研究生高水平课程体系建设丛书

连续介质力学基础

郭伟国　高校生　张　阳　编著

西北工业大学出版社

[redacted]水平课程体系建设丛书

LIANXU JIEZHI LIXUE JICHU

连续介质力学基础

郭伟国 高校生 张阳 编著

西北工業大學出版社
西 安

【内容简介】 本书主要内容包括指标符号及其基本运算、坐标系及其坐标变换、张量分析、变形与有限应变、流动与变形率、应力分析、连续介质力学的基本定律、本构方程的基本理论、弹性体基础理论、流体力学基本理论、超弹性体本构关系、固体的经典塑性理论、线性黏弹性材料的本构方程以及金属材料的塑性流动本构关系。本书内容适合已有高等数学、线性代数、材料力学和弹性力学先修基础的工科类高年级本科生学习。

本书可作为工科院校工程类及力学相关类专业的本科生和研究生学习连续介质力学的基础教材，也可供有关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学基础/郭伟国，高校生，张阳编著．—西安：西北工业大学出版社，2018.8

（研究生高水平课程体系建设丛书）

ISBN 978-7-5612-6212-2

Ⅰ.①连…　Ⅱ.①郭…　②高…　③张…　Ⅲ.①连续介质力学—研究生—教材　Ⅳ.①O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 195141 号

策划编辑： 何格夫

责任编辑： 卢颖慧

出版发行： 西北工业大学出版社

通信地址： 西安市友谊西路 127 号　　**邮编：** 710072

电　　话： (029)88493844　88491757

网　　址： www.nwpup.com

印 刷 者： 陕西向阳印务有限公司

开　　本： 787 mm×1 092 mm　　1/16

印　　张： 11.75

字　　数： 279 千字

版　　次： 2018 年 8 月第 1 版　　2018 年 8 月第 1 次印刷

定　　价： 40.00 元

前　言

连续介质力学是物理学(特别是力学)当中的一个分支,它是以统一的观点来研究连续介质在外部作用下变形和运动规律的一门学科,是流体力学、弹性力学、塑性力学等众多力学分支的重要理论基础。连续介质力学研究的是物体的宏观力学行为,其在理论上认为物体是介质质点的连续集合体,因而物体的运动和变形实质上是质点的运动。

连续介质是指介质中无孔洞、裂纹、间隙等断开现象。具体说,流体或固体质点在空间是连续而无空隙的分布,且质点具有的宏观物理量,如质量、速度、压强、温度等,都是空间和时间的连续函数。

本书从张量分析及相关的数学理论开始,一步一步地展示连续介质力学课程中的概念及理论。本书一共分为 15 个章节。

第 0 章绪论中详细地介绍连续介质力学最基本的理论,从介绍连续介质开始,介绍连续介质力学的研究内容、基本假设、研究对象等,而且对于连续介质力学的重要数学工具——张量也进行阐述。

第 1 章介绍张量分析中所要用的基本的指标符号及其在直角坐标系和曲线坐标系下的基本运算。

第 2 章介绍直角坐标系和曲线坐标系下张量的表示以及两种坐标系之间的转换关系,还有在直角坐标系下梯度、散度和涡度的定义。

第 3 章系统地介绍张量的定义、其基本运算以及常用的特殊张量,也将张量作为一种自变量来讨论张量函数及其微积分运算。

第 4 章从物体的构型出发,基于拉格朗日和欧拉两种描述方法,定义变形梯度和位移梯度,并基于这几种梯度,定义几种典型的变形张量和应变张量。

第 5 章将拉格朗日和欧拉描述方法应用于流体中,介绍物质导数的概念。根据物质导数的定义,可以得到物质的变形速度张量、应变速度张量和旋率张量。最后推导得出体元、面元和线元以及体积分、面积分和线积分的物质导数。

第 6 章定义应力矢量的概念,介绍三种不同的应力矢量:Euler 应力、Lagrange应力和 Kirchhoff 应力。深入分析讨论三者之间的关系,得到它们表达的运动方程、增率方程和虚功方程。

第 7 章系统介绍非极性连续介质力学的四个基本规律:质量守恒定律、动量平衡定律、动量矩平衡定律和能量守恒定律。

第 8 章详细描述本构方程遵循的准则和原理。基于连续介质力学基本规律,

考虑初始条件和边界条件,可以建立起特定连续材料的本构方程。材料的多样性虽然使本构方程有所差异,但都要服从一些共同的准则。

第9,10章分别就弹性体和流体的基本理论进行深入分析,为本构方程的建立提供理论依据。

第11章超弹性体本构关系。超弹性材料(例如橡胶材料)的工作环境和性能,使其本构关系的建立与弹性差异较大。本章对这种特殊材料的本构关系做出系统介绍。

第12,14章介绍经典塑性理论,并基于这些理论建立金属材料的本构关系。

第13章基于固体的弹性和流体的黏性,介绍线性黏弹性材料的本构方程。

本书由郭伟国、高校生、张阳编写,其中高校生编写第11章,并审读、修改了其他所有章节;郭伟国编写了第0章~第10章,第12章~第14章;西北工业大学研究生张阳做了大量的整理工作,负责全书的修改、公式编辑、绘图修正以及校对工作。王瑞丰、王培成同学也提供了一些帮助。本书参考国内外有关的著作与文献,并得到许多专家和教授的建议、帮助和支持,在此表示衷心感谢。

由于水平有限,本书还有许多不尽人意之处,我们盼望着使用本书的教师和读者能够提出宝贵的意见,也热切地期待得到同行的建议和指教。

编著者

2018年3月

目　录

第0章 绪 论

1. 什么是介质？

介质，也可说是自然界的物质，本书中主要指三类物质：

(1)固体，例如金属、高分子、复合材料等；

(2)流体，例如水、油等；

(3)气体，例如空气。

2. 什么是质点？

质点是连续介质力学理论中非常重要的一个物理化模型的概念。所谓质点，也就是具有质量的点，实际是指微观上充分大、宏观上充分小的分子团，也称微团。其尺度远大于分子或分子运动尺度，即它可以包含“无数”的分子，而比所研究的力学问题的特征尺度足够小。

质点要拥有物质的属性。例如研究对象是一块钢材，如果要把质点定位在原子尺度，但从原子尺度看不出宏观物质的属性，所以对于质点来说就有一个特征尺寸问题。特征尺寸或长度通常是指该物体长度中有代表意义的长度，例如一个球体，它的特征长度可认为是球体的半径或直径，或者一个薄板，可认为最小几何厚度是其特征长度。质点往往比物体的特征长度要小数个量级。

3. 什么是连续介质？

回顾物质(或体系)尺度的基本分类，简单来说，对于物质可以从宏观(肉眼可见)、介观(细观)、微观(原子级)体系来研究。介观尺度是介于宏观和微观之间的尺度，一般认为它的尺度在纳米和微米之间(或在 1～100 nm 的尺度范围内)。微观系统与宏观系统最重要的区别是它们服从的物理规律不同，在微观系统中宏观的规律(如牛顿定律)不再适用，而需要用量子力学去处理与分析。本书所提及的连续介质是基于宏观体系的。

连续介质力学理论认为物体是介质质点的连续集合体，因而物体的运动和变形实质上是质点的运动。连续介质是指介质中无孔洞、裂纹、间隙等断开现象。具体说就是流体或固体质点在空间是连续而无空隙地分布的，且质点具有的宏观物理量如质量、速度、压强、温度等都是空间和时间的连续函数。

不连续介质的举例：例如在稀薄气体中，分子间的距离很大，能和物质的特征尺度比拟，虽然确定平均值的分子团还存在，但不能将它看成一个质点；又如考虑激波内的气体运动，激波的厚度与分子自由程同量级，激波内的流体只能看成分子而不能当作连续介质来处理。

进一步说，连续一词来自数学中的函数连续概念。其本意是说河水流动、植物生长等是连续变化的，这种现象从函数关系上就是函数的连续性，以数学表达为：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋向于零时，对应的函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 也趋于零，即认为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续。

4. 连续介质与数学的关系

连续介质的概念使我们可以来研究物理量在空间每一点的变化。这个点是指几何上所讲的点，它在空间中不占任何体积。例如我们可以通过数学上求极限的方法来定义物体在每一

点的密度，每一点的应力状态等。

连续介质力学(continuum mechanics)是物理学(特别是力学)当中的一个分支，研究连续介质力学的主要目的是用数学公式或方程来描述所涉及的物质的各种现象，例如物体的质量、速度、应力、应变、变形模量等等。这些量往往是坐标的函数，而物体(是由质点集聚的集合体)的各个质点是用坐位置矢量表示的。例如，在三维笛卡儿正交坐标系下每个质点的位置都可以用一个矢量或一组坐标 (x,y,z) 表示，要保障质点之间是连续的，就意味描述质点的变量 (x,y,z) 是连续变化的，则以这些连续变化的变量为自变量所反映出函数数学式(例如应力、应变等)就有其基本的连续性和有效性。

5. 为什么要学张量分析？

首先回答什么是张量。

“张量”一词最初由威廉·罗恩·哈密顿在 1846 年引入。张量这一术语起源于力学，其英文是 tensor，它和张力(拉力，英文 tension)同属性。为了举例说明张量，可以想象当巨型球场的气动鼓膜盖顶体在平衡时，在三维笛卡儿正交坐标系下对此膜中任取一质点进行受力分析，此质点可看成是一个平行六面体微元，此“六面体微元质点”的位置表示可有三种：

(1)此质点的位置用矢量表示(假定矢量起点在坐标原点)，其实体表示为 $\boldsymbol{P}$；

(2)此质点的位置用分量表示(坐标)为 (x,y,z)；

(3)若坐标轴单位矢量(基矢量)取为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，这时矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以并矢表示(包含分量和基矢量)为

$$\boldsymbol{P} = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}$$

此质点的弹性应力(柯西应力)也可以用三种表示法表示：

(1)用实体表示为 $\boldsymbol{\sigma}$。

(2)用分量表示(以矩阵)为 $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$。

(3)用并矢表示(包含分量和基矢量)为(基矢量仍取为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{xx}\boldsymbol{ii} + \tau_{xy}\boldsymbol{ij} + \tau_{xz}\boldsymbol{ik} + \tau_{yx}\boldsymbol{ji} + \sigma_{yy}\boldsymbol{jj} + \tau_{yz}\boldsymbol{jk} + \tau_{zx}\boldsymbol{ki} + \tau_{zy}\boldsymbol{kj} + \sigma_{zz}\boldsymbol{kk}$$

矢量之间(两个以上)的并矢表示可为 $\boldsymbol{ij}$ 或 $\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{j}$。

对于矢量及表示法我们已熟知，但对于某一质点的应力状态，从上面的表达式可看出，它需要由 9 个分量才能完整表示。这就需要引出张量的概念。

张量是一个可用来表示在一些矢量、标量和其他张量之间的线性关系的多线性函数。在上面的例子中，位置矢量为一阶张量，应力为二阶张量。张量虽可以用坐标系统来表达，但它是定义为不依赖于参照系的选择的。正是因此，我们需要用张量来描述和研究连续介质的物理规律，因为这些物理规律是不依赖于参照系的选择的。

6. 张量的阶数定义

对于张量的阶数，若以 Ω 表示空间维数，例如以三维空间为例，如果 n 代表张量阶数，m 代表分量个数，则有式：

$$\Omega^n = 3^n = m$$

这样在三维空间中一点的应力、应变、应变率等都要由 9 个分量才能描述，这些属于二阶张量；而一点弹性常数有 81 个分量，则属于四阶张量。

对于流体，若流体是在运动状态，其剪应力分量经常不为零，在这种情况下黏性应力分量 τ_{ij} 也由 9 个分量组成，属于二阶张量；牛顿流体的黏性系数由 81 个分量组成，是四阶张量。

并不是任意一组数都可以是张量，在后续章节中将给出张量的定义。按照上式判断，在三维空间中，一个物理量若由一个数(分量)表示即为零阶张量；由 3 个分量表示即为一阶张量，由 9 个分量表示为二阶张量。任何张量都可以写成前面所描述的三种表示形式。类似我们在数学分析中学习标量变量的各种运算分析，连续介质力学涉及一阶以上的张量，所以必须首先学习这些高阶张量的运算及分析，即为张量分析。

7. 张量分量与坐标变换

在连续介质力学中，物理量、力学变量以及各种物理规律可以用 L 坐标系、I 坐标系或者 E 坐标系来描述。L 坐标系是指 Lagrange 坐标系，又称物质坐标系，该坐标系中的坐标给出了物体中质点的位置。I 坐标系又叫随体坐标系，这里是将物体的变形理解成描述质点位置的物质坐标系在变形过程中随物体一起运动、旋转和变形，在运动和变形过程中度量物体长度的尺度(坐标系本身的基矢量、度量张量等)也在不断地变化，初始的直线坐标系会变成曲线坐标系。E 坐标系是指 Euler 坐标系，又称空间坐标系，是固定于空间的参考坐标系，它用来描述空间的位置坐标，不随质点运动或时间参数 t 而改变。

L 坐标和 I 坐标描述的是质点及其邻域在某一刻 t 的物理量，而 E 坐标描述的是空间某点及其邻域在某一刻 t 产生的物理量。比较可知，在 E 坐标系中，物体的变形为质点的坐标 x_i 不断变化，而坐标系本身却保持不变；在 I 坐标系中，物体的变形为描述质点坐标的坐标系构架在不断地变化，而坐标系中的质点坐标值保持不变。

张量的分量个数是不变的。例如矢量即一阶张量由 3 个分量表示，二阶应力张量有 9 个分量，且由以上分析知道这 9 个分量是由于坐标系的建立而得到的，如果坐标系改变(旋转、平移等)，这 9 个张量分量的具体值会变动，但分量个数不变。也就是说某一客观存在的张量，可以有无数组不同分量值表示，而我们要建立质点所拥有的各个量的函数关系，例如本构方程是不能因坐标系不同而变化的。为了实现这一点，就必须了解各组分量之间的关系，即坐标系之间的变换关系。

8. 连续介质力学的研究内容

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型和把各种物质的本构关系用数学形式确定下来，并在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解答，通常包括下述基本内容：

(1) 变形几何学。研究连续介质变形的几何性质，确定变形所引起物体各部分空间位置和方向的变化以及各邻近点相互距离的变化，这里包括诸如运动、构形、变形梯度、应变张量、变形的基本定理、极分解定理等重要概念。

(2) 运动学。主要研究连续介质力学中各种量的时间率，这里包括诸如速度梯度、变形速率和旋转速率等重要概念。

(3) 基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程，例如，热力连续介质力学中包括连续性方程、平衡方程、能量方程、熵不等式等。

(4) 本构关系。描述某种具体的或理想化的材料的力学行为的特殊理论，例如弹性理论、黏性流体理论、塑性理论、黏弹性理论、热弹性固体理论、热黏性流体理论等。

(5) 问题的求解。

9.连续介质力学的基本假设

连续介质力学的最基本假设是“连续介质假设”:认为真实的流体和固体可以近似看作由连续的、充满全空间的介质组成,物质的宏观性质依然受牛顿力学的支配。这一假设忽略物质的具体微观结构(对固体和液体微观结构研究属于凝聚态物理学的范畴),而用一组偏微分方程来表达宏观物理量(如质量、速度、压力等)。这些方程包括描述介质性质的方程(constitutive equations)和基本的物理定律,如质量守恒定律、动量原理、动量矩原理、热力学定律等。

10.连续介质力学的研究对象

固体:固体不受外力时,具有确定的形状。固体包括不可变形的刚体和可变形固体。刚体由一般力学中的刚体力学研究;连续介质力学中的固体力学则研究可变形固体在应力、应变等外界因素作用下的变化规律,主要包括弹性和塑性问题。

(1)弹性:应力作用后,可恢复到原来的形状。

(2)塑性:应力作用后,不能恢复到原来的形状,发生永久形变。

流体:流体包括液体和气体,无确定形状,可流动。流体最重要的性质是黏性(viscosity),即流体对由剪切力引起的形变的抵抗力;无黏性的理想气体,不属于流体力学的研究范围。从理论研究的角度,流体常被分为牛顿流体和非牛顿流体。

(1)牛顿流体:满足牛顿黏性定律的流体,比如水和空气。

(2)非牛顿流体:不满足牛顿黏性定律的流体,介于固体和牛顿流体之间的物质形态。

11.张量在连续介质力学中的应用

自然界的运动和变化是有规律的,认识这些规律是自然科学的任务。而需用数量来描述这些规律时,往往需要引入坐标系。只有这样,才能把数学带到自然科学中去。然而,随之而来的问题是,本来与坐标系无关的自然规律,它的数学表达式不得不与坐标系的选择夹杂在一起,以至掩盖了原来事物的物理本质。

张量的引入恰是试图既采用坐标系又摆脱具体坐标系影响的一种尝试。使用张量,可以简化推导,使演算过程清晰,表达式整齐统一。用张量描述的物理定律和集合定理,所得到的结果在任何坐标系下都具有不变形式,从而充分地反映了这些现象的物理或集合属性。张量所具有的高度概括、形式简洁的特点使得它在分析力学、固体力学、流体力学、几何学、电磁学和相对论等诸多领域获得了越来越广泛的应用。

连续介质力学是以广泛而深厚的数学理论作为研究的基础,它除了需要一般的高等数学基础之外,还需要一些特殊的数学分支,其中最主要的就是张量的相关内容。在连续介质力学和理论物理中广泛地采用张量,这不仅是因为采用张量来表示基本方程时,书写高度简练,更重要的是因为连续介质力学中所出现的一些重要的物理量,如应力、应变等本身就是张量。所以,张量对于连续介质力学的研究十分重要。

连续介质力学以及各物理学科中所研究的物理量均不依赖于坐标系,然而要在数量上表示某个物理量并对其进行计算,常常又需要选择参考的坐标系。物理量在不同的坐标系中将给出不同的表征量,即给出一些不同的分量。但这些坐标系所表述的物理量又是客观存在的同一物理量,因此在不同坐标系其不同的表征数值之间必有确定的变换规律:在一个坐标系下物理量(亦张量)其诸分量已知,则在另一坐标系下该张量的各分量就完全确定了。这就是张量独立于坐标系的反映。因此,张量在连续介质力学中起着举足轻重的作用,这种作用是别的数学工具无法代替的。正如W.Flugge所说,有了张量分析,研究连续介质力学就如鱼得水。

12. 连续介质力学最基本理论的介绍

连续介质力学是近代物理学中的一个重要分支，它是以统一的观点来研究连续介质在外部作用下变形和运动规律的一门学科，是流体力学、弹性力学、塑性力学等众多力学分支的重要理论基础。

连续介质力学的基本方程有三类：

(1)关于物体变形和运动的几何学描述的方程，它可具有任意要求的精度。

(2)适用于一切连续介质的物理基本定律的方程，如质量守恒定律、动量守恒定律以及热力学定律。

(3)描述材料力学性质的宏观本构关系的方程。

以上三类基本方程，连同相应的初始条件和边界条件，构成数学物理方程的初、边值问题的完整提法。

连续介质力学研究物体的宏观力学行为。假设材料由大量的粒子组成，因而无须考虑粒子的物理性质，可把材料当作连续或分段连续的。连续介质力学研究的主要任务包括：

(1)给定本构方程，预言材料的力学行为，即求解初、边值问题。

(2)根据材料给定的性质，提出适合于物质不变性原理的本构方程，因而以函数或泛函的形式提出材料常数。

第1章　指标符号及其基本运算

连续介质力学是用数学来描述物体运动、变形所遵从的物理规律。张量分析是数学的一个分支学科，它之所以重要，在于它可以满足一切物理定律必须与坐标系的选择无关的特性。

1.1　指标符号意义

1.1.1　张量指标的表示法

在张量分析中，为清楚地表示任意阶的张量，在表示张量的字母符号的右侧加上标或下标，以表示张量的分量，如下所示：

$$a_i, b^j, T_{ij}, T_i^{\cdot j}, \delta_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}$$

注意：

(1)如果是在正交笛卡儿坐标系，区分上标和下标无意义，即不管上下标的差异。

(2)如果在斜角坐标系(或为场中的坐标标架)，其坐标轴线夹角不为 $\pi/2$，这时以下标表示的称为协变量分量，以上标表示的为逆变量分量，既有上标也有下标的称为混合式分量。

(3)在混合式中，同时有下标与上标，为确切表示指标的前后顺序，在上、下标的空位处用小圆点标识，例如 $T_{\cdot j}^{i}$，其中 j 前的圆点表示 j 是第二个指标。

(4)用作下标或上标的拉丁字母或希腊字母，除非作特别的说明，一般取从 1 到 n 的所有整数，其中 n 称为指标的范围(变程)。本书为区别三维空间张量和二维空间张量，拉丁字母指标 $i,j,k,l,m\cdots$ 的范围顺序是 1,2,3；希腊字母指标 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$ 的范围顺序是 1,2。例如坐标 x_i，其指标 i 是从 1 到 2 到 3 的顺序(也叫跑标)，坐标 x^α 是 $\alpha=1,2$ 的二维空间的坐标。

(5)在一个张量或者一个表达式的某一项中，一个指标可以出现一次或两次，不重复的指标称为自由指标，自由指标的个数反映的是张量的秩或张量的阶数，例如 F^{ijj}，$\varepsilon_{ijk}U_jV_k$ 均表示是一阶张量。这里必须指出，如果某自由指标在一个方程中的某一项里出现，则它一定会出现在这个方程的每一项中。出现两次的指标为哑指标，它表示对这个指标遍历其范围求和。

哑指标符号使用的规则：

(1) $A_{ij}B_{ij} = B_{ij}A_{ij} = A_{ji}B_{ji}$；

(2)如果不需要求和，可以用下划线表示，例如：$A_{\underline{ii}} = A_{11}, A_{22}$或 A_{33}；

(3)为避免同一指标重复超过两次，有时候就要求用其他字符来代换式子中的哑指标(定义见 1.1.2 小节)，例如因为 $a_i = C_{ij}b_j$，$b_j = c_iD_{ji}$，则有 $a_i = C_{ij}c_iD_{ji}$，但这就导致指标 i 有 3 次出现在右端项中，此时，让 $b_j = c_kD_{jk}$，由于 k 是哑指标，b_j 的值不会变，所以有 $a_i = C_{ij}c_kD_{jk} = C_{ij}D_{jk}c_k$。

1.1.2　求和约定

在一个表达式的同一项中，同一指标在上标、下标或上标和下标中重复出现，则表示要对这个指标遍历其范围 1，2，…，n 求和，但注意指标重复次数不能超过 2，这是一个约定，称为求和约定。

例如，$T^{\cdot i}_{\cdot\cdot i}$ 表示的是依次让 i 取从 1 到 n 后，得到 $T^{\cdot 1}_{\cdot\cdot 1}+T^{\cdot 2}_{\cdot\cdot 2}+\cdots+T^{\cdot n}_{\cdot\cdot n}$，变成一个 0 阶张量即标量，另外，例如在三维空间的平面方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=p$$

式中，a_i，p 是常数，这个方程可写成

$$\sum_{i=1}^{3}a_ix_i=p$$

应用求和约定，则这个方程可写成如下形式：

$$a_ix_i=p$$

求和的重复指标称为哑指标，由于哑指标只是表示求和，因此无论用哪个字母作为哑指标都是一样的，例如 a_ix_i 可以写成 a_mx_m。

注意：为了避免混淆，在同一项中，同一指标字母的使用不能超过两次。例如不能把 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\right)^2$ 写成 $a_ix^ia_ix^i$，而可写成 $a_ix^ia_jx^j$。

求和约定的引入大大地简化了公式的书写，并使推导过程清晰明了。例如，$T_{ij}=A_{ik}B_{kj}$ 就代表了下面 9 个方程：

$$T_{11}=A_{1k}B_{k1}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31}$$
$$T_{12}=A_{1k}B_{k2}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32}$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_{33}=A_{3k}B_{k3}=A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33}$$

1.1.3　克罗内克(Kronecker)符号 δ_{ij}

在三维笛卡儿正交坐标系下，单位长度的基矢量一般为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，现依次用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 替代，它们之间是互相正交的。

克罗内克符号 δ_{ij} 的定义如下：

$$\delta_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\tag{1.1}$$

这样就有

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1\\ \delta_{12}=\delta_{23}=\delta_{13}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

注意
$$\delta_{ii}=\delta_{jj}=3\text{，}\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

克罗内克符号的另一个表示形式是 δ^i_j。下面举例说明克罗内克符号的应用。

在三维空间直角坐标系中，有分量 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，采用符号记法后变为 $\mathrm{d}x_i(i=1,2,3)$，则有

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_i dx_i \tag{1.3}$$

进一步应用克罗内克符号，式(1.3)可写成

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

应当注意，上式中有二重求和，一个是遍历指标 i 的范围，一个是遍历指标 j 的范围。

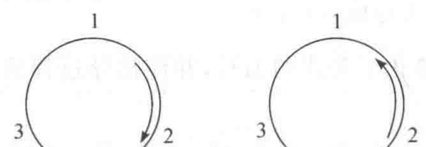
克罗内克符号还有一些明显的性质，如 $\delta_{ii} = 3$，$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$，$\delta_{ij}A_{jk} = A_{ik}$，$\delta^k_j A^j = A^k$，$\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j$，$\delta^i_j \delta^j_k = \delta^i_k$ 等。

1.1.4 置换符号 e_{ijk}

置换符号也称为里奇(Ricci)符号，它只是一个指标符号，置换符号 $e_{ijk} = e^{ijk} = (e_i, e_j, e_k)$，其具体的值定义为

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶置换}(123,231,312)\text{时} \\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇置换}(213,132,321)\text{时} \\ 0, & \text{当 } i,j,k \text{ 的任意两个指标相同时} \end{cases} \tag{1.4}$$

i,j,k 的这些排列分别叫作循环排列、逆循环排列和非循环排列。为了便于记忆以上规则，可以采用图 1.1 所示的方式记忆。



(a) (b)

图 1.1 置换符号的偶置换与奇置换

(a)顺时针，偶置换；(b)逆时针，奇置换

置换符号可以用来展开三阶行列式，令

$$a = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^2_1 a^3_2 a^1_3 + a^3_1 a^1_2 a^2_3 - a^1_1 a^3_2 a^2_3 - a^2_1 a^1_2 a^3_3 - a^3_1 a^2_2 a^1_3 \tag{1.5}$$

若以 a^i_j 表示行列式中的普遍项，以 $|a^i_j|$ 表示行列式，则式(1.5)可写成

$$a = |a^i_j| = e_{rst} a^r_1 a^s_2 a^t_3 \tag{1.6}$$

若将式(1.6)中各项的下标做一置换，例如置换为 $a^r_2 a^s_1 a^t_3 e_{rst}$，这就相当于把行列式的两列互相交换，因而行列式改变符号，等于 $-a$，再置换一次，又改变一次符号，回到 $+a$。这种性质可表示成如下形式：

$$a e_{lmn} = e_{rst} a^r_l a^s_m a^t_n \tag{1.7}$$

将式(1.6)与式(1.7)结合，则

$$|a^i_j| e_{lmn} = e_{rst} a^r_l a^s_m a^t_n \tag{1.8}$$

同理可得到

$$|a^i_j| e^{lmn} = e^{rst} a^l_r a^m_s a^n_t \tag{1.9}$$