中国石油大学（北京）
现代远程教育系列教材

概率论与数理统计

Probability and Statistics

主编　赵兰苓

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计

主　编　　赵兰苓

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/赵兰苓主编. —东营:中国石油大学出版社,2014.12

ISBN 978-7-5636-4579-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 301521 号

书　　名: 概率论与数理统计

作　　者: 赵兰苓

责任编辑: 秦晓霞(电话 0532—86983567)

封面设计: 青岛友一广告传媒有限公司

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)

网　　址: http://www.uppbook.com.cn

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 青岛乐喜力科技发展有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981532,86983437)

开　　本: 180 mm×235 mm　印张:13.75　字数:291 千字

版　　次: 2014 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价: 27.50 元

中国石油大学(北京)现代远程教育系列教材

编审委员会

出版说明

当代，以国际互联网普及应用为标志的信息化浪潮席卷全球，技术革命正越来越深刻地改变着人类的生产、生活和思维方式。尤其从20世纪下半叶起，以多媒体、计算机和互联网为主要标志的电子信息通讯技术引发了一场教育和学习方式的深刻变革。

现代远程教育就是利用计算机、计算机网络和多媒体等现代信息技术传授和学习知识的一种全新教育模式。自1999年始，我国现代远程高等教育遵循以成人从业人员为主要教育对象，以应用型、复合型人才为主要培养目标，在促进教育信息化、大众化，以及构建终身教育体系等方面积累了丰富的经验，取得了可喜的成效。目前，现代远程高等教育已经成为我国高等教育体系的重要组成部分，成为非传统高等教育的主力和骨干。在这种全新的教育教学模式下，教师通过以网络为主的沟通途径（渠道）实施导学、助学、促学和评价，而学生通过线上、线下的自主学习和协作学习，不断提高自身的知识和能力水平。

为使现代远程教育更好地适应成人学习的特点和需求，中国石油大学（北京）远程教育学院组织出版了这套《中国石油大学（北京）现代远程教育系列教材》。这些纸质教材既是网络课程的一个重要组成部分，与网络课程相辅相成，又可作为成人学习的主要读物独立使用。

这套教材的主编，多是本学科领域的学术带头人和教学名师，且具有丰富的远程教育经验。在编写过程中，编者们力求做到知识结构严谨、层次清晰、重点突出、难点分散、文字通俗、分量适中，以体现教材的指导和辅导作用，引导学生在学习的过程中做到学、思、习、行统一，充分发挥教材的置疑、解惑和

激励功能。在大家的共同努力下,这套系列教材较好地体现了我们的初衷:一是教育理念的先进性,遵循现代教育理念,使其符合学习规律和教改精神,体现以人为本、以学为本;二是内容的先进性,体现在科学性与教学性结合,理论性与实践性结合,前沿性与实用性结合,创新性与继承性结合;三是形式的先进性,体现在版式和结构的设计新颖、活泼。

我们期待着本丛书能够得到同行专家及使用者的批评和帮助。

编审委员会

2009 年 5 月

Preface 前　言

概率论与数理统计是研究随机现象，并揭示其统计规律性的学科，是目前很多高校的专业必修课程。本书是应中国石油大学（北京）远程教育学院的要求特别编写的，其难度和内容适应远程教育的学生。本书重点介绍了概率论与数理统计中的基本概念、基本原理和基本方法；强调直观性，注重可读性，突出基本思想与方法。本书内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验。

本书的编写得到了中国石油大学（北京）远程教育学院、理学院及各位数学系同行的关怀与大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2014 年 12 月

Contents 目　录

绪论

一、课程性质

《概率论与数理统计》是研究随机现象统计规律的一门数学学科，也是一门应用性很强又颇具特色的学科。它在包括控制、通信、生物、物理、力学、金融、社会科学以及科学研究、经济管理、企业管理、经济预测等众多领域都有广泛的应用；它与其他数学分支（如微积分、高等代数、测度论等）有着紧密的联系，是近代数学的重要组成部分；它的方法和理论向各个基础学科、工程学科渗透，是近代科学技术发展的特征之一；它与基础学科相结合产生出了许多边缘学科，如生物统计、统计物理、数学地质等；它是许多新兴的重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论、人工智能、信息编码理论和数据挖掘等。

《概率论与数理统计》是工科大学的一门应用性很强的必修基础课。学习和掌握概率论与数理统计的基本理论和基本方法并将其灵活应用于科学研究和工程实际中，是社会发展对高素质人才培养提出的必然要求。

二、概率论与数理统计的起源

概率论的萌芽源于17世纪保险业的发展，但是真正引发数学家们思考的却是源于赌博者的请求。

17世纪中叶，法国贵族德·美黑在骰子赌博中，有事急于抽身，须中途停止赌博，需要根据对胜负的预测把赌资进行合理的分配，但不知用什么样的比例分配才算合理，于是就写信向当时法国的最高数学家帕斯卡请教。正是这封信使概率论在历史的舞台上迈出了第一步。

帕斯卡和当时第一流的数学家费尔玛一起，研究了德·美黑提出的关于骰子赌博的问题。于是，一个新的数学分支——概率论登上了历史舞台。三年后，也就是1657年，荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯企图自己解决这一问题，结果写成了《论赌博中的计算》一书，这就是最早的概率论著作。

为概率论确定严密的理论基础的是数学家柯尔莫哥洛夫。1933年，他发表了著名的《概率论基础》，用公理化结构明确定义了概率论发展史上的一个里程碑，为以后的概率论的迅速发展奠定了基础。

三、概率论与数理统计的发展

数理统计的发展大致可分为古典时期、近代时期和现代时期三个阶段。

古典时期(19 世纪以前)——这是描述性的统计学形成和发展的阶段,是数理统计的萌芽时期。在这一时期里,瑞士数学家伯努利(1654—1705 年)较早地系统论证了大数定律。1763 年,英国数学家贝叶斯提出了一种归纳推理的理论,后被发展为一种统计推断方法——贝叶斯方法,开创了数理统计的先河。法国数学家棣莫佛(1667—1754 年)于 1733 年首次发现了正态分布的密度函数,并计算出该曲线在各种不同区间内的概率,为整个大样本理论奠定了基础。1809 年,德国数学家高斯(1777—1855 年)和法国数学家勒让德(1752—1833 年)各自独立地发现了最小二乘法,并应用于观测数据的误差分析。在数理统计的理论与应用方面都做出了重要贡献,高斯不仅将数理统计应用到生物学,而且还应用到教育学和心理学的研究,并且详细地论证了数理统计应用的广泛性,他曾预言:“统计方法,可应用于各种学科的各个部门。”

近代时期(19 世纪末至 1945 年)——数理统计的主要分支建立,是数理统计的形成时期。19 世纪初,由于概率论的发展从理论上接近完备,加之工农业生产的迫切需要推动着这门学科的蓬勃发展。1889 年,英国数学家皮尔逊(1857—1936 年)提出了矩估计法,次年又提出了频率曲线的理论,并于 1900 年在德国数学家赫尔梅特发现 χ^2 分布的基础上提出了 χ^2 检验,这是数理统计发展史上出现的第一个小样本分布。1908 年,英国的统计学家戈塞特(1876—1937 年)创立了小样本检验,代替了大样本检验的理论和方法(即 t 分布和 t 检验法),这为数理统计的另一分支——多元分析奠定了理论基础。1912 年,英国统计学家费歇(1890—1962 年)推广了 t 检验法,同时发展了显著性检验及估计和方差分析等数理统计新分支。这样,数理统计的一些重要分支如假设检验、回归分析、方差分析、正交设计等有了决定其面貌的内容和理论。数理统计成为应用广泛、方法独特的一门数学学科。

现代时期(1945 年以后)——美籍罗马尼亚数理统计学家瓦尔德(1902—1950 年)致力于用数学方法使统计学精确化、严密化,取得了很多重要成果。他发展了决策理论,提出了一般的判别问题,创立了序贯分析理论,提出著名的序贯概率比检法。瓦尔德的两本著作《序贯分析》和《统计决策函数论》,被认为是数理发展史上的经典之作。20 世纪八九十年代,计算机的应用推动了数理统计在理论研究和应用方面不断地向纵深发展,并产生了一些新的分支和边缘性的新学科,如最优设计和非参数统计推断等。当前,数理统计的应用范围愈来愈广泛,已渗透到许多科学领域,被应用到国民经济各个部门,成为科学研究不可缺少的工具。

第一章　概率论的基本概念

【预期目标】

通过本课程的学习，使学生掌握处理随机现象的基本理论和方法，并且具备一定的分析问题和解决实际问题的能力。

掌握随机事件的基本概念、事件之间的关系，以及概率的运算和性质、等可能概型、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式和随机事件的独立性。

【知识结构框图】

- 概率论的基本概念
  - 随机试验
  - 样本空间、随机事件
    - 样本空间（Space）
    - 随机事件
    - 事件间的关系与事件运算
    - 事件的换算规律
  - 频率与概率
    - 频率的定义和性质
    - 频率的稳定性
    - 概率的定义
    - 概率的性质与推广
    - 排列组合公式
  - 等可能概型（古典概型）
  - 条件概率
    - 条件概率
    - 乘法定理
    - 全概率公式和贝叶斯公式
  - 独立性
    - 独立性的定义
    - 独立事件的性质
    - 多个事件的独立性

【学习提示】

前期课程：高等数学，排列组合等。

后期铺垫：数学建模，随机过程，时间序列分析等。

在日常生活中，我们经常会接触到一些现象：在一定条件下必然发生的现象，我们称之为**确定性现象**；而在某些实验中其结果呈现出不确定性，在大量重复实验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称之为**随机现象**。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科，是一个重要的数学分支。概率论与数理统计在经济、科技、教育、管理和军事等方面已得到广泛应用，例如回收卫星等。概率论与数理统计已成为高等工科院校的一门重要的公共基础课。

§1.1 随机试验

这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察。下面我们举一些典型的例子。

E_1：抛一枚硬币两次，观察正面 H(Heads)、反面 T(Tails)出现的情况。

E_2：抛一颗骰子，观察出现的点数。

E_3：观察某一时间段通过某一路口的车辆数。

E_4：观察某一电子元件(如灯泡)的寿命。

E_5：观察某城市居民(以户为单位)烟、酒的年支出。

这些试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

我们把满足上述三个条件的试验称为**随机试验**，记为 E。除特别注明外，书中提到的试验都是指随机试验。这是我们研究随机现象的重要手段。

§1.2 样本空间、随机事件

一、样本空间(Space)

定义 1 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**(也叫基本事件)。

上节提到的随机试验的样本空间为：

E_1：$S_1=\{HH,HT,TH,TT\}$。

E_2:$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$。

E_3:$S_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$。

E_4:如果试验是测试某灯泡的寿命,则样本点是一非负数,由于不能确知寿命的上界,所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果,故样本空间 $S_4=\{t \mid t \geqslant 0\}$。

E_5:调查某城市居民(以户为单位)烟、酒的年支出,结果可以用(x,y)表示,x,y 分别是烟、酒年支出的元数。这时,样本空间由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成。也可以按某种标准把支出分为高、中、低三档。这时,样本点有(高,高),(高,中),……,(低,低)等 9 种,样本空间就由这 9 个样本点构成。

二、随机事件

在日常实际生活中,人们常常关心的满足某种条件的那些随机试验的样本点所组成的集合。一般地,我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**,记作 A,B,C 等;由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**;样本空间 S 本身,称为**必然事件**;特别地,空集$\varnothing$称为**不可能事件**。

下面举一个例子帮助大家理解。

例 1-1 抛一颗骰子,观察出现的点数。

$$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$$

事件 $A=\{2,4,6\}$ 表示"出现偶数点";

事件 $B=\{1,2,3,4\}$ 表示"出现的点数不超过 4";

显然它们都是样本空间 $S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集。

我们称一个随机事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点在试验中出现。

两个特殊的事件:① 必然事件,即在试验中必定发生的事件,即样本空间,常用 S 或 Ω 表示;② 不可能事件,即在一次试验中不可能发生的事件,常用$\varnothing$表示。

例如,在掷骰子试验中,"掷出点数小于 7"是必然事件;而"掷出点数 8"则是不可能事件。

比较如下事件:

$$C=\{2,4,6\},\quad D=\{1,2,3\},\quad A_1=\{1\},\quad A_2=\{2\},\quad A_3=\{3\}$$

何时发生?有何区别?

三、事件间的关系与事件运算

(1) **包含**关系(图 1-1) $A \subset B$,即如果 A 发生必导致 B 发生,例如:$A=\{1\}$,$B=\{1,2,3\}$。

(2) **相等**关系 $A=B \Leftrightarrow A \subset B$,且 $B \subset A$。

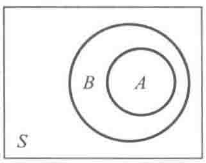
(3) **和(或并)**事件(图 1-2) $A \cup B$,若 $B=\{2,4\}$,$A=\{1,2,3\}$,则 $B \cup A=\{1,2,3,4\}$,即当且仅当事件 A,B 至少发生一个时,事件 $A \cup B$ 发生。

(4) **积(或交)事件**(图 1-3)　$A\cap B=AB$,若 $A=\{2,4\}$,$B=\{1,2,3\}$,则 $A\cap B=AB=\{2\}$,即当且仅当事件 A,B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 发生。

(5) **差事件**(图 1-4)　$A-B=A-AB=A\overline{B}$,即事件 A 发生同时事件 B 不发生时,事件 $A-B$ 发生。

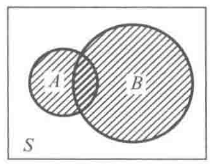
(6) **互不相容(互斥)**事件(图 1-5)　$A\cap B=\varnothing$。

(7) **对立事件(逆事件)**　$A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=S$,事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$。



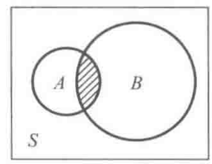
$A\subset B$

图 1-1



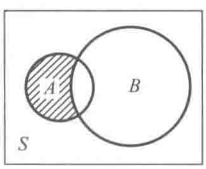
$A\cup B$

图 1-2



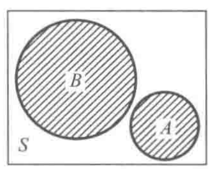
$A\cap B$

图 1-3



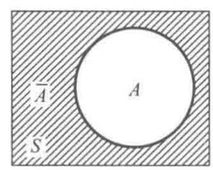
$A-B$

图 1-4



$A\cap B=\varnothing$

图 1-5



$A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing$

图 1-6

提示:

① 互斥与互逆的区别。

两事件 A,B 互斥:$AB=\varnothing$,即 A 与 B 不同时发生。

两事件 A,B 互逆或互为对立事件,除要求 A,B 互斥($AB=\varnothing$)外,还要求 $A\cup B=S$。

② n 个事件互斥与两两互斥。

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互斥,则称这 n 个事件互斥。所以,若 n 个事件互斥,则其中任意两个事件都互斥。

四、事件的运算规律

在进行事件运算时,经常要用到以下定律。设定 A,B,C 为事件,则有

(1) **幂等律**　$A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(2) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(3) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) **分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(5) **DeMorgan(德摩根)定律:**

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}=\bigcap_{\alpha}\overline{A_{\alpha}},\quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}}=\bigcup_{\alpha}\overline{A_{\alpha}}$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cap B\cap C}=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$$

对于一个具体事件，要学会用数学符号表示；反之，对于用数学符号表示的事件，要清楚其具体含义是什么。也就是说，要正确无误地“互译”出来。

例 1-2 从一批产品中任取两件，观察合格品的情况。记 $A=\{$两件产品都是合格品$\}$；记 $B_i=\{$取出的第 i 件是合格品$\}$，$i=1,2$；$\overline{A}=\{$两件产品中至少有一件是不合格品$\}$。那如何用 B_i 表示 $\overline{A}$ 和 A？

解
$$A=B_1B_2$$
$$\overline{A}=\overline{B_1B_2}=\overline{B}_1\cup\overline{B}_2=\overline{B}_1\overline{B}_2\cup B_1\overline{B}_2\cup\overline{B}_1B_2$$

例 1-3 如图(1)、(2)两个系统中令 A_i 表示“第 i 个元件工作正常”，B_i 表示“第 i 个系统工作正常”。

试用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示 B_1,B_2。

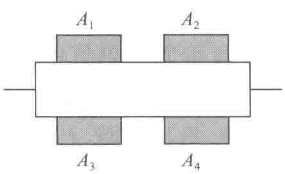


图 1-7 (1)系统

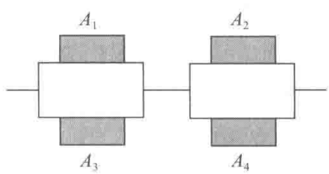


图 1-8 (2)系统

解 (1) $B_1=A_1A_2\cup A_3A_4$；

(2) $B_2=(A_1\cup A_3)(A_2\cup A_4)$。

例 1-4 在 S_4 中(测试灯泡寿命的试验)，若有：

事件 $A=\{t\mid t<1\,000\}$ 表示“产品是次品”

事件 $B=\{t\mid t\geqslant 1\,000\}$ 表示“产品是合格品”

事件 $C=\{t\mid t\geqslant 1\,500\}$ 表示“产品是一级品”

则有：

A 与 B 是互为对立事件，

A 与 C 是互不相容事件，

$B-C$ 表示产品是合格品但不是一级品，

BC 表示产品是一级品，

$B\cup C$ 表示产品是合格品。

例 1-5 设 A,B,C 为三个随机事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件。

(1) A 发生。

$$A=ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup A\overline{B}\,\overline{C}$$

(2) A 发生，B 与 C 都不发生。

$$A\overline{B}\,\overline{C}$$

(3) A,B,C 都发生。

$$ABC$$

(4) A,B,C 至少有一个发生。

$$A\cup B\cup C$$

(5) A,B,C 都不发生。

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

(6) A,B,C 不多于一个发生。

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$$

(7) A,B,C 不多于两个发生。

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$$

(8) A,B,C 至少有两个发生。

$$AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=AB\cup AC\cup BC$$

§1.3 频率与概率

一、频率的定义和性质

定义 2 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**。比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$。

由上述定义可知频率具有下述性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)。$$

二、频率的稳定性

在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且，试验次数越多，一般来说摆动越小。这个性质叫作频率的稳定性。请看下面表 1-1 的试验。

表 1-1 频率稳定性实验

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1.
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5