主 编 张文钢 李春桃

普通高等院校数学类课程教材

高等数学及其应用（上册）

GAODENG SHUXUE JIQI YINGYONG

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校数学类课程教材

高等数学及其应用

（上册）

主　编　张文钢　李春桃

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是为了适应培养应用型的大学本科经济管理类人才的要求而编写的基础课教材，全书系统地介绍了有关微积分的知识，选编了相当数量的典型例题，特别介绍了一定数量的经济应用例题，以提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力. 本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用. 上册/张文钢，李春桃主编. —武汉：华中科技大学出版社，2018.7
ISBN 978-7-5680-4444-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①张…　②李…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 165909 号

高等数学及其应用(上册)
Gaodeng Shuxue ji Qi Yingyong(Shangce)

张文钢　李春桃　主编

策划编辑：谢燕群
责任编辑：余　涛
封面设计：原色设计
责任校对：张会军
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园　邮编：430223
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：武汉洪林印务有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16.25
字　　数：334 千字
版　　次：2018 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

华中出版

前　　言

随着社会的进步，我国的高等教育也有了突飞猛进的发展，无论是为了提高学生的素质还是相关专业对高等数学知识的需要，都对基础课教材，尤其是数学教材提出了更新、更严格的要求。“高等数学”课程是经济管理类、理工科各专业的重要基础课程，除了要求学生掌握高等数学的基本知识以外，还强调培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力和定量思维能力，以及运用数学的理论和方法解决实际问题的能力。

本书主要根据经济管理类各专业的本科数学基础课程的教学要求，参照研究生入学统一考试数学三的考试大纲，以及作者多年经济管理类本科专业“高等数学”课程的教学经验编写而成。本书具有以下特色：

(1) 突出高等数学的基本思想和基本方法。目的在于方便学生理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，更多的是让学生体会高等数学的本质和内涵。

(2) 贴近实际应用。本书在对基本概念的叙述中，力求从身边实际问题出发，提出一些在自然科学、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，以例题或问题的形式让学生来阅读或解答，以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学知识解决实际问题的能力。

(3) 充分考虑到部分学生考研的需求及教学基本要求，重新构建学生易于接受的微积分的内容体系，本书适当地编写了一些不被基本要求包含的内容，供学生选修之用。还编入了 Matlab 软件的部分应用，希望借此提高学生利用计算机软件解决部分数学问题的能力。

(4) 按照分层次教学要求，对有关内容和习题进行了设计和安排。每章都加了一节关于 Matlab 软件的简单应用，每节附有习题，每章附有总复习题，对于超过教学基本要求及为某些相关专业选用的基本内容，均在书中以 * 号标出。

全书分上、下两册，上册包括一元函数的极限与连续、一元函数微积分学及其应用等内容，下册包含微分方程与差分方程、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、级数等内容。附录有常见的初等数学公式、几种常见的曲线、积分表、Matlab 软件简介等。本书主要面向高等院校经济类本科专业，也可作为普通高等专科院校各

专业的高等数学教材。

本书由张文钢、李春桃任主编,龙松、张秋颖任副主编,同时,参与习题编写的还有朱祥和、徐彬、沈小芳、张丹丹等,在此,对他们的工作表示感谢!

在本书编写过程中,得到了武昌首义学院基础科学部主任齐欢教授、数学教研室主任叶牡才教授及数学教研室其他各位老师的大力支持,他们对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢!

最后,本书作者再次向所有支持和帮助过本书编写与出版的单位和个人表示由衷的感谢!

由于作者水平所限,书中不妥和错误之处在所难免,敬请专家、同行和广大读者批评指正!

编者

2018 年 4 月

目　　录

第 1 章　函　　数

微积分是高等数学的主要内容，而函数是微积分的研究对象，并且是在自然科学、工程技术以及人文社会科学中有着广泛应用的数学概念. 高等数学是以极限方法为基本研究手段的数学学科. 本章首先对中学已学过的函数相关内容进行复习，继而介绍极限的概念、性质、运算等知识，最后通过函数的极限引入函数的连续性概念，这些内容是“高等数学”课程极其重要的基础知识.

1.1　集合与函数

1.1.1　集合

集合是近代数学最基本的概念之一. 一般地，具有某种特定性质且彼此可以区别的事物或对象的总体称为**集合**，简称**集**. 集合中的每一个事物或对象称为该集合的元素.

习惯上用大写字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说“a 属于 A”，记为 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说“a 不属于 A”，记为 $a\notin A$.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限个元素的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

集合的表示方法一般有两种：一种是列举法，即把集合的元素一一列举出来，并用“{}”括起来表示集合. 例如，由 1，2，3，4，5 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

另一种是描述法，即设集合 M 所有元素 x 的共同特征为 P，则集合 M 可表示为

$$M=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，集合 A 是不等式 $x^2-x-2<0$ 的解集，就可以表示为

$$A=\{x\,|\,x^2-x-2<0\}$$

由实数组成的集合，称为**数集**，初等数学中常见的数集有：

(1) 全体非负整数即自然数组成的集合称为**非负整数集**（或**自然数集**），记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

(2) 全体正整数的集合称为**正整数集**,记作 $\mathbf{N}^+$,即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

(3) 全体整数的集合称为**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

(4) 全体有理数的集合称为**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

(5) 全体实数的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

1.1.2 区间与邻域

微积分中常用的一类实数集是区间,设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,介于 a,b 之间的一切实数所构成的集合称为**区间**,a 与 b 称为**区间端点**,按照是否包含区间端点,可分为

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间 $(a,b]=\{a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{a\leqslant x<b\}$

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 这些区间可用数轴上的有限线段来表示. 此外还有所谓的**无限区间**

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可记作 $(-\infty,+\infty)$,它是一个无限区间. 这里 $+\infty$(读作正无穷大),$-\infty$(读作负无穷大)只是一个记号,不是一个数.

以后在不区分区间类型时,就简单称为"区间",并常用 I 表示.

上述区间在数轴上的表示如图 1.1.1 所示.

在微积分的概念中,很多时候需要考虑点 x_0 附近区域内的所有点所构成的集合,为此引入**邻域**的概念.

定义 1.1.1 设 x_0 和 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,简称为点 x_0 的邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x_0\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

这里,点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,图形表示如图 1.1.2 所示.

另外,点 x_0 的邻域去掉中心点 x_0 后,称为点 x_0 的**去心邻域**,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

图形表示如图 1.1.3 所示.

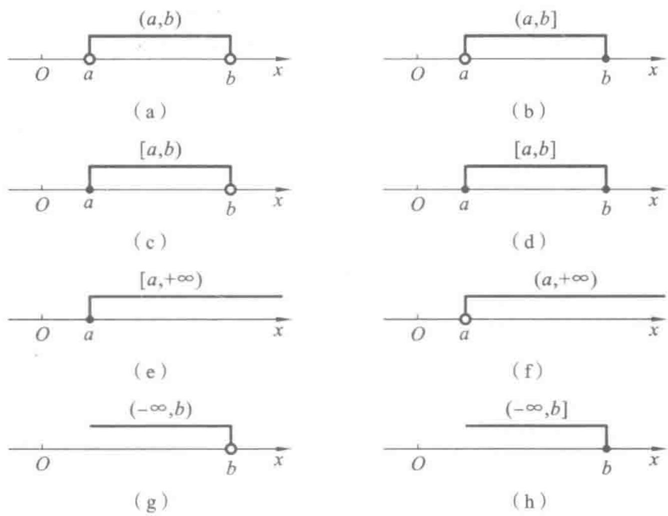

图 1.1.1

其中$(x_0-\delta, x_0)$称为点x_0的**左邻域**，$(x_0, x_0+\delta)$称为点x_0的**右邻域**.

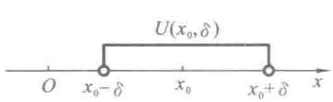

图 1.1.2

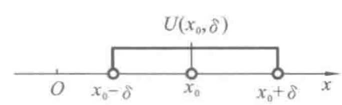

图 1.1.3

1.1.3　函数的定义

定义 1.1.2　设x和y是两个变量，D_f是一个非空数集. 如果对每个$x \in D_f$，变量y按照某一对应法则f，有唯一确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$. 称x为**自变量**，y为**因变量**，x的变化范围D_f称为函数$y=f(x)$的**定义域**. 函数值$f(x)$的全体成为函数f的值域，记作R_f，即

$$R_f = \{y \mid y=f(x), x \in D_f\}$$

函数记号$y=f(x)$中的字母"f"反映自变量与因变量的对应规则，即函数关系. 对应规则也常常用"φ""g""h""F"等表示，而函数关系也可以记为$y=\varphi(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$等. 有时也可以简记作$y=y(x)$，此时等号左边的y表示函数值，右边的y表示对应规则.

如果对每个$x \in D_f$，变量y只有一个确定的值与之对应，这种函数称为**单值函数**；如果每个$x \in D_f$对应两个或两个以上的y值，通常这种函数称为**多值函数**. 对多值函数，可以将其拆成若干个单值函数进行讨论. 以后如无特别说明，我们所研究的函数都是单值函数.

在数学中，若不考虑函数关系的实际意义，只是抽象地研究用数学表达式表达的函数，这时若无特别强调，函数的定义域就是使这个函数的数学表达式有意义的自变量取值的集合.

如果 x_0 是定义域内的点，则说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 有定义.

函数的两要素:函数的定义域和对应关系为确定函数的两要素.

例 1.1.1 求函数 $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{5}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域.

解 要使算式有意义，必须

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \quad 且 \quad 25-x^2\geqslant 0$$

即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|\leqslant 5$，从而 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5\leqslant x\leqslant 5$. 所以，所求函数的定义域为 $[-4,5]$.

例 1.1.2 判断下列各组函数是否相同.

(1) $f(x)=x, g(x)=\frac{x^2}{x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$;

(3) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$.

解 (1) $f(x)=x$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}\}$，$g(x)=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$. 两个函数定义域不同，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为一切实数. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同函数.

(3) $f(x)=x$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}\}$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$. 两个函数定义域不同，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

表示一个函数的方法通常有列表法、图像法、解析法(公式法)三种. 常用的方法是图像法和公式法两种. 在此不再多做说明.

例 1.1.3 函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数. 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R_f=[0, +\infty)$，如图 1.1.4 所示.

例 1.1.4 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，函数为狄利克雷(Dirichlet)函数，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{0,1\}$. 由于任意两个有理数之间都有无理数，并且任意两个无理数之间也都有有理数，所以它的图形无法描绘.

例 1.1.5 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 为符号函数，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为

$\{-1,0,1\}$，如图 1.1.5 所示.

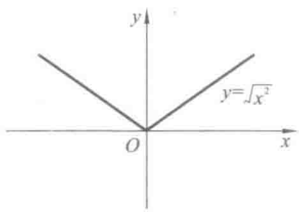

图 1.1.4

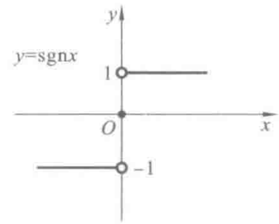

图 1.1.5

例 1.1.6　函数 $y=[x]$，此函数为取整函数，定义域为 $\mathbf{R}$，设 x 为任意实数，y 为不超过 x 的最大整数，值域 $\mathbf{Z}$，如图 1.1.6 所示.

例 1.1.7　求函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域，并求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，作出函数图像.

解　函数的定义域为 $\{x\,|\,|x|<1\}\cup\{x\,|\,1<|x|\leqslant 2\}$，即 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1=\dfrac{5}{4}$，如图 1.1.7 所示.

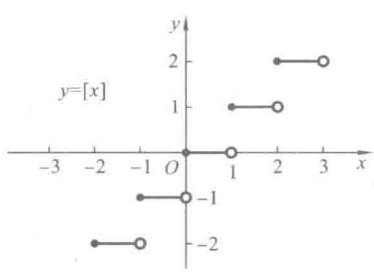

图 1.1.6

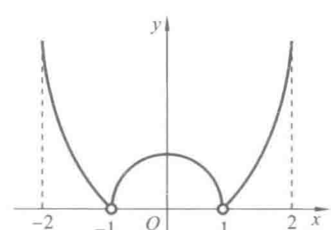

图 1.1.7

从上述例子可以看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在定义域的不同区间内，对应法则用不同式子表示的函数称为**分段函数**. 应特别注意，分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数. 其定义域是每个式子自变量取值范围的并集.

1.1.4　函数的性质

1. 函数的有界性

定义 1.1.3　设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，$I\subset D$，若存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

若对任意的 $M>0$，总存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界，如图 1.1.8.

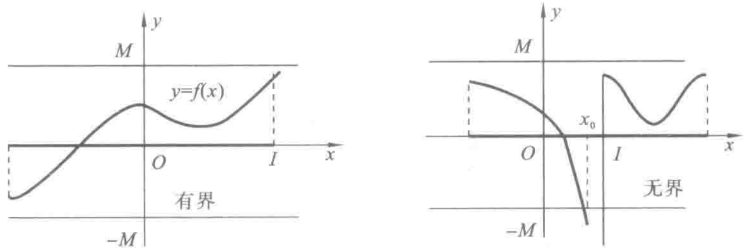

图 1.1.8

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的：$|\cos x|\leqslant 1$；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(见图 1.1.9).

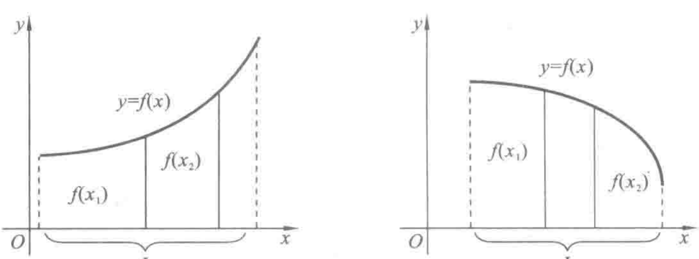

图 1.1.9

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若在 D 上满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若在 D 上满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$，由于 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数；又如函数 $f(x)=x^3$，由于 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数，如图 1.1.10 所示.

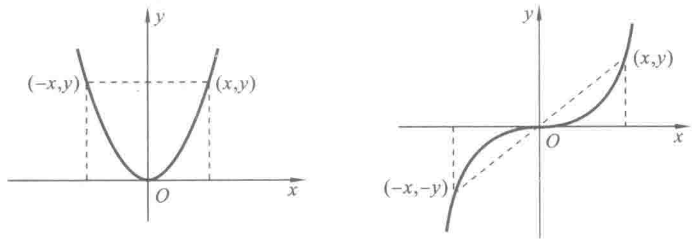

图 1.1.10

从函数图形上看，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$ 时有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的周期. 如果在函数 $f(x)$ 的所有正周期中存在一个最小的正数，我们就称这个正数为 $f(x)$ 的**最小正周期**，也称为**基本周期**，如无特别说明，以后我们所说的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期为 2π，函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期为 π.

另外，需要指出的是，某些周期函数不一定存在最小正周期. 例如，常量函数 $f(x)=C$，对任意实数 T，都有 $f(x+T)=f(x)$，故任意实数都是其周期，显然它没有最小正周期.

再比如，任意有理数都是狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

的周期，由于不存在最小的正有理数，故它没有最小正周期.

有很多自然现象，像季节、气候等都是年复一年的呈周期变化的；还有很多经济活动，小到商品销售，大到经济宏观运行，其变化具有周期规律性.

1.1.5 反函数

定义 1.1.4 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D_f，值域为 R_f. 如果对于每一个 $y\in R_f$，有唯一的一个 $x\in D_f$ 与之对应，并使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)$$

显然，$x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 R_f，值域为 D_f. 由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)$ 的反函数也可表示为

$$y=f^{-1}(x)$$

例如，指数函数 $y=e^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数为