凌巍炜总撰、统稿。

本教材充分吸收了方志宏主编的《高等数学（下）》教材的优点，也参考了众多同人的优秀教材，在此一并感谢。由于时间仓促、水平有限，教材中难免存在疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目录

第一章 空间解析几何初步

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序数组对应起来，把平面上的图形与方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容.

第一节　空间直角坐标系与向量的概念

一、空间直角坐标系

在空间取一定点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系.

图 1－1

注：(1) 通常，三个数轴应具有相同的长度单位；

(2) 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，则 z 轴是铅垂线；

(3) 数轴的正向符合右手规则（图 1－1）.

坐标面：

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为坐标面.

x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面，y 轴与 z 轴、z 轴与 x 轴所确定的坐标面分别是 yOz 面和 zOx 面.

卦限：

三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫作一个卦限，含有三个正半轴的卦限叫作第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方，按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 1－2).

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，设 M 为空间已知点，过 M 点作三个平面分别垂直于 x 轴，y 轴及 z 轴，交点分别为 P,Q,R，设这三个点在 x 轴，y 轴及 z 轴上的坐标依次为 x,y,z，则点 M 唯一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z)(图 1－3)；反之，任给一个三元有序数组 (x,y,z)，在 x 轴，y 轴及 z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R，然后过点 P,Q,R 分别作 x 轴，y 轴及 z 轴的垂直平面，这三个平面交于一点，设为 M，则一个三元有序数组就唯一地确定了空间的一个点 M.

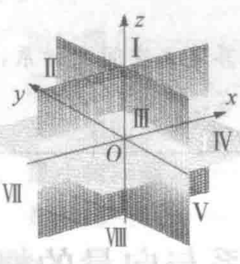

图 1－2

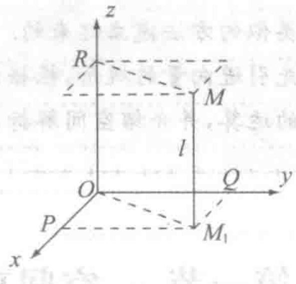

图 1－3

于是，空间任意一点 M 和一个三元有序数组之间建立了一一对应的关系，这个三元有序数组称为点 M 的直角坐标，x,y,z 分别称为横坐标，纵坐标和竖坐标，坐标为 (x,y,z) 的点 M，记为 $M(x,y,z)$.

显然，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴，y 轴及 z 轴上任意一点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$.

二、空间两点间的距离公式

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为
$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$
所以 $|M_2M_3|=|M_1M_3|$,即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 2 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$,点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 设所求的点为 $M(0,0,z)$,依题意有 $|MA|^2=|MB|^2$,

即 $(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2$,

解之得 $z=\dfrac{14}{9}$,所以,所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

三、向量

在研究力学、物理学以及其他应用科学时,常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,这一类量叫作向量.

在数学上,用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$(图 1－4).向量可用粗体字母表示,也可用上加箭头的书写体字母表示,例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$,或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则说明向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的模:向量的大小叫作向量的模.向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

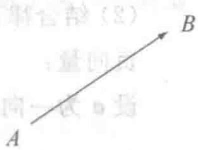

图 1－4

单位向量:模等于 1 的向量叫作单位向量.

零向量:模等于 0 的向量叫作零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量的起点与终点重合,它的方向可以看作是任意的.

向量的平行:如果两个非零向量的方向相同或相反,就称这两个向量平行.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$.零向量与任意向量都平行.

当把两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上.因此,两向量平行又称两向量共线.

设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

四、向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1－5、图 1－6).

三角形法则：

上述作出两向量之和的方法叫作向量加法的三角形法则.

平行四边形法则：

当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合(图 1－7、图 1－8).

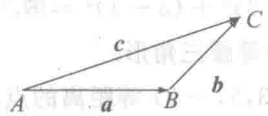

图 1－5

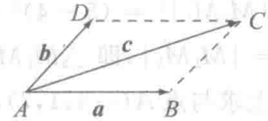

图 1－6

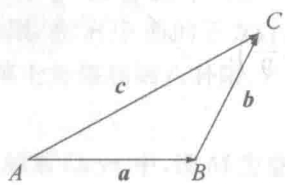

图 1－7

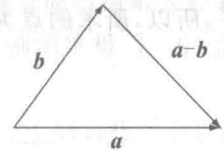

图 1－8

以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

负向量：

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的减法

规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即把向量 $\boldsymbol{a}$ 加到向量 $-\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 3 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$(图 1－9).

试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

所以 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

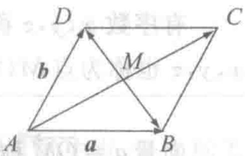

图 1－9

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

向量的单位化：

设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{e}_a$.

于是 $$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

上述定理是建立数轴的理论依据，给定一个点及一个单位向量就可确定一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由 $\overrightarrow{OP}\ /\!/\ \boldsymbol{i}$，根据定理，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫作轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是点 $P\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow$ 实数 x，从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}.$$

五、向量的坐标

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 $\overrightarrow{OM}$ 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体（图 1－10），有
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则 $$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

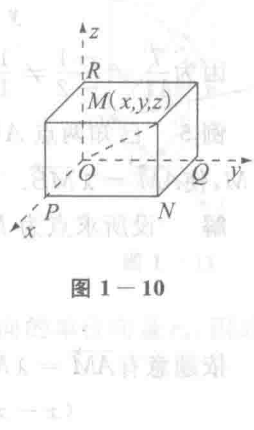

图 1－10

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量，进而确定了 x,y,z 三个有序数（反之，给定三个有序数 x,y,z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M）. 于是点 M 和向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x,y,z 之间有一一对应的关系，即
$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

定义

有序数 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$(有序数 x,y,z 也称为点 M(在坐标系 $Oxyz$)的坐标,记为 $M(x,y,z)$).

向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M,又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

如果点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,则向量

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

六、利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}+b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

利用向量的坐标判断两个向量的平行:$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(a_x,a_y,a_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$,于是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

例 4 已知 $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$. 其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$,判断向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是否平行.

解 把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入,即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10),$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

因为 $\frac{7}{11}\neq\frac{-1}{-2}\neq\frac{10}{16}$,所以 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 不平行.

例 5 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求一点 M,使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 设所求点为 $M(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

依题意有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

由向量相等的原则：

$$x-x_1=\lambda(x_2-x);y-y_1=\lambda(y_2-y);z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

即 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

七、向量的模、方向角与方向余弦

1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，把 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移到坐标原点，设它的终点为 M，则 M 点的坐标为 (a_x,a_y,a_z)，由两点间的距离公式可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

例 6 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 e.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$,

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

所以 $$e=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

2. 方向角与方向余弦

向量的方向角：设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则它与三条坐标轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角(图 1－11).

向量的方向余弦：非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向的夹角为 α,β,γ，则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

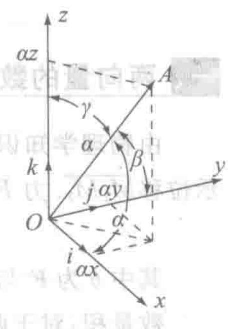

图 1－11

从而 $$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_a.$$

上式表明，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$. 因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7 设已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

习题 1－1

1. 讨论空间直角坐标系的八个卦限中的点的坐标的符号.
2. 在坐标轴上的点和在坐标平面上的点的坐标各有什么特点?
3. 求点$(3,-2,1)$ 的对称点的坐标.

(1) 关于各坐标面对称;(2) 关于各坐标轴对称;(3) 关于坐标原点对称.

4. 求点$(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴、各坐标面的距离.
5. 在 z 轴上求与点$(-4,1,7)$ 和点$(3,5,-2)$ 等距离的点.
6. 在 yOz 坐标面上求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$ 等距离的点.
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2,3)$,求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$($m,n$ 为常数).
8. 求下列向量的模,方向余弦以及与它们同方向的单位向量.

(1)$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;　　(2)$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

9. 已知点 $M_1(-1,1,0)$,$M_2(0,-1,2)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 及其方向余弦.
10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的起点为$(1,-1,5)$,求向量的终点坐标.

第二节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

由物理学知识可知,一个物体在常力 F 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,以 $\boldsymbol{S}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$. 力 F 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cdot\cos\theta.$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角(图 1－12).

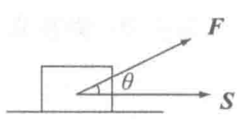

图 1－12

数量积:对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的模$|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta.\tag{1.1}$$

数量积的性质：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 如果认为零向量与任何向量都垂直，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积的运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

数量积的坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

提示：按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.2}$$

两向量夹角的余弦的坐标表示：

设 $\theta=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$，则当 $\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{1.3}$$

提示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$.

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}^2$，$(3\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,3,-1)\cdot(1,-1,1)$

$=2\times1+3\times(-1)+(-1)\times1=-2$.

$\boldsymbol{a}^2=2^2+3^2+(-1)^2=14$.

$(3\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=3(2,3,-1)\cdot2(1,-1,1)$

$=6\times2+9\times(-2)+(-3)\times2=-12$.

例 2 已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解 $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$

因为
$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时，不但要考虑物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩.

设 O 为一根杠杆 L 的支点,有一个力 F 作用于杠杆上 P 点处,$\overrightarrow{PF}$ 与$\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(图 1－13).

由力学规定,力 F 对支点 O 的力矩是一向量 M,它的模

$$|M| = |\overrightarrow{OP}||F|\sin\theta.$$

M 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$ 与 F 所确定的平面,MZ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 F 来确定的(图 1－14).

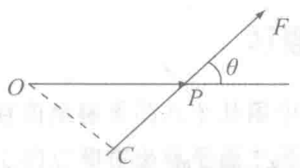

图 1－13

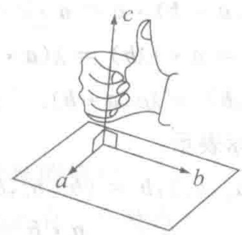

图 1－14

向量积:已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,向量 $\boldsymbol{c}$ 由下列两个方式定出.

(1)$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;

(2)$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定. 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义,力矩 M 等于$\overrightarrow{OP}$ 与 F 的向量积,即

$$M = \overrightarrow{OP}\times F.$$

向量积的性质:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$;

(2)$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$,这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是空间直角坐标系的三个基本向量.

向量积的运算律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) 与数乘的结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为常数).

向量积的坐标表示:设 $\boldsymbol{a} = (a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b} = (b_x,b_y,b_z)$,按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &= a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = 0,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = 0,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$,所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{1.4}$$

为了便于记忆,利用三阶行列式符号,上式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} = (a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{1.5}$$