

数学实践与建模

主 编 刘法贵

副主编 张愿章



科学出版社

数学实践与建模

主 编 刘法贵
副主编 张愿章



科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书旨在引导学生掌握数学实践与建模,以培养学生数学能力(实践能力、创新能力等),同时也旨在将数学工具软件与数学深度融合.本书是在华北水利水电大学数学实践与建模讲义的基础上修改而成,内容包括MATLAB 简介及其应用、数学建模与论文写作、数学实践案例、几类常见的数学建模方法、智能算法.在内容编排上,本书精选来自工程、经济、生活或医学等多个领域的实际问题,目的在于引导读者提升运用数学知识解决实际问题的实践能力和意识.

本书可作为高等院校非数学专业工科类、经济类等专业的数学实践或数学建模课程的教材,也可作为数学建模竞赛辅导的参考书,同时可供自学者阅读和有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学实践与建模/刘法贵主编. —北京:科学出版社, 2018

ISBN 978-7-03-058636-0

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学模型—高等学校—教材 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 198179 号

责任编辑:胡海霞 李香叶 / 责任校对:张凤琴

责任印制:师艳茹 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张: 12 1/2

字数: 252 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《数学实践与建模》编写委员会

主 编 刘法贵

副 主 编 张愿章

参编人员 (按姓氏笔画排序)

李艳玲 张 玉 张洪瑞 岳红伟

赵中建 黄春艳 彭高辉 程 鹏

前 言

数学实践与建模是在大学生学习高等数学、线性代数和概率论与数理统计等公共基础课程之后的一门数学实践课程,旨在培养学生应用已掌握的数学知识建立数学模型、解决实际问题的能力,同时也希望为学生提供利用数学工具软件来验证数学理论、解决数学实际问题的基本方法与技巧。

目前,在数学教学活动中,存在着重知识传授轻实践应用、重内容体系完整轻现代信息技术(尤其是数学工具软件)融合、重理论架构轻数学能力提升等现象,因此,为解决这些问题,本书在内容组织与编排上作以下考虑:一是充分考虑数学实践与应用,这些实践与应用实例大都源自经济、工程技术、自然科学等方面的现实问题;二是大部分实例应用数学工具软件实现,以体现现代信息技术的融合;三是精心选择一些典型实例,以使得学生见识如何“用好”数学理论建立数学模型、解决实际问题。

数学实践和数学建模过程是一个创造性的过程。学生参加数学实践活动和数学建模活动,需要充分了解产生问题的实际背景及涉及的学科领域知识,还要具有查阅大量文献资料、准确获取解决问题所需信息的能力;需要充分了解现代数学多学科知识和数学方法,把所掌握的数学理论创造性地解决具体问题,构建其数学结构;需要充分了解一套数学工具软件,熟练地把现代信息技术应用于验证数学知识、解决实际问题;需要充分了解撰写数学论文的基本架构,把实践过程和结果完美地呈现出来。因此,数学实践与建模是培养学生实践能力与创新能力的一门重要课程。

本书在内容组织上,首先介绍 MATLAB 软件的基本功能及数学基本问题的求解方法;其次从简单的数学模型入手,逐步引导读者向综合模型和方法过渡,而没有把较多篇幅放在数学模型和方法的基本原理的阐述上,读者可以根据自己的兴趣和特长及时补充相关知识背景;最后介绍几种智能算法。在讲授本书时,教师可以根据学时、学分要求进行取舍。

在编写过程中,编者参阅了众多专家学者的学术著作和教材,并引用了部分原文及参考实例,在此表示真挚谢意。本书由刘法贵、张愿章组织,张洪瑞、彭高辉、李艳玲、黄春艳、张玉、岳红伟、赵中建、程鹏(排名不分先后)等同志参与编写,所有编写人员都是来自于数学教育和数学建模培训的一线教师,语言和组织尽量从学习者的需求出发,习题设计也具有开放性,有利于读者数学建模思维的培养和训练,力求进一步提升学生的实践和创新能力。

感谢华北水利水电大学数学与统计学院的数学教师,他们为本书的编写提出了

很好的意见和建议,也感谢科学出版社的昌盛同志和胡海霞同志,他们为本书的出版提供了大力支持.

由于编者水平有限,不周和不当之处在所难免,敬请批评指正.

编 者

2018 年 4 月

目 录

第 1 章	MATLAB 简介及其应用	1
1.1	MATLAB 简介	1
1.1.1	MATLAB 窗口与菜单	1
1.1.2	变量与符号	2
1.1.3	函数与 M 文件	4
1.1.4	程序控制结构	5
1.1.5	MATLAB 帮助系统	9
1.1.6	MATLAB 绘图	10
1.1.7	初学者的几个提醒	11
1.2	一元函数微积分应用举例	11
1.2.1	函数的极限	11
1.2.2	一元函数微分	12
1.2.3	一元函数积分	12
1.2.4	常微分方程	13
1.2.5	级数	14
1.3	多元函数微积分应用举例	14
1.3.1	多元函数绘图	14
1.3.2	多元函数微分	16
1.3.3	多元函数积分	17
1.4	线性代数应用举例	19
1.5	概率论与数理统计应用举例	21
1.5.1	MATLAB 中常用分布函数	21
1.5.2	参数估计与假设检验	22
1.5.3	回归分析	24
1.6	数独游戏	26
	习题 1	29
第 2 章	数学建模与论文写作	30
2.1	数学建模	30
2.1.1	数学模型与数学建模	30
2.1.2	数学建模流程	32

2.2 数学建模论文写作	36
2.3 建模范文示例——长江水质的评价和预测	38
习题 2	44
第 3 章 数学实践案例	47
3.1 高等数学实践案例	47
3.2 线性代数实践案例	57
3.3 概率论与数理统计实践案例	60
习题 3	63
第 4 章 几类常见的数学建模方法	65
4.1 插值与数据拟合	65
4.1.1 插值方法	65
4.1.2 数据拟合	68
4.1.3 数据拟合 MATLAB 实现	69
4.1.4 插值与拟合方法的选择	71
4.2 模糊数学方法	71
4.2.1 模糊数学基本概念	72
4.2.2 模糊贴近度	73
4.2.3 模糊聚类	74
4.2.4 模糊综合评判	76
4.3 灰色系统方法	78
4.3.1 灰色关联度	78
4.3.2 数据序列误差分析	82
4.3.3 数据累加与累减	82
4.3.4 GM(1,1) 模型	84
4.4 统计分析方法	85
4.4.1 判别分析	85
4.4.2 主成分分析	87
4.4.3 因子分析	90
4.5 层次分析法	94
4.5.1 基本原理	94
4.5.2 应用	96
4.6 规划方法	100
4.6.1 线性规划	100
4.6.2 非线性规划	103
4.6.3 整数规划	106

4.7 云模型与 K -均值	108
4.7.1 云模型	108
4.7.2 K -均值	111
4.8 微分与差分方法	114
4.8.1 微分方法	114
4.8.2 差分方法	118
4.9 排队论	121
4.9.1 基本构成与指标	121
4.9.2 排队系统数量指标与符号说明	122
4.9.3 等待制模型 $M/M/S/\infty$	122
4.10 时间序列预测法	124
4.10.1 移动平均法	124
4.10.2 指数平滑法	126
4.10.3 季节指数法	128
习题 4	131
第 5 章 智能算法	134
5.1 遗传算法	134
5.1.1 算法概述	134
5.1.2 算法流程及 MATLAB 工具箱	136
5.1.3 遗传算法的应用	138
5.1.4 关键参数说明	143
5.2 模拟退火算法	144
5.2.1 算法概述	144
5.2.2 算法流程及应用	145
5.2.3 关键参数说明	149
5.3 人工神经网络	150
5.3.1 算法概述	150
5.3.2 神经网络的基本模型	150
5.3.3 BP 神经网络函数说明及应用	154
5.4 蚁群算法	158
5.4.1 算法概述	158
5.4.2 算法流程及应用	159
5.4.3 关键参数说明	165
5.5 粒子群算法	166
5.5.1 算法概述	166

5.5.2 算法流程及应用	168
5.5.3 关键参数说明	171
5.6 差分进化算法	172
5.6.1 算法概述	173
5.6.2 算法流程及应用	174
5.6.3 关键参数说明	179
5.7 禁忌搜索算法	180
5.7.1 算法概述	180
5.7.2 算法流程及应用	181
5.7.3 关键参数说明	185
习题 5	186
参考文献	189

第1章 MATLAB 简介及其应用

MATLAB(Matrix Laboratory) 是由 MathWorks 公司开发的数学软件, 它是目前常用的数学软件之一, 主要面向科学计算、可视化、交互式程序设计的高性能计算环境, 它集数值分析、矩阵计算、数据可视化以及非线性动态系统建模和仿真等诸多功能于一体, 较好地解决了科学研究、工程计算与设计等重要的实践问题.

1.1 MATLAB 简介

1.1.1 MATLAB 窗口与菜单

系统启动 MATLAB 后, 进入 MATLAB 集成环境, 包括 MATLAB 主窗口、命令窗口 (Command Window)、工作空间 (Workspace) 窗口、当前目录 (Current Directory) 窗口、历史命令 (Command History) 窗口、编辑窗口与图形窗口等.

MATLAB主窗口是 MATLAB 的主要工作界面, 它嵌入了一些子窗口, 也包括菜单栏和工具栏. 菜单栏见表 1.1, 工具栏提供了 10 个命令按钮, 这些按钮均有对应的菜单命令, 但使用起来比菜单命令更快捷、方便.

表 1.1 菜单栏

File 菜单项	实现有关文件的操作
Edit 菜单项	用于命令窗口的编辑操作
Debug 菜单项	用于调试 MATLAB 程序
Desktop 菜单项	用于设置 MATLAB 的集成环境的显示方式
Window 菜单项	主窗口菜单栏上 Window 菜单项包含子菜单 Call all, 用于关闭所有打开的编辑器窗口
Help 菜单项	用于提供帮助信息

命令窗口是 MATLAB 的主要交互窗口, 用于输入命令并显示除图形之外的所有执行结果, 命令窗口中的 “>>” 为命令提示符, 在其后键入命令, 回车后, MATLAB 就会解释、执行所输入的命令, 并给出计算结果.

一般来说, 一个命令行输入一条命令, 并以回车结束. 但一个命令行也可以输入若干条命令, 各命令之间以逗号分开. 若前一命令后带有分号, 则逗号可以省略.

如果一个命令行很长, 一行之内写不下, 可以在该行最后加 “...” 回车换行, 续写命令. 例如,

```
>>x=1+2+3+4+5+6+...
```

```
+7+8+9;
```

工作空间窗口位于默认界面左上方窗口, 是 MATLAB 用于存储变量和结果的内存空间. 该窗口显示工作空间中所有变量的名称、大小、字节数和变量类型说明, 可对变量进行观察、编辑、保存和删除.

当前目录窗口位于默认 (Default) 界面左上方窗口, 用鼠标点击可切换到前台. 当前目录是指 MATLAB 运行文件时的工作目录, 只有在当前目录或搜索路径下的文件、函数可以运行或调用. 在当前目录窗口中可以显示或改变当前目录, 也可以显示当前目录下的文件并提供搜索功能.

在 MATLAB 命令窗口输入一条命令后, MATLAB 按照一定次序寻找相关文件, 基本的搜索过程是, 检查该命令是否是一个变量、内部函数、当前目录下的 M 文件、MATLAB 搜索路径中其他目录下的 M 文件.

用户可以将自己的工作目录列入 MATLAB 搜索路径, 从而将用户目录纳入 MATLAB 系统统一管理. 设置的方法: ① 用 path 命令设置搜索路径, path(path, 'c:\mydir'); ② 用对话框设置搜索路径, 在 MATLAB 的 File 菜单中点击 Set Path 命令或在命令窗口执行 Pathtool 命令, 将出现搜索路径设置对话框. 通过 Add Folder 或 Add with Subfolder 命令按钮将指定路径添加到搜索路径表中, 在修改搜索路径后, 需要保存搜索路径.

历史命令窗口会自动保留自安装起所用过的命令的历史记录, 且标明了使用时间, 从而方便用户查询, 通过双击命令可进行历史命令的再运行. 如果要清除这些历史记录, 可在 Edit 菜单中点击 Clear Command History 命令.

编辑窗口与图形窗口在命令窗口的菜单中直接点击 File-New-M-file, 打开一个编辑窗口. 通常, MATLAB 程序在这个窗口编写 M 文件, 保存后在命令窗口输入文件名执行运算.

在命令窗口点击 File-New-Figure, 可以打开一个图形窗口, 但通常在执行绘图命令时, 自动打开具有相关图形的图形窗口.

这些窗口都有菜单和工具栏, 其功能与 Word 等软件类似, 这里不再一一介绍.

1.1.2 变量与符号

MATLAB 中变量包括两类: 特殊 (系统) 变量 (表 1.2) 和用户变量. 特殊变量在工作空间观察不到, 系统启动后, 这些变量即时赋值, 直接调用.

用户变量总是以字母开头, 由字母、数字或下划线组成, 中间不能有空格, 字母有大写、小写区分. 例如, A2b 与 a2b 是两个不同的变量. 一般不能与特殊变量及内部函数名相同 (如果同名, 则特殊变量以及内部函数将改变其值). 用户变量保存在工作空间, 可随时调用, 用命令 who 或 whos 能查到它们的信息.

表 1.2 特殊变量

变量名	说明	变量名	说明
i 或 j	虚数单位 $\sqrt{-1}$	Inf	无穷大
pi	圆周率 π	NaN	无意义的数, 如 $\frac{0}{0}$ 等
eps	浮点数识别精度 $2^{-52} = 2.2204 \times 10^{-16}$	ans	表示结果的缺省变量名
realimin	最小正实数 $2^{-2^{10}} = 2.2251 \times 10^{-308}$	nargin	所用函数的输入变量数目
realmax	最大正实数 $2^{2^{10}} = 1\,7977 \times 10^{308}$	nargout	所用函数的输出变量数目

数学运算符、关系与逻辑运算符、常用标点符号与命令分别见表 1.3~表 1.5.

表 1.3 数学运算符

运算符	含义
+, -, *	加法、减法、乘法运算, 数与数、数与矩阵、矩阵与矩阵之间的相加、相减与相乘
/	除法运算, a/b 表示为 $\frac{a}{b}$ 或 ab^{-1} (对矩阵而言)
\	左除运算, $a \backslash b = \frac{b}{a}$ 或 $a^{-1}b$ (对矩阵而言)
.*	点乘运算, 一种数组运算, 表示同型数组 (矩阵) 之间对应元素相乘
./	点除运算, 一种数组运算, 表示同型数组 (矩阵) 之间对应元素相除
.^	点幂运算, 一种数组运算, a, k 为数时表示 a^k ; a 为数组 (矩阵) 时, 表示数组 (矩阵) 中每个元素取 k 次幂
^	幂运算, a, k 为数时表示 a^k ; a 为方阵时, 表示矩阵的 k 次幂

表 1.4 关系与逻辑运算符

关系运算符	含义	关系运算符	含义	逻辑运算符	含义
<	小于	>	大于	&	逻辑与
<=	小于等于	>=	大于等于		逻辑或
==	等于	~=	不等于	~	逻辑非

表 1.5 常用标点符号与命令

标点	意义
:	$a:b$ 表示生成公差为 1 的数组; $a:c:b$ 表示生成公差为 c 的数组
;	数组的行分隔符, 用于语句末尾表示不显示运算结果
,	变量、选项、语句之间的分隔符, 用于语句句末, 显示运算结果
()	数组援引, 函数命令输入列表
[]	数组记号
{ }	元胞数组记录符
...	续行符, 用于句末, 表示本行输入未结束, 接下一行
%	注释符, 其后内容用于解释, 不参与运算
=	赋值符号
clear	清理内存命令
dir	显示目录下的文件

续表

标点	意义
type	显示文件内容
clf	清理图形内容
clc	清理工作窗口
save	保存内存变量到指定文件

关系与逻辑运算是元素之间的操作, 结果是特殊的逻辑数组 (矩阵). 值得注意的是, “=” 表示赋值, “==” 表示等于, 不可混淆. 在 MATLAB 中, “真 (True)” 用 1 表示, “假 (False)” 用 0 表示.

MATLAB 提供了一批产生矩阵的函数, 见表 1.6.

表 1.6 常用的产生矩阵的函数

zeros	产生零矩阵	diag	产生对角矩阵
ones	产生全 1 的矩阵	tril	取矩阵的下三角矩阵
eye	生成单位矩阵	triu	取矩阵的上三角矩阵
magic	生成魔术矩阵	pascal	生成 pascal 矩阵

例如, zeros(m,n) 生成 $m \times n$ 零矩阵. 矩阵也可以采用按行方式直接输入每个元素: 同一行中元素用逗号 “,” 隔开, 也可以用空格隔开 (空格个数不限), 不同的行用分号 “;” 或回车分隔. 所有元素都位于 “[]” 内, 例如, $A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]$ 或

$A=[1\ 2\ 3;4\ 5\ 6;7\ 8\ 9]$ 都表示 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.1.3 函数与 M 文件

在 MATLAB 中, 除三角函数正常表示外, 通常反正弦、反余弦和反正切函数分别表示为 asin(x), acos(x), atan(x), 其他常用数学函数和测试函数见表 1.7.

表 1.7 常用数学函数和测试函数

函数	意义	函数	意义	函数	意义
exp(x)	指数函数 e^x	fix(x)	向 0 取整	ceil(x)	向 ∞ 取整
sqrt(x)	开方	floor(x)	向 $-\infty$ 取整	real(x)	复数实部
abs(x)	绝对值	round(x)	按四舍五入方式取整	image(x)	复数虚部
log(x)	自然对数	log10(x)	十进对数	angle(x)	复数幅值
sign(x)	符号函数	sum(x)	元素求和	conj(x)	复数共轭

除表 1.7 之外, mod(m,n) 表示 m 除以 n 得到的在 0 与 $n - 1$ 之间的余数, rem(m,n) 表示 m 除以 n 得到的余数, 余数符号同 m .

复杂的程序在命令窗口调试、保存很不方便,一般使用程序文件.最常见的是 M 文件,它可以在编辑窗口编写保存,也可以在任何文本编辑菜单中编写,且以“m”作为扩展名存盘,即“文件名.m”.

M 文件分为两类:脚本文件 (script file) 和函数文件 (function file). 将多条 MATLAB 语句按要求写在一起,并以扩展名为“m”的文件存盘即构成一个 M 脚本文件.如果利用 MATLAB 的编辑器编写并存盘, MATLAB 自动加上扩展名.需要注意的是, M 脚本文件的命名与变量命名规则相仿,但文件名不区分大小写;要防止文件名与已有变量名、函数名和 MATLAB 系统保留名等冲突.

建立 M 文件有 3 种方法,一是从 MATLAB 主窗口 File 菜单中选择 New 菜单项,再选择 M-File 命令,出现 MATLAB 文本编辑器窗口;二是在 MATLAB 命令窗口输入命令 edit,启动 MATLAB 文本编辑器;三是单击 MATLAB 主窗口工具栏上的 New M-File 命令按钮,启动 MATLAB 文本编辑器.

打开已建立的 M 文件同样有 3 种方法:一是在 MATLAB 主窗口中的 File 菜单中选择 Open 命令,在对话框中选中并打开 M 文件;二是在 MATLAB 命令窗口输入命令 edit 文件名,则打开指定的 M 文件;三是单击 MATLAB 主窗口工具栏上 Open File 命令按钮,再从弹出的对话框中选中所需文件.

例 1.1 建立 $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 6.3}{x^2 + 0.05x - 3.14}$ 的 M 文件 fun0.m, 并计算 $f(1)f(2) + f^2(3)$.

```
function Y=fun0(x)
```

```
Y=(x^3-2*x^2+x-6.3)/(x^2+0.05*x-3.14);
```

在指令窗口运行以下指令:

```
>> fun0(1)*fun0(2)+fun0(3)*fun0(3)
```

```
ans=-12.6023
```

1.1.4 程序控制结构

1. 输入输出语句

数据的输入可以使用 input 函数从键盘输入,调用格式为 A=input(提示信息,选项),其中提示信息为一个字符串,用于提示用户输入什么样的数据.当调用 input 函数时采用“s”选项,则允许用户输入一个字符串.

数据的输出可以用 disp 函数输出,调用格式为 disp(输出项),其中输出项既可以是字符串,也可以是矩阵.

程序的暂停可以使用 pause 函数,调用格式为 pause(延迟秒数).如果省略延迟时间,则将暂停程序,用户直接按任意键后程序继续执行.若强行中止程序运行可使用 Ctrl+C 命令.

例 1.2 输入语句:

输入数值

```
>> x=input('please input a number:')
```

```
please input a number: 22
```

```
x=22
```

输入字符串

```
>> x=input('please input a string:', 's')
```

```
please input a string: this is a string
```

```
x= this is a string
```

输出语句:

```
>> disp(23+454-29*4)
```

```
361
```

```
>> disp([1,2,3;4,5,6])
```

```
1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
>> disp('this is a string')
```

```
this is a string
```

2. 选择结构**(1) 单分支 if 语句**

```
if 条件
    语句组
end
```

当条件成立时, 执行语句组, 执行结束后继续执行 if 语句的后继语句; 若条件不成立, 则直接执行 if 语句的后继语句.

(2) 多分支 if 语句

```
if 条件 1
    语句组 1
else if 条件 2
    语句组 2
.....
```

```

else if    条件  $m$ 
           语句组  $m$ 

else
           语句组  $m + 1$ 

end

```

例 1.3 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{P}}{2a}$, 这里 $P = b^2 - 4ac$ 为根的判别式. MATLAB 语句为

```

if P<0
    disp('This equation has two complex roots')
else if P==0
    disp('This equation has two identical real roots')
else
    disp('This equation has two distinct real roots')
end

```

(3) switch 语句

根据表达式取值的不同, 分别执行不同的语句, 其格式为

```

switch    表达式
case     表达式 1
         语句组 1
.....
case     表达式  $m$ 
         语句组  $m$ 

otherwise
         语句组  $n$ 

end

```

当表达式的值等于表达式 1 的值时, 执行语句组 1, 当表达式的值等于表达式 2 的值时, 执行语句组 2, ..., 当表达式的值等于表达式 m 的值时, 执行语句组 m . 当表达式的值不等于 case 所列表达式的值时, 执行语句组 n , 任意一个分支语句执行结束后, 直接执行 switch 语句的下一句.

(4) try 语句

```

try  语句组 1
catch 语句组 2

end

```