



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

大气科学中的数学方法

Mathematical Methods in Atmospheric Science

李 刚 王曰朋 主编
胡广平 卢长娜 编
官元红 杨建伟



科学出版社



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

大气科学中的数学方法

李 刚 王曰朋 主编

胡广平 卢长娜 官元红 杨建伟 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是在“大气科学中的数学方法”课程讲义基础上修改而成,较为系统地介绍了微分动力系统、摄动方法、小波分析、偏微分方程数值求解、变分与有限元方法及变分伴随方法等内容。编写过程中注意到了学科交叉,力求做到数学知识处理上浅显易懂,同时也考虑到了相关气象内容的吸收,充分体现本书的气象特色。为方便阅读,各章内容具有一定独立性。

本书可作为数学、气象、海洋等专业的本科生、研究生和教师的参考书,还可供工科研究生作为数学物理类教材的拓展内容来学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

大气科学中的数学方法/李刚,王曰朋主编;胡广平等编. —北京:科学出版社,2017.12

(“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-056209-8

I.①大… II.①李… ②王… ③胡… III.①大气科学-数学方法-高等学校-教材 IV.①P40

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 323128 号

责任编辑:胡 凯 许 蕾 刑 华/责任校对:王 瑞
责任印制:张 伟/封面设计:许 瑞

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年12月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2017年12月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:370 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



《“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书》

编 委 会

主 编 蒋 勇

副主编 李 刚 刘文军 程国胜

编 委 (按姓氏笔画排序)

王曰朋 方金辉 朱节中 杨兴东

肖建中 吴永成 吴佳贤 张太忠

张孝金 陈文兵 费文龙 夏大峰

曹春正 雷金贵

前言

大气科学无论是理论研究还是实际业务的进一步发展,对数学理论和数学方法的学习都提出了更紧迫的要求。

本书是在南京信息工程大学“大气科学中的数学方法”课程讲义的基础上修改而成。根据大气动力学、数值天气预报和变分资料同化学习的需要,书中较为系统地介绍了微分动力系统、摄动方法、小波分析、偏微分方程数值求解、变分与有限元方法及变分伴随方法等内容。第1章介绍了动力系统定性理论和相平面分析中的奇点附近相轨线分布,极限环的产生以及非线性系统研究中的线性化近似问题等,并在具有典型应用背景的动力学框架内(如厄尔尼诺-南方涛动)阐述了相关概念的应用。第2章主要介绍了摄动法的分类以及相关基本概念,以埃克曼(Ekman)边界层旋转流体运动为例较为详细地描述了匹配渐近展开法的基本思想和计算过程。第3章内容包括连续小波变换、离散小波变换、经典的Mallat分解和重构算法等,在此基础上结合神经网络介绍了小波在时间序列预测中的应用。第4章从简单模型出发,导入有限差分法的基本概念、相应的差分格式构造,分析典型有限差分格式应用及其特征性质,分别以二维正压涡度方程和浅水方程为例,介绍了具体的数值格式及其数值实现。第5章是变分与有限元的内容。变分问题及其理论和方法已深入到应用数学、计算数学等领域,在近代数学和应用工程领域占有重要地位。借助变分方法,不仅能完成椭圆型偏微分方程解的存在性证明,而且还可从相应的变分问题出发直接用有限元方法实现其(弱)解。这一章将首先简要介绍变分方法相关概念,在此基础上,讨论椭圆型偏微分方程边值问题及其变分问题,最后介绍有限元方法。第6章处理变分伴随问题所依赖的重要数学知识,涉及“对偶与伴随”的重要思想和相关内容。本章安排的最开始首先对最优控制理论作一简介,然后简要回顾了线性空间和线性泛函的一些必要知识,引出算子伴随、方程伴随的介绍,给出伴随方法的基本原理,在此基础上,转向变分伴随方法在敏感性分析、参数反演与动力初始化及稳定性分析方面的应用介绍。

编写过程中,从基本概念出发,既突出数学方法建立的过程,又注意到学科交叉,举例安排力求体现气象特色,以达到对相关知识和内容快速理解、掌握和融会贯通的目的。整本书涉及理论并不多,数学处理上浅显易懂,读者只要具有一般高等数学、线性代数、数理方程知识就可以学习全书。另外,为了方便读者有选择性地学习,在知识前后衔接的基础上,尽量做到各章自成体系,具有一定的独立性。

本书编写,得到了国家自然科学基金(41375115, 61572015)的支持,也得到了南京信息工程大学课程建设基金的支持,在本书的出版过程中,得到了南京信息工程大学数学与统计学院《“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书》编委会和科学出版社的正确指导和

大力支持与帮助, 责任编辑许蕾女士倾注了很多心血, 做了大量辛勤的工作, 编者在此一并表示衷心感谢!

在资料汇集整理过程中, 尽管常常为如何理解某些概念而再三斟酌, 但由于编者学识有限, 书中难免出现疏漏和不妥, 衷心希望各位读者给予批评指正, 不吝赐教, 以期改进.

编 者

2018 年 3 月

目 录

前言

第 1 章 微分动力系统初步	1
1.1 平面系统的奇点及稳定性	1
1.2 轨线的极限态	7
1.3 Lyapunov 函数	10
1.4 中心流形定理	12
1.5 Hopf 分支	14
1.6 混沌	23
第 2 章 摄动方法	26
2.1 摄动理论的有关概念	26
2.2 正则摄动	37
2.3 匹配渐近展开法	40
2.4 多重尺度法	49
2.5 伸缩坐标法	58
2.6 约化摄动法	63
第 3 章 小波分析	69
3.1 准备知识	69
3.2 Fourier 变换	72
3.3 连续小波变换	78
3.4 离散小波变换	86
3.5 多分辨分析	90
第 4 章 偏微分方程数值求解的有限差分方法	102
4.1 导数的有限差分近似	102
4.2 三类典型方程的有限差分格式	113
4.3 有限差分格式的相容性、收敛性及稳定性	123
4.4 研究有限差分格式稳定性的 Fourier 方法	128
4.5 二维问题	136
4.6 非线性不稳定和守恒格式	141
第 5 章 变分与有限元方法	149
5.1 变分及变分问题	149

5.2	偏微分方程及其变分问题——椭圆边值问题的弱形式	162
5.3	Ritz-Galerkin 法	169
5.4	有限元方法	173
第 6 章	变分伴随方法	186
6.1	最优控制理论简介	186
6.2	伴随	202
6.3	动力约束的变分问题	215
6.4	变分伴随方法其他应用	226
主要参考文献		239

第1章 微分动力系统初步

在力学、生物生态学及大气动力学等学科的研究中,经常遇到联系自变量、未知函数及其导数的关系式,即微分方程. 求出微分方程的解析解往往比较困难,所以定性理论和相平面分析是研究微分动力系统中基本而重要的方法. 本章作为预备知识,简单介绍定性理论中的一些基本概念及其常用的分析方法,如奇点附近的相轨线分布、极限环的产生以及非线性系统研究中的线性化近似问题等. 在内容的安排和叙述中,尽可能做到自成体系和通俗易懂. 在应用举例中,力求将理论分析和计算模拟结合,体现定性理论研究结论的准确性、直观性及数值计算的重要性.

1.1 平面系统的奇点及稳定性

本节介绍二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 中的微分方程(二维平面系统). 由于只有两个分量,所以经常用两个标量方程来表示二维系统. 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

称为自治系统,若存在点 (x_0, y_0) 使 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, 则称其为系统的奇点(平衡点). 奇点是系统的一种特殊解(常数解),平衡点处的导数为零,即系统的初值若取该数值,则系统处于静止状态,因此奇点也称为平衡态;如果 $P(x, y), Q(x, y)$ 中还含有变量 t , 则称为非自治系统.

以下的讨论中总假定函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 $D: |x| < H, |y| < H (H \leq +\infty)$ 上连续并且系统(1.1.1)存在唯一、连续、满足初始条件的解.

系统(1.1.1)中的 (x, y) 是二维平面 xOy 上的点,也称 xOy 为相平面, (x, y) 为相点,相点的轨迹即系统的解 $x = x(t), y = y(t)$ 在相平面上的投影为相轨线. 例如,对如下系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (1.1.2)$$

易看出系统(1.1.2)满足初始条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ 的解为 $x = \cos t, y = \sin t$, 其在 (t, x, y) 三维空间中的积分曲线是经过点 $(0, 1, 0)$ 的一条螺旋线. 当 t 增加时,螺旋线向上方盘旋,上

述解在 xOy 平面上的轨线是圆 $x^2 + y^2 = 1$, 恰为上述积分曲线在 xOy 平面上的投影. 如图 1.1.1 所示, 改变初值, 相轨线的位置可能会随着改变. 由此, 用轨线来研究系统 (1.1.1) 的通解要比用积分曲线方便得多.

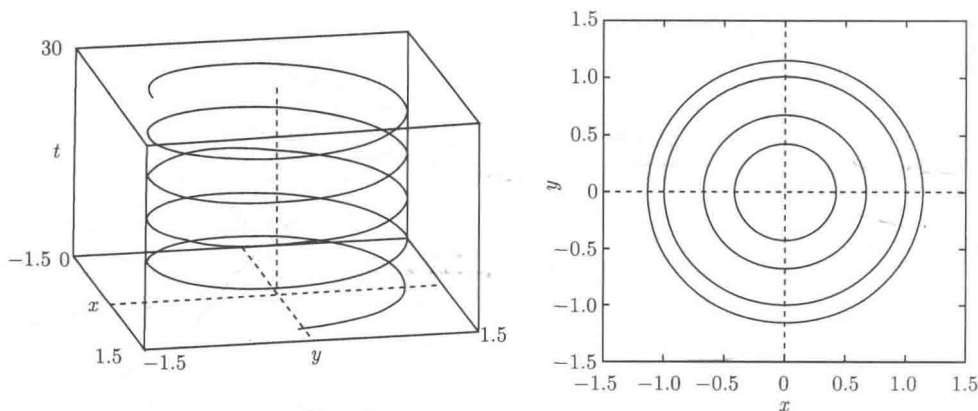


图 1.1.1 轨线及相图

定义 1.1.1 若 (x_0, y_0) 是系统 (1.1.1) 的平衡点. 如果对 (x_0, y_0) 的任一邻域 U , 存在 (x_0, y_0) 的一个属于 U 的邻域 U_1 , 如果 $(x(0), y(0)) \in U_1$, 对 $\forall t > 0$, 使系统 (1.1.1) 的任意轨线 $(x(t), y(t)) \in U$, 称 (x_0, y_0) 为稳定的; 否则为不稳定的.

如果 (x_0, y_0) 稳定, 并且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$, 就称平衡点 (x_0, y_0) 为渐近稳定的.

下面首先讨论平面线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (1.1.3)$$

的奇点 $(0,0)$ 附近轨线的分布.

上述系统写成向量形式为 $\dot{X} = AX$, 其中 $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 如果 $|A| \neq 0$,

则系统的奇点唯一. 记 $Y = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$, 由代数理论, 存在非奇异线性变换 $X = PY$, 可使系统

化为标准型 $\dot{Y} = BY$, 且矩阵 A 和矩阵 B 有相同的特征值.

根据矩阵 A 的特征根的不同情况, 方程的奇点可能出现以下几种类型.

1) 矩阵 A 有异号实特征值

这时系统 (1.1.3) 可标准化为 $\dot{Y} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} Y$, $\lambda < 0 < \mu$, 其解为 $\xi = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta = c_2 e^{\mu t}$,

解曲线在相平面上的图形如图 1.1.2 所示. 这样的奇点称为鞍点.

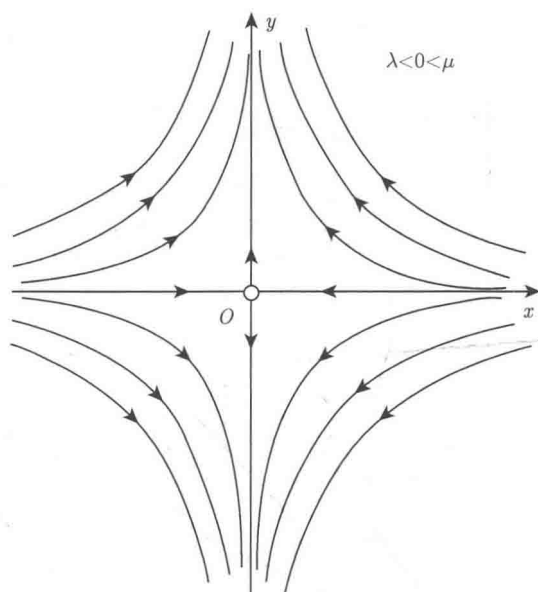


图 1.1.2 平面相图

2) 矩阵 A 的特征值都有负实部

又可分为以下几种情形.

(1) 矩阵 A 有相异负特征值: $\mu < \lambda < 0$, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. 解曲线在相平面上的图形如图 1.1.3 所示. 这样的奇点称为结点.

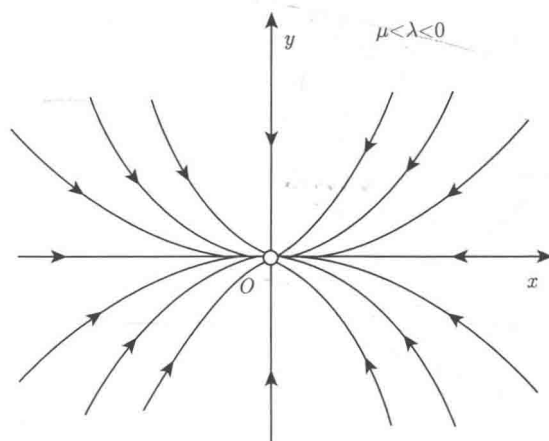


图 1.1.3 平面相图

(2) 矩阵 A 有重的负特征值: $\lambda < 0$, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 这样的奇点称为临界结点. 奇点附近的轨线具有如图 1.1.4 所示的分布, 称这样的奇点为临界结点.

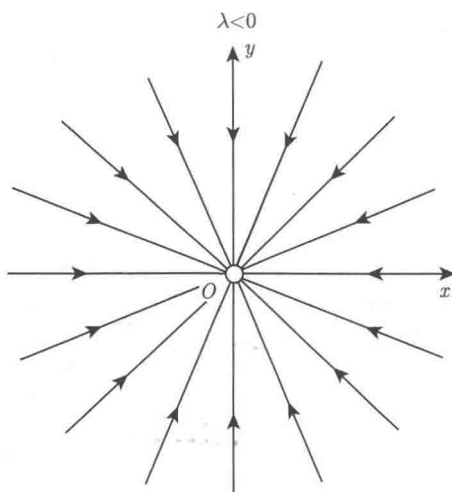


图 1.1.4 平面相图

(3) 矩阵 A 有重的负特征值: $\lambda < 0$, 但不能对角化, 这种情形下矩阵 $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$. 这样的奇点称为临界结点. 奇点附近的轨线具有如图 1.1.5 所示的分布, 称这样的奇点为退化结点.

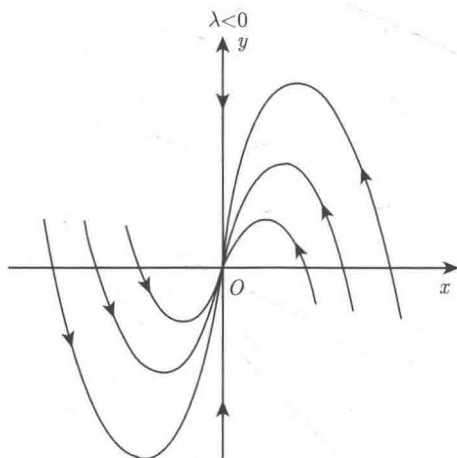


图 1.1.5 平面相图

(4) 矩阵 A 有复特征值: $\alpha \pm i\beta$, 且 $\alpha < 0$. 这种情形下奇点附近的轨线具有如图 1.1.6 所示的分布, 称这样的奇点为焦点.

3) 矩阵 A 的特征值都有正实部

分别与 2) 中相应情形类似, 奇点同名, 只是解曲线上的方向正好相反, 即随着时间的增加, 曲线向远离奇点的方向移动, 这类奇点统称为源. 2) 中相应情形所述的奇点称为汇.

4) 矩阵 A 的特征值为纯虚数 $\pm i\beta$

此时 $B = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$, 其解有形式 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = e^{Bt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, 并且解具有周期 $2\pi/\beta$, 轨线

封闭, 是以坐标原点为中心的圆族. 在奇点附近轨线如图 1.1.7 所示, 奇点为中心.

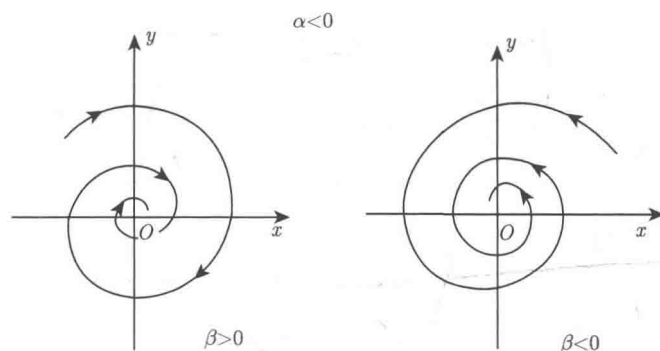


图 1.1.6 平面相图

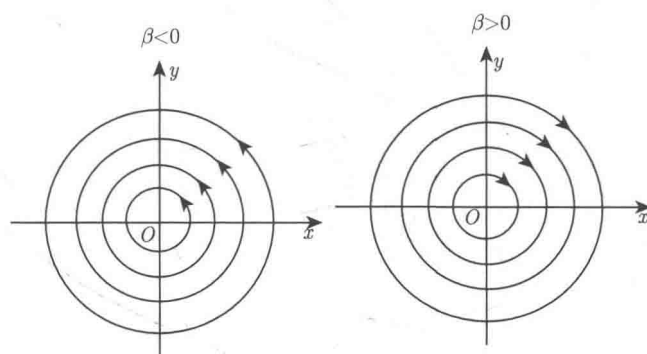


图 1.1.7 平面相图

综上, 系统 (1.1.3) 的唯一奇点的类型取决于矩阵 A 的特征值. 因为矩阵 A 的特征方程为

$$D(r) = \begin{vmatrix} r - a & b \\ c & r - d \end{vmatrix} = r^2 - \text{tr}A r + \det A = 0$$

其中, $\text{tr}A = a + d$, $\det A = ad - bc$ 分别为矩阵 A 的迹和矩阵 A 所对应的行列式. 为方便, 记 $T = \text{tr}A$, $D = \det A$, 则矩阵 A 的特征根可表示为

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$$

由此, 上面的结论可以在 T - D 平面上清晰地表示, 见图 1.1.8. 横轴外的 5 块区域和分界线相应参数的描述情况是清楚的.

在横轴上 ($\det A = 0$), 矩阵以 0 为单根或重根, 此时二阶系统 (1.1.3) 称为退化系统, 这里暂不做讨论.

现在考虑一般的二维自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1.4)$$

设 (x_0, y_0) 为其平衡点, $P(x, y), Q(x, y)$ 是解析函数.

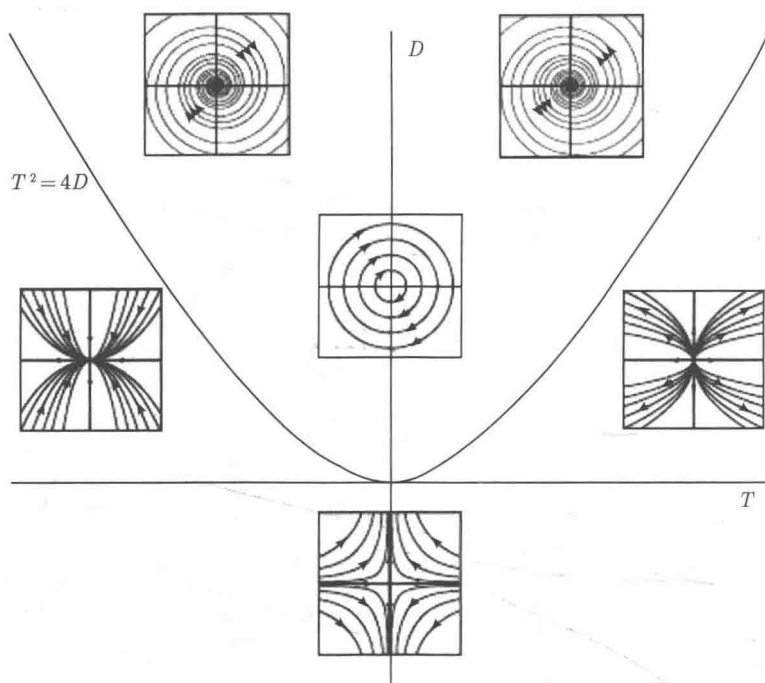


图 1.1.8 T - D 平面上相图的分类

以下系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \dot{y} = Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases} \quad (1.1.5)$$

称为系统 (1.1.4) 在平衡点 (x_0, y_0) 处的线性近似方程.

称 $A = \begin{bmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$ 为变分矩阵或 Jacobian 矩阵, $|\lambda I - A| = 0$ 为变分

矩阵对应的特征方程, λ 为特征值.

若矩阵 A 的所有特征值都有非零实部, 则 (x_0, y_0) 称为双曲型平衡点, 否则为非双曲型或退化平衡点. 简单起见, 本节仅仅研究一般非线性系统双曲型平衡点的稳定性. 明显地, 线性近似系统 (1.1.5) 为线性系统, 非退化情形下奇点的稳定性已讨论. 为进一步研究系统 (1.1.4) 平衡点的稳定性, 介绍一个深刻而常用的结论.

定理 1.1.1 (Hartmann 定理) 若 (x_0, y_0) 为双曲型平衡点, 则系统 (1.1.4) 与其在该平衡点处的线性近似方程 (1.1.5) 在 (x_0, y_0) 处具有相同的稳定性.

结合前面的讨论, 对于双曲型平衡点, 如果矩阵 A 的特征值的实部都为负数, 则其稳定; 如果矩阵 A 存在实部为正的 eigenvalue, 则其不稳定. 当平衡点退化时, Hartmann 定理不再适

用, 这时通过构造恰当的 Lyapunov 函数判定稳定性是常用的方法, 这种方法在后面的叙述中会做基本的介绍.

例 1.1.1 讨论 van der Pol 方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 (\mu > 0)$ 平衡状态的稳定性.

解 令 $y = x, z = \frac{dx}{dt}$, 则原方程化为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -y + \mu z - \mu y^2 z \end{cases} \quad (1.1.6)$$

上述系统在 $(0, 0)$ 处的线性近似方程为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -y + \mu z \end{cases} \quad (1.1.7)$$

容易得到特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$, 于是得 $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, 即存在正实部的根, 因而, 所讨论系统的平衡状态是不稳定的.

1.2 轨线的极限态

对于一般的平面微分系统 (1.1.4), 从其平衡点的稳定性可以知道该点附近解的情况, 而要了解整个平面上解的结构, 通常还要研究 $t \rightarrow \pm\infty$ 时轨线的极限态, 极限环是微分系统研究中重要的一种类型. 先看一个例子.

例 1.2.1 考察平面非线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x[1 - (x^2 + y^2)] \\ \frac{dy}{dt} = x + y[1 - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (1.2.1)$$

解 明显地, $(0, 0)$ 为平衡点, 并且可以讨论 $(0, 0)$ 是不稳定的焦点. 另外可验证, $x^2 + y^2 = 1$, 即 $\begin{cases} x = \cos(t - t_0) \\ y = \sin(t - t_0) \end{cases}$ 是系统的一个周期解, 轨线是单位圆.

系统的相图如图 1.2.1 所示, 有一个孤立的闭轨线, 其他轨线从圆内或圆外绕向单位圆.

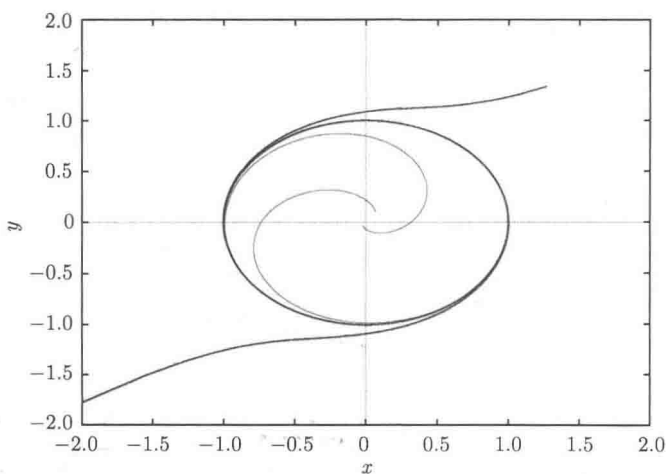


图 1.2.1 系统的相图

如例 1.2.1 中, 孤立的闭轨称为极限环.

定义 1.2.1 如果存在包含极限环的域 U , 使得从 U 内出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时都渐近接近极限环, 则称极限环稳定, 否则不稳定.

依定义, 例 1.2.1 中的单位圆是一个稳定的极限环. 现在关心的是除极限环外, 微分系统的轨线还会出现怎样的极限状态, 为此, 需要介绍动力系统和流的概念.

考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.2.2)$$

其中, $x \in W \subset \mathbf{R}^n$, $f(x)$ 使系统的解存在且唯一. 记系统满足初始条件 (t_0, x^0) 的解为 $x = \varphi(t, x^0)$. 若固定 t , 则 $\varphi(t, x) \equiv \varphi_t(x)$ 为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的变换, $\varphi(t, x)$ 定义在 $\Omega = \{(t, x) | (t, x) \in \mathbf{R}^1 \times W\}$ 上, 在 $W \subset \mathbf{R}^n$ 内取值. 让 t 变动, 则 $\varphi_t(x)$ 可看成 W 内的点沿着轨线流动. 所以, 形象地称 $\varphi_t(x)$ 为系统 (1.2.2) 的流或 $f(x)$ 的流.

系统 (1.2.2) 的流 $\varphi_t(x)$ 具有如下性质:

- (1) $\varphi_t(x)$ 是 Ω 上的连续函数, Ω 是 $\mathbf{R}^1 \times W$ 的开集;
- (2) $\varphi_0(x) = x$, 即 φ_0 是恒等映射;
- (3) $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$, 从而 $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

对于任意的 t , $\varphi_t(x)$ 的全体构成集合 $\{\varphi_t(x) = \varphi(t, x) | t \in \mathbf{R}^1\}$, 在其上定义乘法运算 $\varphi_t(x) \circ \varphi_s(x) \equiv \varphi_t(\varphi_s(x))$. 由上述流的性质容易验证集合 $\{\varphi_t(x)\}$ 对乘法运算封闭, 而且存在单位元和逆元. 因此, 变换的全体 $\{\varphi_t(x)\}$ 对所定义的乘法运算构成了一个含单参数 t 的群. 称 $\{\varphi_t(x) = \varphi(t, x) | t \in \mathbf{R}^1\}$ 为动力系统, 即系统 (1.2.2) 在 W 上的流就是一个动力系统, 也称系统 (1.2.2) 为动力系统.

设动力系统 $\{\varphi_t(x)\}$ 对应系统 (1.2.2), 以下讨论系统 (1.2.2) 的轨线 $\varphi_t(x^0)$ 在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时的极限状态.

下述定理是基本而重要的, 这里只给出结论, 略去证明过程.

定理 1.2.1 系统 (1.2.2) 的轨线 $\varphi_t(x^0)$ 只能是如下三类型之一:

(1) 不封闭; (2) 闭轨线; (3) 平衡点.

闭轨线 (极限环) 和平衡点 (轨线上流速为 0 的点, 相对应的系统处在静止状态) 是两类重要的轨线集, 对于具体的应用动力系统而言, 它们表示系统的两种特殊解, 即周期解和定态, 但需要指出的是, 不封闭的轨线的极限态可能非常复杂.

定义 1.2.2 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi_t(x^0) \rightarrow \bar{x}$, 则 $\bar{x}$ 为轨线 $\varphi_t(x^0)$ 的 ω 极限点, $\varphi_t(x^0)$ 的所有 ω 极限点的集合为 $\varphi_t(x^0)$ 的 ω 极限集, 记为 $L_\omega(x^0)$; 类似地, $t \rightarrow -\infty$, 可得轨线 $\varphi_t(x^0)$ 的 α 极限点和 α 极限集 $L_\alpha(x^0)$ 的定义.

例如, 平衡点 x^0 是轨线 $\varphi_t(x^0)$ 唯一的 ω 极限点, 也是唯一的 α 极限点; 闭轨 $\varphi_t(x^0)$ 上任一点是它自己的 ω 极限点和 α 极限点; 渐近稳定的平衡点 x^0 是所有当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于它的轨线的 ω 极限点.

不变集: 集合 A 为不变集, 如果 $x \in A, \forall t \in \mathbf{R}^1, \varphi_t(x) \in A$; 集合 A 为正 (负) 不变集, 如果 $x \in A, \forall t > 0 (t < 0), \varphi_t(x) \in A$.

显然, 任一轨线都是不变集; 任一不变集都是由系统的一些整轨线组成的.

连通集: 集合 A 是连通集, 若不存在 A 的非空闭子集 A_1 和 A_2 , 使得 $A = A_1 \cup A_2$ 且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

极限集有下面重要的性质:

- (1) $\omega(\alpha)$ 极限集是闭集, 若非空, 则还是不变集;
- (2) 若正半 (负半) 轨线的 $\omega(\alpha)$ 极限集有界, 则必连通;
- (3) (Poincaré-Bendixson 定理) 若极限集非空、有界、不包含平衡点, 则一定是一条闭轨线;
- (4) (环域定理) 由两条闭曲线所围的环形区域 D 的边界上轨线自外向内, 且 D 内无平衡点, 则 D 内至少有一个稳定的极限环.

例 1.2.2 1.1 节中研究过的 van der Pol 方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 (\mu > 0)$. 引入变量 $y = \frac{dx}{dt}$, 则原方程化为平面系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y \end{cases} \quad (1.2.3)$$

数值模拟: $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 1.5$ 时系统在相平面内的部分轨线分别如图 1.2.2 所示, 对应 μ 的一些不同取值, 系统中存在稳定的极限环 (周期解).