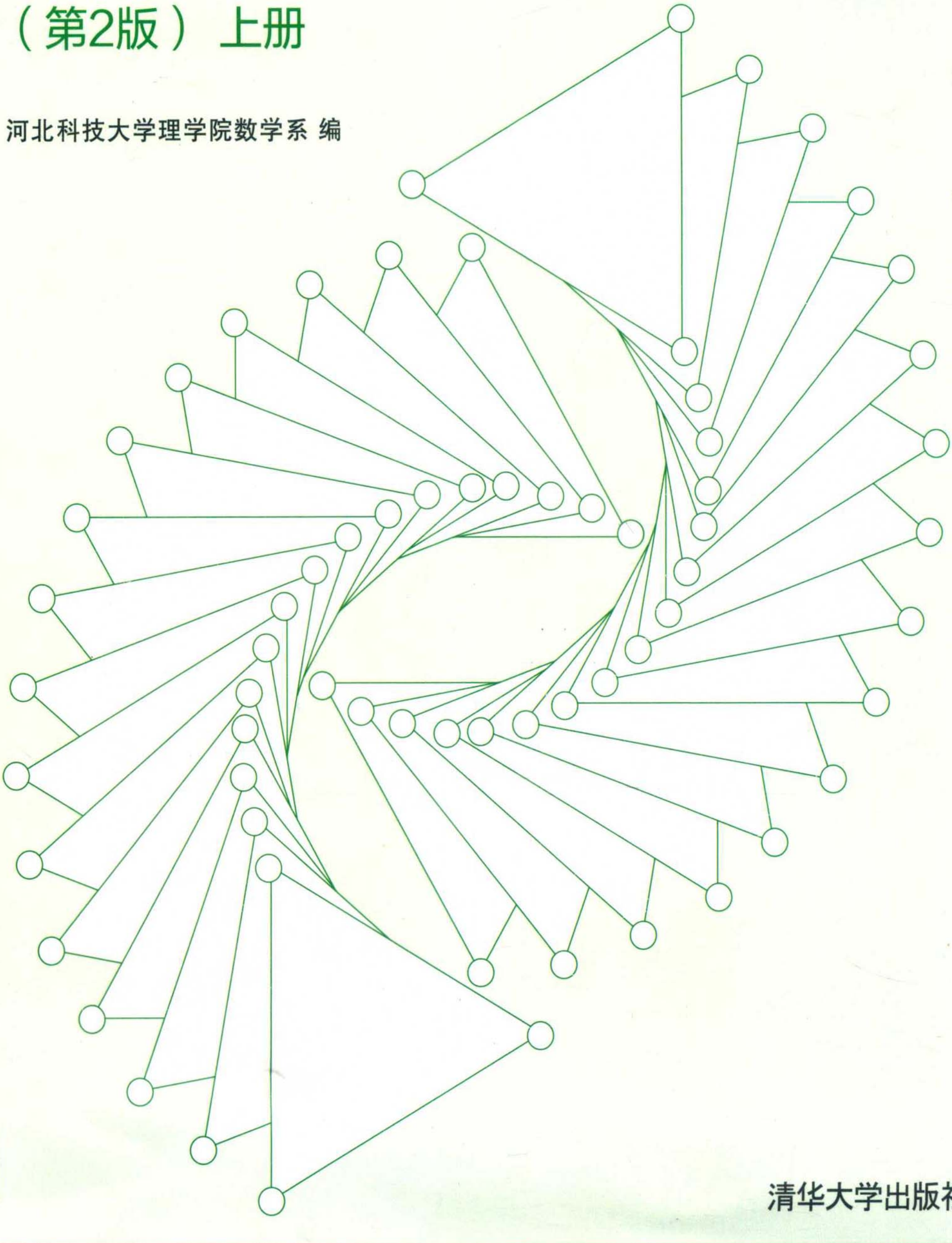
高等数学

同步学习指导

（第2版）上册

· 基本要求
· 答疑解惑
· 题型分析
· 习题全解
· 分类测试
· 模拟试卷

河北科技大学理学院数学系 编



清华大学出版社

高等数学

同步学习指导

（第2版）上册

河北科技大学理学院数学系 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（第二版）上册》（高等教育出版社，2017）配套使用，依照原教材的章、节顺序编排．每章分为基本要求、答疑解惑、基本题型分析、习题全解四个部分，章末包含总复习和自测题，书末附有三套期末考试模拟试卷．

本书适用于应用型本科高等院校，也可供独立学院、成教学院理工科各专业学生参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习指导．上册/河北科技大学理学院数学系编.—2版.—北京：清华大学出版社，2017

ISBN 978-7-302-48986-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①河…　Ⅲ.①高等数学–高等学校–教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第294376号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　　印　张：12.25　　字　数：295千字
版　次：2013年8月第1版　2017年12月第2版　　印　次：2017年12月第1次印刷
印　数：1～2500
定　价：28.00元

产品编号：076481-01

第二版前言

本书是与河北科技大学数学系编写的《高等数学（第二版）》（上、下册）（高等教育出版社，2017）相配套的学习指导教材. 本书第一版使用至今已经四年，此次在第一版的基础上进行了修订和完善.

本书第二版分为上、下两册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学和级数。为了学生使用方便，本书按照主教材的章节顺序编写，与教学进度保持同步.

第二版对第一版的内容进行了较大的调整和补充。本次升级改版的**基本题型分析**部分，是根据本书相配套的教材内容，对基本题型进行了分类，通过分析给出了详细的解答过程，以期学生能尽快理清解题思路，帮助学生总结提炼数学方法。每章末总复习部分的自测题，分为基础型和提高型，并附有详细的解题过程，学生可根据自己的学习进度进行自测，检验学生综合运用知识的能力.

参加第二版修订工作的有刘秀君（基本要求和答疑解惑）、李秀敏（基本题型分析和习题全解），刘秀君和李秀敏编写了第 1～11 章的总复习. 期末考试试卷和数学竞赛试卷由刘秀君提供. 全书由刘秀君和李秀敏审校、定稿.

由于编者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编 者

2017 年 6 月

第一版前言

本书是与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（上、下册）》（高等教育出版社，2012）相配套的学习指导教材，按照教育部颁发的本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》编写而成，遵循了主教材“以应用为目的，以够用为尺度”的原则，目的是帮助学生解决在学习高等数学课程时遇到的内容多、速度快、题量大、概念抽象、方法庞杂、学习效率低等问题.

全书分为上、下两册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学和级数. 为了学生使用方便，本书按照主教材的章节顺序编写，与教学进度保持同步.

每章内容结构安排如下：

基本要求 包括知识要点及需要掌握的程度.

答疑解惑 针对学生容易产生的疑惑给出详细解答，以澄清概念，理清思路.

基本题型分析 选择一些典型例题，通过分析给出详细解答过程. 通常在每组例题之后以“注”的形式概括了有关的知识点，帮助学生总结提炼数学方法.

习题全解 对主教材中每节的所有习题给出了详细解答，为学生检验学习效果提供参考.

总复习 每章后设有总复习，包括本章重点及难点解析和方法总结. 同时提供综合练习题，检验学生综合运用知识的能力.

每册书末附有三套期末考试模拟试卷及参考答案，便于学生检测整体学习效果. 上册书末附有常用公式和曲线；下册书末附有常用空间曲面，还附有三套河北科技大学数学竞赛试卷及参考答案，供有兴趣的同学参考.

参加本书编写工作的有纪玉德（第 1 章），王菊芳（第 2 章），李海萍（第 3 章），禹长龙（第 4 章），张金星（第 5 章），王琦（第 6 章），孙宗剑（第 7 章），董丽霞（第 8 章），左春艳（第 9 章），李占稳（第 10 章），杨英（第 11 章）. 刘秀君和李秀敏编写了第 1～11 章的总复习. 期末考试试卷和数学竞赛试卷由刘秀君提供. 上册由刘秀君审校、定稿，下册由李秀敏审校、定稿.

由于编者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 5 月

目　　录

第1章 函数 极限 连续

1.1 函数

1.1.1 基本要求

1. 掌握一元函数的概念.
2. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.
3. 掌握初等函数的概念.
4. 了解函数的四个特性.
5. 会建立简单实际问题的函数关系.

1.1.2 答疑解惑

1. $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 是同一函数吗？

答 不是同一函数，因为它们的定义域不同. $y=2\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $y=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

注意：所谓两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则.

2. 两个单调增加(或减少)的函数之积一定是单调增加(或减少)的吗？

答 不一定. 如 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}, g(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ 皆为单调增加的函数，而 $f(x)\cdot g(x)=-\mathrm{e}^{x}$ 却是单调减少的函数.

3. 周期函数是否一定有最小正周期？

答 不一定. 例如函数 $f(x)=C$（C 为常数)，因为对于任意的实数 T，都有 $f(x+T)=f(x)=C$，所以它是周期函数，但实数中没有最小正数，因此周期函数 $f(x)=C$ 没有最小正周期. 再如狄利克雷(Dirichlet)函数是周期函数，但没有最小正周期.

4. 复合函数 $y=f[g(x)]$ 与函数 $u=g(x)$ 的定义域是否相同？

答 一般来说不相同，因为 $y=f[g(x)]$ 要求 $u=g(x)$ 的值域落在 $y=f(u)$ 的定义域内，而 $u=g(x)$ 的值域可能超出 $y=f(u)$ 的定义域. 所以复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域通常是函数 $u=g(x)$ 定义域的真子集.

例如 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=x^2$ 的定义域分别是 $[-1,1]$ 与 $(-\infty,+\infty)$，复合函数

$$y=f[g(x)]=\arcsin x^2$$

的定义域应满足 $-1\leqslant x^2\leqslant 1$，即 $|x|\leqslant 1$，亦即 $[-1,1]$ 是 $u=x^2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的真子集.

5. 初等函数与非初等函数有什么区别？

答 初等函数是由常数与基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并且能用一个式子表示的函数，否则就是非初等函数. 例如

$$y=\sqrt{x^2-4}，\quad y=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ 及 } y=\ln x+\frac{\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^2}$$

等都是初等函数．$y=x^x\ (x>0)$也是初等函数，因为它是由 $y=e^u$ 与 $u=x\ln x$ 复合而成的．$y=|x|\left(=\sqrt{x^2}\right)$同样是初等函数，因为它是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的．而狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是非初等函数．

1.1.3　基本题型分析

题型一　求函数的定义域

例 1　求函数 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ 的定义域．

分析　求初等函数的定义域时，一般要利用基本初等函数和复合函数的定义域来确定，如分母不能为零，对数的真数大于零，反三角函数的取值范围，被开方数的符号与开方数有关等．

解　要使函数有意义，须满足$\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|,\\ x\neq -1,\end{cases}$ 解得$-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$，所以函数的定义域为$\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$．

题型二　判断函数的相同性

例 2　在下列各组函数中，找出两个函数相同的一组：

（1）$y=x^0$ 与 $y=1$；　（2）$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　（3）$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$．

分析　当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数或称两个函数相同，否则表示两个不同的函数．

解　（1）由于 $y=x^0$ 的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，$y=1$ 的定义域为全体实数，所以该组的两个函数不相同．

（2）由于 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$，$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为全体实数，所以该组的两个函数不相同．

（3）由于两个函数的定义域均为$\{x|x\neq 0\}$，且对应法则相同，所以该组的两个函数相同．

题型三　有关函数的性质

例 3　函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在其定义域内（　）．

（A）有上界且无下界　　（B）有下界且无上界

（C）有界且$|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$　　（D）有界且$|f(x)|\leqslant 2$

解　选（C）．因为$1+x^2\geqslant 2|x|$，所以$|f(x)|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$．

例 4 判断下列各函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$；（2）$f(x)=x^4\sin x-x\cos x^2+1$.

分析 先检验函数的定义域是否对称，然后按定义判断函数的奇偶性.

解 （1）函数在$(-\infty,+\infty)$内有定义，因为$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$是奇函数.

（2）函数在$(-\infty,+\infty)$上有定义，因为$f(-x)=-x^4\sin x+x\cos x^2+1$，而$f(-x)=f(x)$和$f(-x)=-f(x)$都不能对所有的$x\in(-\infty,+\infty)$成立，所以$f(x)$为非奇非偶的函数.

题型四 复合函数的求法

例 5 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

分析 将函数$y=f(u)$中的变量u看作一个整体$u=\varphi(x)$，代入$y=f(u)$即得$y=f[\varphi(x)]$.

解 将$f(x)$中的x用$f(x)$代替得$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}\quad(x\neq 0)$，同理得$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\dfrac{1}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{x}\quad(x\neq 0)$.

1.1.4 习题全解

1. 求下列各函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\ln\sin x$；

（3）$y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；（4）$y=f(x-1)+f(x+1)$,已知$f(u)$的定义域为$(0,3)$.

解 （1）因为$1-x^2\neq 0$且$x+2\geqslant 0$，所以$x\neq\pm 1$且$x\geqslant -2$，即函数$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）因为$16-x^2>0$且$\sin x>0$，所以$-4<x<4$且$2k\pi<x<(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$，即函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\ln\sin x$的定义域为$(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

（3）因为$5-x>0$且$-1\leqslant\dfrac{x-1}{6}\leqslant 1$，所以$x<5$且$-5\leqslant x\leqslant 7$，即函数$y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$的定义域为$[-5,5)$.

（4）因为$0<x-1<3$且$0<x+1<3$，所以$1<x<4$且$-1<x<2$，即函数$y=f(x-1)+f(x+1)$的定义域为$(1,2)$.

2. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x+1)$的表达式.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令 $u=x+\dfrac{1}{x}$，于是 $f(u)=u^2-2$，所以 $f(x+1)=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$.

3. 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 因为 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

4. 下列各对函数是否是同一个函数？

（1）$y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；（2）$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；

（3）$y=\dfrac{1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$；（4）$y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$.

解 （1）$y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ 的对应法则不同，故不是同一个函数.

（2）$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$ 的定义域相同且对应法则也相同，故是同一个函数.

（3）$y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq 1$，而 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 的定义域为 $x\neq\pm 1$，故不是同一个函数.

（4）$y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，而 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，故不是同一个函数.

5. 指出下列各函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2\cos x$；（2）$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；（4）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 （1）因为 $f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；

（2）因为 $f(-x)=\dfrac{1-\cos(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；

（3）因为 $f(-x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)})=-\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数；

（4）因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

6. 用基本初等函数及四则运算表示下列各函数的复合关系：

（1）$y=\sin\sqrt{1+x^2}$；（2）$y=\arctan[1+\ln(1+x^2)]$；

（3）$y=e^{\sin^3 x}$；（4）$y=x^{\sin x}\ (x>0)$.

解 （1）$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$；

（2）$y=\arctan u$，$u=1+v$，$v=\ln w$，$w=1+x^2$；

（3）$y=e^u$，$u=v^3$，$v=\sin x$；

（4） $y = e^{\sin x \ln x}$， $y = e^u$， $u = \sin x \ln x$.

7. 设 $f(x) = x^3 - x$， $\varphi(x) = \sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \sin^3 2x - \sin 2x$， $\varphi[f(x)] = \sin 2\left(x^3 - x\right)$.

8. 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, |x| \leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad |x| > \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), f(0)$ 和 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，并作出 $f(x)$ 的图形.

解 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $f(0) = |\sin 0| = 0$， $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$. 图形如图 1-1 所示.

9. 某市的出租车按下列办法收费：路程在 3km 内(包括 3km)一律收费 10 元；路程在 3km 到 10km(包括 10km)之间的，超过 3km 的部分每公里加收 2 元；路程超过 10km 的，超过 10km 的部分每公里加收 3 元. 设 x 为乘车路程，y 为出租车费，试建立 y 与 x 之间的函数关系 $y = f(x)$，并画出函数的图形.

解 当 $0 < x \leqslant 3$ 时， $y = 10$；当 $3 < x \leqslant 10$ 时， $y = 10 + 2(x-3) = 2x + 4$；当 $10 < x$ 时，$y = 10 + 2(10-3) + 3(x-10) = 3x - 6$. 因此 $y = f(x) = \begin{cases} 10, & 0 < x \leqslant 3, \\ 2x+4, & 3 < x \leqslant 10, \\ 3x-6, & 10 < x. \end{cases}$ 图形如图 1-2 所示.

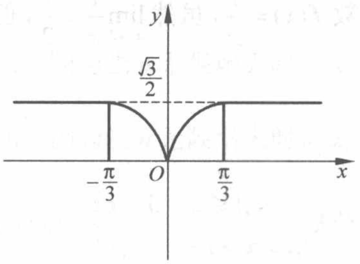


图 1-1

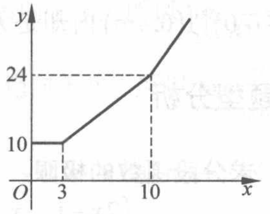


图 1-2

1.2 极限的概念

1.2.1 基本要求

1. 理解数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的概念.

2. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的概念,了解其几何意义.

3. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的概念,了解左右极限与极限之间的关系，了解它们的几何意义.

4. 了解极限的性质和数列极限与函数极限之间的关系.

5. 会求曲线的水平渐近线.

1.2.2 答疑解惑

1. 若 n 越大，$|x_n - a|$ 越小，则数列 $\{x_n\}$ 必然以 a 为极限吗？

答　不是．随着n越大，$|x_n-a|$越来越小，并不意味着$|x_n-a|$一定趋向于零．

例如$x_n=\frac{1}{n}$，$a=-1$，$|x_n-a|=\left|\frac{1}{n}+1\right|=1+\frac{1}{n}$．虽然$n$越大，$1+\frac{1}{n}$越小，但数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$并不以$-1$为极限．

2. 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$是否同敛散？

答　若$\{x_n\}$收敛，则$\{|x_n|\}$一定收敛；反之，若$\{|x_n|\}$收敛，则$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散．例如，$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但$\{(-1)^n\}$却发散．如果$\{x_n\}$恒正或恒负，则$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$同敛散．此外如果$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．

3. 若$f(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，问：能否保证有$A>0$的结论？试举例说明．

答　不能保证．例如$f(x)=\frac{1}{x}$，对任意的$x>0$，都有$f(x)=\frac{1}{x}>0$，但是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=A=0\,.$$

4.　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（$A$为常数)，则$f(x)$一定是有界函数吗？

答　不一定. 有极限的函数总是局部有界的，即$f(x)$仅在点$x=x_0$的某个去心邻域内有界，并不能保证函数在其定义域内有界，例如函数$f(x)=\frac{1}{x}$，虽然$\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，但函数$f(x)=\frac{1}{x}$在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内却是无界的.

1.2.3　基本题型分析

题型一　　求分段函数的极限

例1　设函数$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant1,\\ x+4, & x<1,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$，问$\lim\limits_{x\to1}f(x)$是否存在.

解　因为$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(x+4)=5$，$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(2x-1)=1$，这说明左右极限都存在，但不相等，所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

注　考察分段函数在分段点处的极限时，须求函数的左右极限，只有当左右极限都存在且相等时极限才存在，否则极限不存在.

题型二　求曲线的水平渐近线

例2　曲线$f(x)=\frac{1+x^3}{2x^3}$的水平渐近线为（　　）.

（A）$y=0$　　（B）$y=-\frac{1}{2}$　　（C）$y=\frac{1}{2}$　　（D）$y=1$

解　选（C）. 因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$，所以曲线$f(x)=\frac{1+x^3}{2x^3}$的水平渐近线为$y=\frac{1}{2}$.

题型三　求待定常数

例3　若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求$a,b$的值.

解 通分得 $\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b=\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=(1-a)\dfrac{x^2}{x+1}-(a+b)\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{b}{x+1}$，欲使上式在 $x\to\infty$ 时趋向于零，必须且只须 $a=1,b=-1$.

1.2.4 习题全解

1. 填空题：

（1）数列 $\{x_n\}$ 有界是它收敛的__________条件;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$________;

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{4^n}=$________;

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{n}}=$________.

解 （1）应填必要但不充分.

（2）应填 1．因为当 n 无限增大时，$\dfrac{1}{n^2}$ 无限趋向于 0，所以 $x_n=1-\dfrac{1}{n^2}$ 无限趋向于 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=1$.

（3）应填 0．因为当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{3^n}{4^n}$ 无限趋向于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{4^n}=0$.

（4）应填 0．因为当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ 无限趋向于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{n}}=0$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ x, & -1<x<1,\end{cases}$ 试分别讨论当 $x\to 0, x\to 1$ 和 $x\to 2$ 时，$f(x)$ 的极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$；因为 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$，左、右极限都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在；$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$ 问 a,b 分别取何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(ax+b)=b$，要使 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，需 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$，即 $b=1$，所以 a 可为任意数，$b=1$.

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 基本要求

1. 了解无穷小和无穷大的概念及其之间的关系.
2. 了解无穷小的性质.
3. 会求曲线的铅直渐近线.