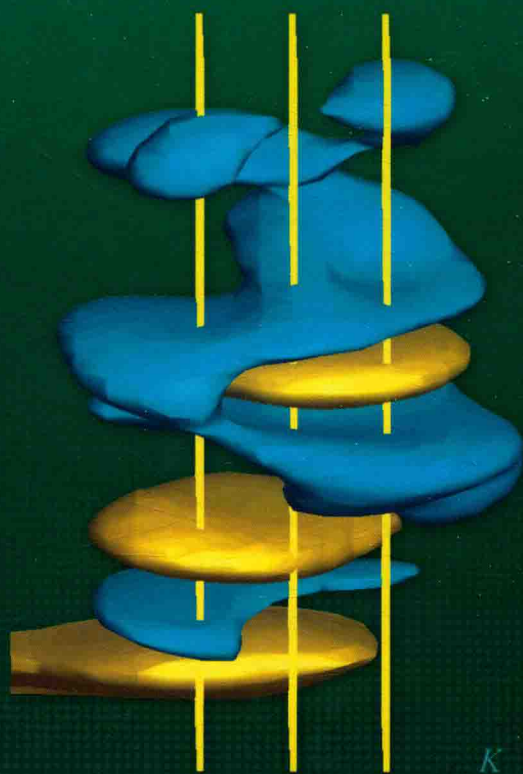


地下水循环与环境演化教育部重点实验室  
水资源与环境工程北京市重点实验室 资助  
天津师范大学天津市“千人计划”项目

# 高等地下水水力学

【美】叶天齐 等 编著



K

地质出版社

地下水循环与环境演化教育部重点实验室  
水资源与环境工程北京市重点实验室 资助  
天津师范大学天津市“千人计划”项目

# 高等地下水水力学

【美】叶天齐 等编著

地 质 出 版 社

## 内 容 提 要

本书将多孔介质中水流运动的经典原理与随机分析最新成果进行了综合,为读者提供地下水文学研究的新视角。本书不仅介绍了相关理论,而且强调其基本假设、局限性以及盲目应用出现的问题。

本书包含了地下流体运动、水力学、水文地质等方面的知识,可作为地球科学领域的教学用书。对地质学、土壤学、环境科学与工程、石油与采矿工程、土木工程等领域的研究人员具有重要的参考价值。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等地下水水力学 / (美) 叶天齐等编著; 万力等  
译. —北京: 地质出版社, 2017. 11

书名原文: Flow Through Heterogeneous Geologic  
Media

ISBN 978 - 7 - 116 - 10655 - 0

I. ①高… II. ①叶… ②万… III. ①地下水—水力  
学 IV. ①P641. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 274075 号

Gaodeng Dixiashui Shuilixue

---

责任编辑: 李惠娣

责任校对: 韦海军

出版发行: 地质出版社

社址邮编: 北京海淀区学院路 31 号, 100083

咨询电话: (010)66554646 (邮购部); (010)66554579 (编辑室)

网 址: <http://www.gph.com.cn>

传 真: (010)66554582

印 刷: 北京印匠彩色印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm  $\frac{1}{16}$

印 张: 16.75

字 数: 418 千字

版 次: 2017 年 11 月北京第 1 版

印 次: 2017 年 11 月北京第 1 次印刷

定 价: 120.00 元

书 号: ISBN 978 - 7 - 116 - 10655 - 0

---

(如对本书有建议或意见, 敬请致电本社; 如本书有印装问题, 本社负责调换)

本书主要依据 2015 年 Cambridge University Press 出版的 *Flow Through Heterogeneous Geologic Media* (Tian-Chyi “Jim” Yeh, Raziuddin Khaleel, Kenneth C. Carroll) 翻译并修订。本书编译、修订得到以下水文地质学者们的大力帮助,在此书出版之际,特致以诚挚的谢意!

## 本书编译、修订的贡献者

万 力	中国地质大学(北京)	王文科	长安大学
郝永红	天津师范大学	温志超	台湾云林科技大学
张幼宽	南方科技大学	吴吉春	南京大学
梁修雨	南京大学	徐国锦	台湾成功大学
李振浩	台湾成功大学	靳孟贵	中国地质大学(武汉)
王广才	中国地质大学(北京)	杨金忠	武汉大学
卢文喜	吉林大学	张良正	台湾交通大学
王恩志	清华大学	梁 越	重庆交通大学
齐跃明	中国矿业大学(徐州)	朱 磊	宁夏大学
李木子	中国地质环境监测院	葛 建	河海大学
张在勇	长安大学	李颀家	天津大学
高 旭	中国地质大学(武汉)		



# 前言与致谢

本书并不是一部解决地下水流问题、面面俱到的“百科全书”，而是从随机分析的角度重新阐述地质介质中地下水流运动的传统理论。本书的特点是明确了传统理论在解决实际问题中的局限性，给出了针对性的解决办法，对地下水文学中的很多重要概念给出了另一种解释。作者期望读者通过阅读本书，从多孔介质地下水流的传统理论与地质介质随机分析的结合中，探寻到地下水文学发展的新思路。

纵观地下水文学的发展，存在许多有待进一步研究的问题：水文观测、原理及相关过程的尺度问题；水文地质的不确定性问题；随机地下水原理及其在解决实际问题方面的应用等。本书将解答的问题是：不同的定理和概念在不同尺度下能够告诉我们什么？为什么我们要关注随机理论？为什么我们要用随机地下水文学分析方法去解决实际问题？

本书第1章讨论了流体力学的基本概念，建立了比分子尺度大、比多孔介质的孔隙尺度小的控制单元（control volume, CV）概念。第2、3章讨论了在可变饱和状态下的达西定律，运用流体力学基本概念建立了实验室尺度的多孔介质渗流水力参数（hydraulic properties）。引入了空间典型单元体（spatial representative elementary volume）和集总体典型单元体（ensemble representative elementary volume）的新概念，明确强调了水文观测、水力参数计算和达西定律研究等方面尺度连续性问题的重要性。

第4章提出了随机过程和随机场（stochastic process and random field）的概念，将实验室尺度下水力参数的多尺度空间变异性在现场条件下加以量化和分析。这些概念根据流场的空间统计分布规律（即最大概率值 most likely value、其标准偏差和空间分布——分层尺度和层化），利用量化方法描述场地尺度下水力参数的空间变异。第5章讨论了可以满足不同尺度研究需要的概念模型，如：等效均质地质模型和高度参数化非均质概念模型等，并给出了基于非均质概念模型的地下水流控制方程。第6章阐述了传统的效率参数（例如，渗透系数的各向异性及张量）和等效均质概念模型的数学模型；分析和讨论了控制单元、典型单元体（representative elementary volume, REV）和观察尺度不同的概念模型及其预测结果。

第7、8章讨论了等效均质概念模型的承压、非承压条件下的含水层传统井流试验理论，论述了地下水文传统研究工具（解析解）在认识和理解含水层特性方面的作用，介绍了含水层大尺度水流运动及溶质运移研究方面的内容。这两章都涉及了尺度问题以及应用传统含水层分析方法研究非均质含水层水力参数的非典型特征问题。

第9章介绍了计算含水层不同分辨率和不确定条件下的地下水流场水头分布的最佳无偏估计值的随机模拟方法，包括非条件化和条件化随机方法。在结尾部分还讨论了抽水试验的新方法（时序抽水试验或水力层析），使研究者有效地利用已有测井资料，降低水流预测和水力参数计算的不确定性。

最后，作者（叶天齐）对相濡以沫的夫人 Mei-lin Yeh（叶美林）女士表示衷心的感谢，

在作者从事地下水研究和教学的 40 余载岁月里，她始终如一地无怨无悔地关爱和鼓励作者的事业，本书的所有灵感和思想都来自她无私的帮助和奉献，可以说“无她助则无此书”。同时，对参与本书翻译和校对工作的所有学者和朋友，一并表示衷心的感谢！

本书的出版得到地下水循环与环境演化教育部重点实验室、水资源与环境工程北京市重点实验室和天津师范大学天津市“千人计划”项目的资助，在此表示诚挚的谢意！

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，敬请各位同行及专家学者指正，以便再版时改进。

作者

# 目 录

## 前言与致谢

<b>1 流体静力学与动力学</b> .....	(3)
1.1 引言 .....	(3)
1.2 流体静力学 .....	(9)
1.3 流体动力学 .....	(12)
1.4 小结 .....	(22)
1.5 习题 .....	(22)
<b>2 饱和孔隙介质中的达西定律</b> .....	(27)
2.1 引言 .....	(27)
2.2 毛细管内流动行为 .....	(27)
2.3 流体通过孔隙介质的 Poiseuille 定律 .....	(30)
2.4 饱和孔隙介质中的达西定律 .....	(33)
2.5 控制体积、达西连续体和典型单元体 .....	(35)
2.6 达西定律的适用范围 .....	(38)
2.7 渗透系数 .....	(41)
2.8 饱和渗透系数的测量实验 .....	(46)
2.9 小结 .....	(49)
2.10 习题 .....	(50)
<b>3 非饱和孔隙介质中的达西定律</b> .....	(55)
3.1 引言 .....	(55)
3.2 负压的定义 .....	(55)
3.3 土水特征曲线 .....	(58)
3.4 非饱和渗透系数曲线 .....	(63)
3.5 水分特征曲线与渗透系数关系数学模型 .....	(65)
3.6 容水度曲线 .....	(69)
3.7 各向同性与各向异性 .....	(69)
3.8 非饱和介质 Darcy - Buckingham 定律 .....	(70)
3.9 非饱和渗透系数测定 .....	(74)
3.10 小结 .....	(76)
3.11 习题 .....	(76)
<b>4 非均质性的随机描述</b> .....	(83)
4.1 引言 .....	(83)



4.2	非均质性的尺度性 .....	(83)
4.3	地质体非均质性概率描述的必要性 .....	(84)
4.4	随机过程和集总矩 .....	(85)
4.5	各态历经性 (Ergodicity) 和集总矩的估计 .....	(87)
4.6	自相关函数的物理意义 .....	(89)
4.7	空间随机过程的分类 .....	(93)
4.8	半方差函数 (变异函数) 分析 .....	(96)
4.9	含水层和包气带非均质性的随机描述 .....	(101)
4.10	野外实例 .....	(104)
4.11	小结 .....	(108)
4.12	习题 .....	(108)
<b>5</b>	<b>非均质概念模型的控制方程 .....</b>	<b>(113)</b>
5.1	引言 .....	(113)
5.2	概念模型 .....	(113)
5.3	连续性方程 .....	(115)
5.4	饱和孔隙介质中的水流控制方程 .....	(116)
5.5	非饱和孔隙介质中的水流控制方程 .....	(117)
5.6	变饱和孔隙介质中的水流控制方程 .....	(119)
5.7	裂隙介质中的水流控制方程 .....	(120)
5.8	初始条件与边界条件 .....	(121)
5.9	二维水平含水层中的水流控制方程 .....	(122)
5.10	控制体积与观测尺度 .....	(128)
5.11	小结 .....	(128)
5.12	习题 .....	(128)
<b>6</b>	<b>等效均质介质概念模型 .....</b>	<b>(133)</b>
6.1	引言 .....	(133)
6.2	饱和介质的有效渗透系数 .....	(133)
6.3	非饱和介质中有效渗透系数及各向异性 .....	(142)
6.4	现场尺度地质介质的达西定律 .....	(145)
6.5	等效均质介质的水流方程 .....	(149)
6.6	等效均质裂隙介质的水流方程 .....	(149)
6.7	概念模型、典型单元体、观测尺度和分辨率 .....	(150)
6.8	小结 .....	(152)
6.9	习题 .....	(152)
<b>7</b>	<b>地下水的井流运动 (一) .....</b>	<b>(157)</b>
7.1	引言 .....	(157)
7.2	承压含水层中的稳定井流 .....	(157)
7.3	承压含水层中的非稳定井流 .....	(162)
7.4	非均质含水层中传统抽水试验的局限性 .....	(175)



7.5	小结	(179)
7.6	习题	(180)
<b>8</b>	<b>地下水的井流运动 (二)</b>	<b>(185)</b>
8.1	引言	(185)
8.2	承压含水层边界效应	(185)
8.3	越流承压含水层	(194)
8.4	潜水含水层	(200)
8.5	小结	(213)
8.6	习题	(213)
<b>9</b>	<b>随机方法</b>	<b>(217)</b>
9.1	引言	(217)
9.2	定义明确和定义不明的正演与反演问题	(217)
9.3	正演问题与反演问题的随机概化	(221)
9.4	有条件线性估计	(228)
9.5	逐次线性估计	(236)
9.6	多重抽水试验的联合解释	(238)
9.7	小结	(243)
9.8	习题	(244)
	参考文献	(246)
	附录 索引	(254)

# 1 流体静力学与动力学

<b>1.1 引言</b> .....	(3)
1.1.1 液体和固体 .....	(3)
1.1.2 量和单位 .....	(3)
1.1.3 连续流体 .....	(4)
1.1.4 流体性质 .....	(5)
<b>1.2 流体静力学</b> .....	(9)
1.2.1 流体上的力 .....	(9)
1.2.2 静水方程 .....	(11)
1.2.3 能量的形式及其与力的关系 .....	(12)
<b>1.3 流体动力学</b> .....	(12)
1.3.1 坐标系：Lagrangian 与 Eulerian 坐标系 .....	(13)
1.3.2 时间导数 .....	(13)
1.3.3 加速度 .....	(14)
1.3.4 Bernoulli 方程 .....	(15)
1.3.5 水头（能量/重量） .....	(16)
1.3.6 水压力计（压力计） .....	(18)
1.3.7 水头损失 .....	(19)
1.3.8 惯性力、黏滞力及流动特性 .....	(20)
1.3.9 雷诺数 ( $Re$ ) 的物理意义 .....	(21)
<b>1.4 小结</b> .....	(22)
<b>1.5 习题</b> .....	(22)



# 1 流体静力学与动力学

## 1.1 引言

流体力学是关于流体（气体和液体）作用力的科学，包括流体静力学（对静止状态流体的研究）和流体动力学（对运动状态流体的研究）。流体力学是许多学科的理论基础，如气象学、石油钻采工程学、血液循环学等。同时，它是水文地质专业的骨干课程，包括研究地表水入渗及其在非饱和带中运动的包气带水文学，研究地质介质中地下水运动规律的地下水文学，研究水流在地表、河流、海洋、湖泊和河口运动的地表水文学以及研究流体在管渠中运动的水力学等。

本章介绍了流体力学的基础知识，便于读者更好地理解地质介质中流体运动的规律。首先引入连续介质假设（即流体体积平均），介绍流体的基本性质；其次讨论流体静力学的相关问题；再次介绍了流体动力学知识，包括管道流体的伯努力（Bernoulli）方程、水头损失、层流和紊流的概念以及雷诺数对流体运动特性的影响，为后续章节的学习作铺垫。

### 1.1.1 液体和固体

讨论物质的状态有利于我们了解流体和固体的区别。物质的状态包括固态、液态和气态。在固体状态下，物质的分子被限制在固定位置上振荡，这种限制使固体具有确定的体积和形状。当对固体施加能量时，固体分子更剧烈地振荡，直至摆脱其固有位置，此时固体成为液体。液体分子可以在液体内部自由移动，但分子间作用力使它们无法脱离液体表面，使液体的体积不变，形状可以随意变化。当对液体施加能量时，分子获得可以脱离液体表面的能量，蒸发到邻近空间。达到临界温度后，所有液体分子都能挣脱表面束缚，会在液体中形成大量气泡。气体分子可以自由移动，因此气体没有确定的形状和体积，可以充满任意体积的容器。

相对于固体，流体是一种粒子可移动并容易改变相对位置的物质。我们把在极小的剪切应力作用下会产生连续变形、没有实际抗剪能力的物质称为流体，而将在作用力的大小或方向发生改变时，其形状或组成微粒仅发生微小变形的物质称为固体。我们在处理有关水资源问题时主要是针对液态水，但在处理地下水污染问题时，我们也会接触到气体问题。

### 1.1.2 量和单位

在介绍流体性质前，我们先对相关量的名称和单位进行回顾。流体力学中的量用基本量（如质量、长度和时间）和单位表达，单位制类型包括英制单位（美国常用）、公制单位（世



界大多数国家采用) 和国际单位制 (SI, 科学界常用)。表 1.1 列出了科学和工程领域使用的三种单位制, 其中国际单位制 (表 1.2) 应用最为广泛。表 1.2 给出了在国际单位制中一些有用的前缀。

表 1.1 基本量的三种单位制

量的名称	国际单位制 (SI)		公制或厘米-克-秒制单位 (CGS)		英制单位 (BS)	
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号
质量	千克	kg	克	g	斯勒格	
力	牛 [顿]	N	达因	dyn	磅	lb
长度	米	m	厘米	cm	英尺	ft
时间	秒	s	秒	s	秒	s
热力学温度	开 [尔文]	K	摄氏温度	°C	华氏温度	°F

表 1.2 国际单位制 (SI) 的单位及其前缀

单位		前缀		因数
名称	符号	名称	符号	
焦 [耳]	J <sup>①</sup>	太 [拉]	T	10 <sup>12</sup>
开 [尔文]	K	吉 [咖]	G	10 <sup>9</sup>
千克	kg	兆	M	10 <sup>6</sup>
米	m	千	k	10 <sup>3</sup>
牛 [顿]	N	毫	m	10 <sup>-3</sup>
帕 [斯卡]	Pa <sup>②</sup>	微	μ	10 <sup>-6</sup>
弧度	rad	纳 [诺]	n	10 <sup>-9</sup>
秒	s	皮 [可]	p	10 <sup>-12</sup>
瓦 [特]	W <sup>③</sup>	飞 [母托]	f	10 <sup>-15</sup>

① 1 J = 1 N · m。② 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>。③ 1 W = 1 J/s。

力是流体力学的基本变量之一, 既有大小又有方向, 它的国际单位制单位是牛 [顿] (N), 是以 Isaac Newton (1643—1727) 的名字命名的。我们都熟悉的牛顿第二定律为: 一个物体的质量  $m$ 、加速度  $a$  和作用在物体上的力  $F$  三者之间的关系是  $F = ma$ 。其中, 描述速度变化率的加速度  $a$  和力  $F$  是矢量, 力的方向与加速度的方向相同。

质量衡量的是物体包含了多少物质, 重量则是重力场中的物体被施加重力的度量。质量与重量成正比, 重力导致的加速度是一个正比例常数。 $F$  的量纲遵循牛顿第二定律:

$$F = ma \quad (1.1.1)$$

力的量纲为  $[M \cdot L \cdot T^{-2}]$ , 其中 M、L 和 T 分别表示质量、长度和时间的量纲符号。我们经常将牛 [顿] (N) 或  $kg \cdot m \cdot s^{-2}$  作为力的单位。例如, 作用于质量为 1 kg 的物体使物体的加速度达到  $1 m/s^2$  的力为 1 N。

### 1.1.3 连续流体

为了便于研究, 流体力学对所研究的对象作了一些基本假设。在流体力学中, 流体的性

质是指流体内任一点的性质。如果我们在流体中随机选择一点，由于流体离散的本质，该点既可能在一个原子的内部，也可能处于两个原子或分子之间。那么流体力学定义的与“点”相关的流体“性质”会依赖于测量点的位置，导致物质在空间中的性质分布不连续，这种不连续与微积分方程的光滑、连续要求矛盾。为了避免这一问题，在分析流体力学时我们采用**连续介质假设**，即将流体理想化成整体连续的，通过把分子“抹平”或“均化”来消除分子的间隙。通过连续介质假设，在无限小的点上明确定义了密度、黏度等流体性质，这些性质从一点到另一点是连续的，忽略了流体是由离散分子构成的。该假设也适用于定义力、温度、压力、能量等其他变量。

尽管我们从数学角度用“点”定义了流体的物理或化学属性，我们应该明确“点”实际上代表真实空间中的一个小体积，这个小体积确定了流体的平均性质，该体积大到足够包括许多分子。例如，在考虑对流体施加一系列的力时，我们可以对流体每个分子的特性做出解释，但我们有更好的办法，即通过考虑给定体积内分子的平均影响来简化问题（难以想象去研究  $6.022 \times 10^{23}$  个分子的特性，而这仅是 1 mol 的物质）。连续介质假设是一种简化和近似，但在恰当的研究环境或尺度下能产生很精确的结果。

### 1.1.4 流体性质

介绍了连续介质假设之后，我们给出流体性质（即容重、密度、相对密度、黏度）的定义。

**容重 ( $\gamma$ )**：是流体每单位体积 ( $V$ ) 的重力（流体的质量  $m$  乘以重力加速度  $g$ ），或每单位体积的重量 ( $W$ )：

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \frac{W}{V} \quad (1.1.2)$$

通常我们用符号  $\gamma$  表示容重。水在  $20\text{ }^\circ\text{C}$  时容重为  $9.79 \times 10^3\text{ N/m}^3$ ，空气在同样大气压和温度条件下的容重为  $11.9\text{ N/m}^3$ 。

**密度 ( $\rho$ )**：是每单位体积的质量，称为质量密度，简称密度，单位是  $\text{kg/m}^3$ ，用符号  $\rho$  表示。因为容重是每单位体积的重量，因此物质的容重除以  $g$  表示其密度。水在  $0\sim 4\text{ }^\circ\text{C}$  时的密度为  $1000\text{ kg/m}^3$ ，空气在  $20\text{ }^\circ\text{C}$  时的密度为  $1.2\text{ kg/m}^3$ （表 1.3）。

表 1.3 常见流体的密度

流体	密度/ $(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	流体	密度/ $(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$
水	0.998	空气	0.0012
水 ( $0\text{ }^\circ\text{C}$ )	1.000	海水	1.030
水 ( $4\text{ }^\circ\text{C}$ )	1.000	四氯乙烯	1.622
水 ( $100\text{ }^\circ\text{C}$ )	0.958	甘油	1.260
汽油	0.726	水银	13.546
乙醇	0.791		

注：除标注条件下，其余流体的密度均指 1 个标准大气压和  $20\text{ }^\circ\text{C}$  条件下的密度。1 标准大气压 ( $\text{atm}$ ) =  $1.01325 \times 10^5\text{ Pa}$ 。

**相对密度 ( $SG$ )**：是给定流体的容重与标准温度下水的容重的比值，量纲为一。通常取水的标准温度为  $4\text{ }^\circ\text{C}$ ，该温度的水在标准大气压下的容重为  $9810\text{ N/m}^3$ 。 $20\text{ }^\circ\text{C}$  时容重为

133 kN/m<sup>3</sup> 的水银的相对密度 ( $SG_{\text{Hg}}$ ) 为

$$SG_{\text{Hg}} = \frac{133}{9.81} = 13.6 \quad (1.1.3)$$

**动力黏度 ( $\mu$ ) 与运动黏度 ( $\nu$ ):** 黏度描述了流体在受到剪切应力 (见 1.2.1 节) 作用时对剪切运动的抵抗。不同种类的流体形变速度不同, 例如石油和蜂蜜都比水形变更慢, 因此黏性更大, 但石油和蜂蜜哪个黏性更大呢? 为区别不同流体的黏度, 我们有必要对不同流体的黏度进行定量描述。

某水槽内静止的水面上漂浮着一张夹板 (图 1.1)。我们先用钢笔画一条从夹板底部到水底部的垂直直线, 然后对夹板施加一个切向力  $F$ , 可观察到图中所示的墨水位置发生位移的现象。通过墨水移动的位置, 可在任意垂直的地方 ( $z$ ) 定义水移动的速度  $v$ , 即

$$v(z) = \frac{\Delta x(z)}{\Delta t} \quad (1.1.4)$$

式中,  $\Delta x(z)$  是高度  $z$  处的墨水位置经过时间间隔  $\Delta t$  的水平位移。

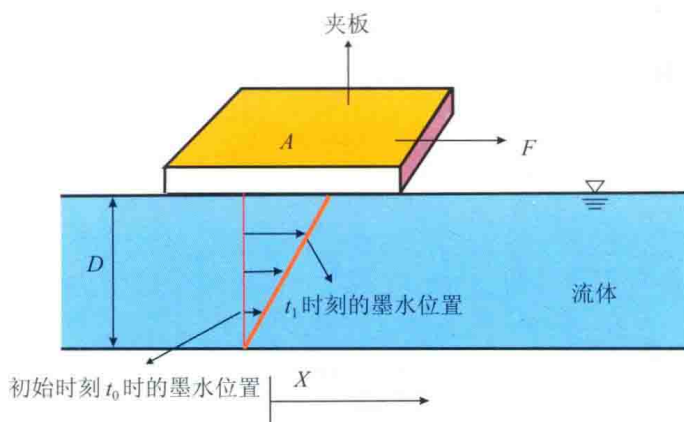


图 1.1 证实剪切应力与速度梯度关系的实验示意图

$D$ —流体深度;  $A$ —夹板与流体之间的接触面积

实验中我们发现, 在水的表面处液体移动的速度最快, 而在底部最慢。这是由于液体与水槽壁之间的摩擦力较大, 而与空气之间的摩擦力较小的缘故。现在, 我们在液体一点处定义速度梯度为

$$\alpha(z) = \frac{v(z)}{z} \quad (1.1.5)$$

式中,  $z$  为从水槽的底部到定义速度的位置高度处的垂直距离, 当墨水位置的位移随  $z$  线性增加时, 速度梯度就是常数。

如果用不同大小的力  $F$  多次重复操作该实验, 并画出剪切应力 ( $F/A$ ) 和对应的速度梯度  $\alpha(z)$  之间的散点图, 在图 1.2 中我们可观察到剪切应力 ( $F/A$ ) 与值  $\alpha(z)$  成正比, 即

$$\frac{F}{A} \propto \alpha(z) \quad (1.1.6)$$

我们常根据这种关系对流体进行分类, 例如牛顿

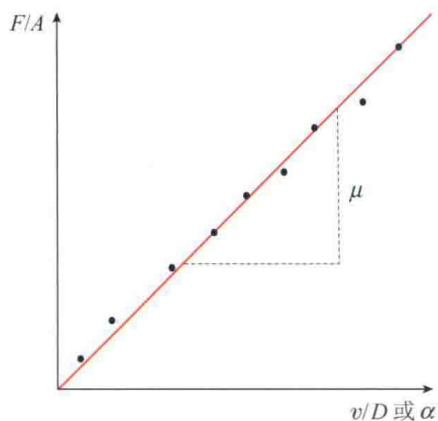


图 1.2 某牛顿流体的剪切应力和垂直的速度梯度之间的关系



流体和非牛顿流体。**牛顿流体**（如水、空气等）是一种剪切应力与垂直于剪切面方向的速度梯度成线性正比关系的流体（图 1.2），这个比例常数就是我们说的黏度。**非牛顿流体**（如塑料、血液、沐浴露等）是剪切应力与速度梯度不是线性关系的流体，即黏度随施加的剪切应力而改变。

在地下水文学研究中，由于水是一种牛顿流体，因此水的  $F/A$  是关于  $v(z)/z$  的线性函数，可以用下面的公式表示：

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v(z)}{z} \quad (1.1.7)$$

式中， $\mu$  为正比例常数（即  $F/A$  与  $\alpha$  的线性直线的斜率），也称为流体的**动力黏度**。如果我们用不同的流体进行多次试验，直线的斜率也会改变。这一改变反映出不同流体对所承受的剪切应力的抵抗程度不同。用微分  $dv/dz$  替换  $v(z)/z$ （其中  $z$  是高度），用剪切应力的符号  $\tau$  替换  $F/A$ ，得到

$$\tau = \mu \frac{dv}{dz} \quad (1.1.8)$$

方程 (1.1.8) 也叫**牛顿黏性定律**。

观察下面变量的量纲。注意 M、T 和 L 分别代表质量、时间和长度的量纲符号。

$$\text{剪切应力 } \tau = \frac{F}{A} = \frac{ma}{L^2} = \frac{mv/t}{L^2}。$$

$$\tau \text{ 的量纲为 } [M] \left[ \frac{L}{T^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{L^2} \right] = \left[ \frac{M}{LT^2} \right]。$$

$$\text{动力黏度 } \mu \text{ 的量纲为 } \left[ \frac{M}{LT} \right]。$$

$$\text{速度梯度 } \frac{dv}{dz} \text{ 的量纲为 } \left[ \frac{LT^{-1}}{L} \right] = \left[ \frac{1}{T} \right]。$$

变量的相应单位是

$$\text{力 } F=ma, \text{ 1 牛 (N)} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\text{压力 } p = \frac{F}{A}, \text{ 1 帕 (Pa)} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ kg}}{\text{ms}^2}。$$

$$\text{黏度 } \mu = \frac{\tau}{dv/dz}, \text{ 1 厘泊 (cP)} = 10^{-2} \text{ P} = 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}。$$

**注意：**黏度与温度通常存在反比关系。除了动力黏度，也经常使用运动黏度（表 1.4）。

**表 1.4 水在英制单位下的动力黏度与运动黏度**

温度 $t/^\circ\text{F}$	动力黏度 $\mu/(10^{-5} \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}^{-2})$	运动黏度 $\nu/(10^{-5} \text{ ft}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
32	3.732	1.924
40	3.228	1.664
50	2.730	1.407
60	2.344	1.210
70	2.034	1.052
80	1.791	0.926



续表

温度 $t/^\circ\text{F}$	动力黏度 $\mu/(10^{-5} \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}^{-2})$	运动黏度 $\nu/(10^{-5} \text{ ft}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
90	1.580	0.823
100	1.423	0.738
120	1.164	0.607
140	0.974	0.511
160	0.832	0.439
180	0.721	0.383
200	0.634	0.339
212	0.589	0.317

注:  $t_F = \frac{9}{5}t + 32 = \frac{9}{5}T - 459.67$ ,  $t_F$  代表华氏温度,  $t$  代表摄氏温度,  $T$  代表开氏温度。1 ft=12 in=0.3048 m, 1 lb=0.453592 kg。

运动黏度 ( $\nu$ ) 为动力黏度 ( $\mu$ ) 与质量密度 ( $\rho$ ) 的比值:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.1.9)$$

运动黏度的量纲为  $\left[\frac{\text{L}^2}{\text{T}}\right]$ 。

表 1.5 至表 1.7 列出了水在不同温度、单位下的流体性质。

表 1.5 水在国际单位制下的动力黏度与运动黏度

温度 $t/^\circ\text{C}$	动力黏度 $\mu/(10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ 或 } 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$	运动黏度 $\nu/(10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
0	1.787	1.787
5	1.519	1.519
10	1.307	1.307
20	1.002	1.004
30	0.798	0.801
40	0.653	0.658
50	0.547	0.553
60	0.467	0.475
70	0.404	0.413
80	0.355	0.365
90	0.315	0.326
100	0.282	0.29

表 1.6 水在英制单位下的密度与容重

温度 $t/^\circ\text{F}$	密度 $\rho/(\text{slugs}/\text{ft}^3)$	容重 $\gamma$	
		$\text{lb} \cdot \text{ft}^{-3}$	lb/USgal
32	1.940	62.42	8.3436
40	1.940	62.43	8.3451
50	1.940	62.41	8.3430