拟内插式算子的逼近

张更生　著

科学出版社

拟内插式算子的逼近

张更生　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

算子逼近是国内外逼近论界研究的热点之一，提高算子的逼近阶是研究的主要目的. 为了获得更快的逼近速度，一开始人们针对一些著名的古典算子引入了它们的线性组合. 后来人们又给出了一个提高逼近阶的新途径，即引入了古典算子的所谓拟内插式算子，这一方法又把逼近阶提高到了一个新的高度. 本书总结了 20 世纪 90 年代以来这方面的研究成果，其内容主要包括 Bernstein 算子、Gamma 算子、Baskakov 算子、Szász-Mirakyan 算子，以及其 Durrmeyer 变形算子和 Kantorovich 变形算子等的拟内插式算子的正、逆逼近定理，逼近等价定理以及强逆不等式. 这些结果都是利用统一光滑模这一新的逼近工具得到的，涵盖了以往许多用古典光滑模得到的结论.

本书可供高等院校数学与信息科学专业研究生、教师及有关数学工作者阅读，也可供其他有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

拟内插式算子的逼近 / 张更生著. —北京: 科学出版社, 2019. 1
ISBN 978-7-03-059217-0

Ⅰ. ① 拟… Ⅱ. ① 张… Ⅲ. 线性算子-研究 Ⅳ. ① O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 244251号

责任编辑: 李 欣 李香叶 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2019 年 1 月第一次印刷 印张: 8
字数: 161 000

定价: 59.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

算子逼近是国内外逼近论界多年来研究的热点之一. 每年在许多纯粹数学和应用数学以及泛函分析、计算数学、逼近论等专业期刊上都有大量的文献发表. 美国的 Texas 州立大学、俄罗斯的 Steclov 数学研究所、德国的 Erlangen 大学数学研究所、加拿大的 Alberta 大学等都有一些知名数学家从事算子逼近论的研究. 20 世纪 50 年代, 泛函分析的方法及思想融入逼近论以及著名的 Korovkin 定理[50]的建立, 使算子逼近论得以迅速发展. 前期主要成果总结在 1972 年 DeVore 名著 *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*[10] 中. 1972 年, Berens 和 Lorentz 在 [3] 中得到关于 Bernstein 算子的逆结果, 使得有关逆定理和等价定理的研究成为算子逼近研究的热点之一. 关于连续函数空间的逼近, 早期的工作主要以古典光滑模

$$\omega^r(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_h^r f\|$$

为逼近阶的刻画工具 (其中, 有关研究 Bernstein 算子及其变形的工作请参见 [48, 49, 11, 13, 5, 77], 有关研究 Gamma 算子及其变形的工作请参见 [61, 68, 83], 有关研究 Szász-Mirakyan 算子及其变形的工作请参见 [2, 67, 81, 82], 其他情形请参见 [6, 86, 56, 57, 12, 66, 65, 76]), 虽然这一工具对最佳逼近的逼近阶、逆定理等都是很有用的, 但它对一致逼近阶的刻画和逆定理以及 L_p 空间的逼近并不理想. 为了解决这一问题, Ditzian 和 Totik 在 [18] 中引入了光滑模 (称为 Ditzian-Totik 模)

$$\omega_\varphi^r(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi}^r f\|_{L_p}.$$

利用 Ditzian-Totik 模和 K-泛函的等价性, 他们研究了 Bernstein 算子、Gamma 算子、Szász 算子、Baskakov 算子及其 Durrmeyer 变形算子和 Kantorovich 变形算子对 $L_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 空间中函数的逼近正、逆定理和带 Jacobi 权的逼近正、逆定理. 为了提高光滑模的阶, 人们引入一些著名算子的线性组合并研究了其逼近等价定理, 使光滑模的阶由 $\omega_\varphi^2(f,t)_p$ 提高到 $\omega_\varphi^{2r}(f,t)_p$. 截止到 20 世纪 80 年代, 其成果多总结在 Ditzian 和 Totik 的名著 *Moduli of Smoothness*[18] 中. 为了统一 Ditzian-Totik 光滑模和古典光滑模的结果, Ditzian 在文 [14] 中引入新的光滑模 (简称统一光滑模)

$$\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)\quad(0\leqslant\lambda\leqslant1),$$

用它研究了 Bernstein 算子的逼近正定理, 并在 [17] 中证明了此光滑模对多项式的最佳逼近也同样适用. 20 世纪 90 年代以来有关研究又集中在强逆不等式以及应用统一光滑模研究逼近等价定理, 取得了大量的成果 (其中, 有关研究 Bernstein 算子及其变形的工作请参见 [14,15,4,90,9,88,20,39,33,30,22,27,31,28,26,34,37,92,85,19], 有关研究 Szász-Mirakyan 算子及其变形的工作请参见 [52,94,21,32,55,54], 有关研究 Baskakov 算子及其变形的工作请参见 [89, 38, 51, 36], 其他情形请参见 [17, 91, 47, 16, 93, 84, 62, 7, 8, 25, 70, 60, 59]).

20 世纪 90 年代以来, 人们提出了提高光滑模阶的又一途径, 引入了一些著名算子的拟内插式 (quasi-interpolants). "拟内插式" 的概念来源于样条逼近理论. Sablonnière 在 [71, 72, 73, 74] 中首先定义了一类介于 Bernstein 算子和 Lagrange 内插投射 (interpolation projector) 之间的中间算子, 并称它们为 Bernstein 拟内插式算子, 自此以后很多研究者都把 Sablonnière 的定义应用到许多著名的线性正算子上. 那么什么叫算子的拟内插式呢? 下面给出它的定义[75].

设 $\mathcal{B}_n$ 和 $\mathcal{A}_n=\mathcal{B}_n^{-1}$ 是 Π_n 中的线性自同构 (Π_n 是次数不超过 n 的代数多项式的集合), 而且它们能够表示成如下形式的具有多项式系数的线性微分算子:

$$\mathcal{B}_n=\sum_{k=0}^{n}\beta_n^k D^k,\quad \mathcal{A}_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_n^k D^k,$$

这里 $D=d/dx$, $D^0=\mathrm{id}$. 一般来说, 如果多项式系数列 $\{\beta_n^k\}$ 和 $\{\alpha_n^k\}$ 能够计算出来, 我们就可以定义出算子 $\mathcal{B}_n$ 的拟内插式 $\mathcal{B}_n^{(r)}$ (严格地说应该称为左拟内插式):

$$\mathcal{B}_n^{(r)}=\mathcal{A}_n^{(r)}\circ\mathcal{B}_n\quad (0\leqslant r\leqslant n),$$

其中

$$\mathcal{A}_n^{(r)}=\sum_{k=0}^{r}\alpha_k^n D^k\quad (0\leqslant r\leqslant n).$$

显然地,

$$\mathcal{B}_n^{(0)}=\mathcal{B}_n,\quad \mathcal{B}_n^{(n)}=\mathrm{id},$$

进一步地, 当 $0\leqslant r\leqslant n$ 时, 对所有的 $p\in\Pi_r$ 都有 $\mathcal{B}_n^{(r)}p=p$.

因为诸如 Bernstein 算子、Szász-Mirakyan 算子、Gamma 算子、Baskakov 算子以及它们的 Durrmeyer 变形算子和 Kantorovich 变形算子都可能满足上述条件, 所以人们便可以得到这些著名算子的拟内插式算子, 它们的具体形式见各章内容.

Sablonnière 在 [72] 中证明了当 $k=1,2,3$ 时 (实际上, 当 $k=1,2$ 时, $B_n^{(k)}=B_n$), $\|B_n^{(k)}\|$ 关于 n 是一致有界的, 并提出猜想: 算子的范数序列 $\|B_n^{(k)}\|$ 对于固

定的 k 来说是关于 n 一致有界的. 基于这个猜想, 他证明了 $B_n^{(r)}$ 的收敛结果. 后来 Wu 在 [87] 中证明了这个猜想, 这是一个很重要的结论, 为以后的研究提供了重要的基础. 随后, Diallo 在 [78] 中介绍了 Szász-Mirakyan 拟内插式算子, 在 [79] 和 [80] 中分别给出了 Bernstein 拟内插式算子与 Szász-Mirakyan 拟内插式算子的逼近正定理. 1999 年, Sablonnière 在 [75] 中总结了前面的成果, 研究了 Bernstein 算子、Szász-Mirakyan 算子, 以及它们的 Durrmeyer 变形和 Kantorovich 变形算子的拟内插式的性质, 得出了一系列很有价值的结论, 为以后的研究打下了基础. 但是直到 Müller 在 [69] 中给出了 L_p 空间中 Gamma 算子的拟内插式逼近的正、逆定理以及逼近等价定理以前, 这些著名算子的逼近方法的中心问题都没有得到完全解决. 在这一方面 Müller 给出的是第一例, 但是还有大量的问题需要进一步研究, 如各种此类其余算子的逼近等价定理、同时逼近问题、带权逼近、强逆不等式等. 这些问题的研究是很有意义的. 当然这类问题的研究应该是有相当的难度, 需要一些新的工具和方法上的创新. 21 世纪初 P. Mache 和 D. H. Mache 在 [63] 中给出了 C 空间中 Bernstein 拟内插式算子的逼近的正、逆定理以及逼近等价定理, P. Mache 和 Müller 在 [64] 中给出了 Baskakov 拟内插式算子的逼近等价定理.

作者在导师郭顺生教授的指导下继续了这一方面的研究. 郭顺生教授自 20 世纪 80 年代以来一直致力于函数逼近论的研究, 早期他主要研究若干著名算子对有界变差函数逼近速度的问题, 首创应用概率论的方法解决了关于有界变差函数逼近问题, 使得这类问题得到最佳逼近阶, 目前仍有不少人沿此方向研究. 后来他和他的学生刘丽霞[25-28, 30, 54]、李翠香[21, 22, 51]、齐秋兰[32-34]、佟宏志等[31, 36-39, 55] 在 20 世纪 90 年代以后应用统一光滑模做了大量有关逼近等价定理和强逆不等式方面的研究, 取得了大量研究成果, 创造了有自己特色的方法, 积累了丰富的经验. 这些成果达到了国际先进水平, 得到国内外同行的认可和赞扬. 作者在这些研究基础上, 在郭顺生的指导下研究了一些著名算子的拟内插式的逼近等价定理与强逆不等式, 将过去的方法经验和现在的具体算子相结合, 得到了一系列的结论, 刘丽霞、齐秋兰、刘国芬等于作者工作的前后在这一方面也做了相应的工作, 本书把这些结果中的大部分整合在一起, 力争使得读者对此问题有一个比较全面的了解.

第 1 章介绍了一些概念和已有的结论, 是全书的预备知识. 第 2 章至第 7 章用统一光滑模做工具证明了几个古典算子的拟内插式算子的逼近正、逆定理和等价定理.

第 2 章讨论了 C 空间中 Bernstein 拟内插式算子的逼近正、逆定理以及等价定理[43], 这一结论包含了 [63, 79] 中的结果.

第 3 章于 L_∞ 空间推广了 [69] 中的结论, 用统一光滑模做工具得到了 L_∞ 空

间中 Gamma 算子的拟内插式的带权逼近正、逆定理以及等价定理[46].

第 4 章给出了 Baskakov 拟内插式算子的点态逼近等价定理. 这一结果推广了 [64] 中的结果[35]. 对于这一算子, 本书只给出了其原算子的拟内插式算子的一类逼近结果, 算是抛砖引玉吧.

第 5 章得到了 C 空间中 Szász-Mirakyan 算子的拟内插式逼近正、逆定理以及等价定理[42], 这一结论包含了 [80] 中的结果.

第 6 章得到了 C 空间中 Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子的逼近正、逆定理[45].

第 7 章实际上解决了两个问题[44], 一是用统一光滑模研究了 C 空间中 Szász-Mirakyan Kantorovich 拟内插式算子, 得到了逼近等价定理. 二是用 Ditzian-Totik 模做工具研究了 L_p 空间中 Szász-Mirakyan Kantorovich 拟内插式算子的逼近等价定理, 对于这个问题给出了较为完美的解决.

强逆不等式在算子逼近论中是一个很重要的问题. 在文献 [8,16] 中研究了几种算子的强逆不等式, 但是这些结论都是用二阶光滑模 $\omega_{\varphi}^{2}(f,t)_{p}$. 第 8 章到第 11 章利用高阶光滑模得到了几个算子的拟内插式算子的 B 型强逆不等式. 这些结果是很有意义的. 我们没有得到 A 型强逆不等式. 我们猜想即使有, 证明可能也是很困难的.

第 8 章首次利用高阶光滑模得到了 Bernstein 拟内插式算子的 B 型强逆不等式[40], 推广了 [16] 中的结果.

第 9 章中得到了 Gamma 算子的拟内插式的 B 型强逆不等式[29].

第 10 章也是利用高阶光滑模得到了 Bernstein-Kantorovich 变形的拟内插式算子的强逆不等式[23].

第 11 章给出了 Bernstein-Durrmeyer 变形的拟内插式算子的强逆不等式[24].

最后, 我要由衷地感谢我的导师郭顺生教授. 多年来, 郭老师对于我的成长和进步始终给予热情的鼓励和支持. 同时, 我也感谢我的同事李翠香、刘丽霞、齐秋兰、刘国芬老师, 他们出色的工作是本书的重要组成部分. 河北师范大学对本书的出版给予了经费支持, 科学出版社的编辑给予了大力的帮助, 在此, 我们一并表示感谢.

限于作者的水平, 书中疏漏之处在所难免, 欢迎读者批评指正.

张更生

2018 年 1 月

目　　录

第 1 章　预备知识 ···· **1**

1.1　符号与概念 ···· 1

1.2　已有的主要结论 ···· 3

第 2 章　Bernstein 拟内插式算子的点态逼近 ···· **9**

2.1　正定理 ···· 9

2.2　逆定理与等价定理 ···· 12

第 3 章　Gamma 拟内插式算子的点态带权逼近 ···· **18**

3.1　$G_n^{(k)}(f,x)$ 的某些性质 ···· 18

3.2　正定理 ···· 21

3.3　逆定理 ···· 24

第 4 章　Baskakov 拟内插式算子的点态逼近 ···· **28**

4.1　正定理 ···· 28

4.2　逆定理 ···· 33

第 5 章　Szász-Mirakyan 拟内插式算子的点态逼近等价定理 ···· **38**

5.1　正定理 ···· 38

5.2　逆定理 ···· 42

第 6 章　Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子的逼近 ···· **49**

6.1　M_nf 和 $M_n^{(2r-1)}f$ 的某些性质 ···· 49

6.2　正定理 ···· 50

6.3　逆定理 ···· 57

第 7 章　Szász-Mirakyan Kantorovich 拟内插式算子的逼近等价定理 ······ 64
7.1 正定理 ······ 64
7.2 逆定理 ······ 71

第 8 章　Bernstein 拟内插式算子的强逆不等式 ······ 82
8.1 预备引理 ······ 82
8.2 主要定理的证明 ······ 87

第 9 章　Gamma 拟内插式算子的强逆不等式 ······ 90
9.1 预备引理 ······ 90
9.2 主要定理的证明 ······ 93

第 10 章　Bernstein-Kantorovich 拟内插式算子的强逆不等式 ······ 96
10.1 预备引理 ······ 96
10.2 主要定理的证明 ······ 103

第 11 章　Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子的强逆不等式 ······ 106
11.1 预备引理 ······ 106
11.2 主要定理的证明 ······ 110

参考文献 ······ 114

索引 ······ 119

第 1 章　预备知识

1.1　符号与概念

这一节介绍一些本书中用到的具有共性的符号与概念, 避免每一章中重复叙述. 下面介绍一下本书中所涉及的七个著名的古典算子[18].

1. Bernstein 算子

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x), \quad p_{n,k}(x)=\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

这里 $x\in[0,1]$, $f\in C[0,1]$.

2. Bernstein-Durrmeyer 算子

$$M_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t)f(t)dt,$$

这里 $x\in[0,1]$, $f\in L_p[0,1]$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 其中 $L_\infty[0,1]$ 表示 $C[0,1]$, 下同.

3. Bernstein-Kantorovich 算子

$$K_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,$$

这里 $x\in[0,1]$, $f\in L_p[0,1]$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

4. Szász-Mirakyan 算子

$$S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad s_{n,k}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},$$

这里 $x\in I=:[0,\infty)$, $f\in C_B(I)$ ($C_B(I)$ 表示在 I 上连续有界函数的集合).

5. Szász-Mirakyan Kantorovich 算子

$$U_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt,$$

这里 $x\in I$, $f\in L_p(I)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

6. Gamma 算子

$$
\begin{aligned}
G_n(f,x) &= \int_0^\infty g_n(x,t) f\left(\frac{n}{t}\right) dt, \quad x \in I, \\
g_n(x,t) &= \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xt} t^n,
\end{aligned} \tag{1.1.1}
$$

这里 $f \in L_p(I)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 这个算子还有另一种表示方法[61]

$$
G_n(f,x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n f\left(\frac{nx}{t}\right) dt, \quad x \in I. \tag{1.1.2}
$$

7. Baskakov 算子

$$
V_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x), \quad x \geqslant 0,
$$

这里 $p_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$.

对于这些算子我们都可以按照前言所介绍的定义得到它们的拟内插式算子, 以后用 $\mathcal{B}_n^{(r)}$ 来泛指上述七种算子的拟内插式算子, 而用 $B_n^{(k)}(f,x)$, $M_n^{(k)}(f,x)$, $K_n^{(k)}(f,x)$, $S_n^{(k)}(f,x)$, $U_n^{(k)}(f,x)$, $G_n^{(k)}(f,x)$, $V_n^{(k)}(f,x)$ 分别表示 Bernstein 算子、Bernstein-Durrmeyer 算子、Bernstein-Kantorovich 算子、Szász-Mirakyan 算子、Szász-Mirakyan-Kantorovich 算子、Gamma 算子、Baskakov 算子的拟内插式算子. 用 $\{\alpha_n^k\}$ 表示除了 $K_n^{(k)}(f,x)$, $U_n^{(k)}(f,x)$ 以外这些算子的拟内插式中的多项式系数, 它的含义依所研究的算子而定, 而用 $\hat{\alpha}_j^n(x)$ 表示 $K_n^{(k)}(f,x)$ 的多项式系数, $\tilde{\alpha}_j^n(x)$ 表示 $U_n^{(k)}(f,x)$ 多项式系数.

本书中的所有工作都是以光滑模和与之相对应的 K-泛函为工具得到的, 对于光滑模我们在前面做了一些介绍, 现在正式给出它们的定义. 首先给出统一光滑模以及与之对应的 K-泛函的定义.

$$
\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_\infty = \sup_{0<h\leqslant t} \sup_{x \pm rh\varphi^\lambda \in I} |\Delta_{h\varphi^\lambda}^{2r} f(x)|,
$$

$$
K_{\varphi^\lambda}(f,t^{2r})_\infty = \inf_{g \in W_\infty^{2r}(\varphi^\lambda, I)} \{\|f-g\|_\infty + t^{2r} \|\varphi^{2r\lambda} g^{(2r)}\|_\infty\},
$$

$$
\overline{K}_{\varphi^\lambda}(f,t^{2r})_\infty = \inf_{g \in W_\infty^{2r}(\varphi^\lambda, I)} \{\|f-g\|_\infty + t^{2r} \|\varphi^{2r\lambda} g^{(2r)}\|_\infty + t^{\frac{2r}{1-\lambda/2}} \|g^{(2r)}\|_\infty\},
$$

其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $W_\infty^{2r}(\varphi^\lambda, I) = \{g \in C_B[0,\infty), g^{(2r-1)} \in \mathrm{A.C.}_{\cdot\mathrm{loc}}, \|g^{(2r)}\| < +\infty, \|\varphi^{2r\lambda} g^{(2r)}\| < +\infty\}$.

接下来, 给出 Ditzian-Totik 光滑模以及与之对应的 K-泛函的定义.

$$\omega_{\varphi}^{2r}(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t}\sup_{x\pm rh\varphi\in I}\|\Delta_{h\varphi}^{2r}f(x)\|_p,$$
$$K_{\varphi}(f,t^{2r})_p=\inf_{g\in W_p^{2r}(\varphi,I)}\{\|f-g\|_p+t^{2r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_p\},$$
$$\overline{K}_{\varphi}(f,t^{2r})_p=\inf_{g\in W_p^{2r}(\varphi,I)}\{\|f-g\|_p+t^{2r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_p+t^{4r}\|g^{(2r)}\|_p\},$$

其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $W_p^{2r}(\varphi,I)=\{g\in C_B[0,\infty),\ g^{(2r-1)}\in \mathrm{A.C.}_{\cdot\mathrm{loc}},\ \|g^{(2r)}\|_p<+\infty,$ $\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_p<\infty\}$.

在以上这些光滑模的定义中, 对于 Bernstein 拟内插式算子和 Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子, 取 $I=[0,1]$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$. 对于 Szász-Mirakyan 拟内插式算子、Szász-Mirakyan Kantorovich 拟内插式算子和 Baskakov 拟内插式算子, 取 $I=[0,+\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$.

下面是大家都熟知的 K-泛函与光滑模之间的关系式[18], 这些关系式在一些定理证明中起着关键作用.

$$\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_\infty\sim K_{\varphi^\lambda}(f,t^{2r})_\infty\sim\overline{K}_{\varphi^\lambda}(f,t^{2r})_\infty$$

和

$$\omega_{\varphi}^{2r}(f,t)_p\sim K_{\varphi}(f,t^{2r})_p\sim\overline{K}_{\varphi}(f,t^{2r})_p.$$

对于 Gamma 拟内插式算子所涉及的光滑模和 K-泛函与上面的稍有不同, 我们将在第 3 章中介绍.

最后我们规定用 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_\infty$, 用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 表示 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_\infty$, C 表示与 x 和 n 无关的正常数, 而且在不同的地方可以是不同的数.

1.2 已有的主要结论

1. 对于 Bernstein 拟内插式算子

$$B_n^{(k)}(f,x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n(x)\big(D^j\circ B_n\big)(f,x)=:\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n(x)B_{n,j}(f,x),$$

Sablonnière 在 [75] 中给出了 $\alpha_j^n(x)$ 的递推公式

$$\alpha_0^n(x)=1,\quad \alpha_1^n(x)=0,$$
$$(k+1)(n-k)\alpha_{k+1}^n(x)=k(2x-1)\alpha_k^n(x)-\varphi^2(x)\alpha_{k-1}^n(x).$$

P. Mache 和 D. H. Mache 在 [63] 中计算了 $\alpha_j^n(x)$, 并且给出了下面两个表达式:

$$\alpha_j^n(x)=\sum_{r=0}^{j}(-1)^{j-r}\frac{(-nx)_r}{(-n)_r r!(j-r)!}x^{j-r},$$

这中间 $(a)_k =: \prod_{j-1}^{k}(a+j-1), (a)_0 =: 1(a\neq 0)$.

$$\begin{aligned}\alpha_j^n(x)=&(1-2x)^{d(j)}\left(c_{j-1}^n\frac{\varphi^2(x)}{n^{j-1}}+c_{j-2}^n\frac{\varphi^4(x)}{n^{j-2}}\right.\\&\left.+\cdots+c_{\left[\frac{j+1}{2}\right]}^n\frac{\varphi^{2\left(i-\left[\frac{j+1}{2}\right]\right)}(x)}{n^{\left[\frac{j+1}{2}\right]}}\right),\end{aligned}$$

这中间 $j\geqslant 1, d(2m)=0, d(2m+1)=1$, 系数 c_{j-k}^n 关于 n 一致有界且与 x 无关. 这些表达式是十分重要的. 依据它们 P. Mache 和 D. H. Mache 在 [63] 中证明了一系列不等式, 进而得到了下面的等价定理(其中正定理是 Diallo 在 [79] 中证明的).

定理 A′ 设 $f\in C[0,1], \varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}, n\geqslant 2r-1, r\in N$. 那么对于 $0<\alpha<r$, 以下两个命题等价:

(i) $\|B_n^{(2r-1)}f-f\|_\infty=O\big(n^{-\alpha}\big)$.

(ii) $\omega_\varphi^{2r}(f,t)_\infty=O\big(t^{2\alpha}\big)$. (1.2.1)

第 2 章用统一光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 扩展了上面的结果, 得到了等价定理、点态逼近等价定理. 这一结果发表于 [43].

定理 A 对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1, 0<\alpha<2r$, 有下面的两个命题等价:

(i) $|B_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)|=O\left(\left(\dfrac{\delta_n^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\alpha\right)$.

(ii) $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O\big(t^{2\alpha}\big)$, (1.2.2)

其中 $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}, \delta_n(x)=\max\left\{\varphi(x),\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}\sim\varphi(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

明显地, (1.2.1) 是 (1.2.2) 当 $\lambda=1$ 时的情形.

2. 在 [69] 中, Müller 讨论了 Gamma 拟内插式算子

$$G_n^{(k)}(f,x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n(x)D^jG_n(f,x),\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

的性质, 并给出了其逼近等价定理.

定理 B′ 对于 $f\in L_p[0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\varphi(x)=x$, $n\geqslant 4r$, $r\in N$, $0<\alpha<r$, 有

$$\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_p=O(n^{-\alpha})\quad \text{当且仅当}\quad \omega_\varphi^{2r}(f,t)_p=O(t^{2\alpha}). \tag{1.2.3}$$

第 3 章用统一光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_w$ (这里 $w(x)=x^a(1+x)^b$, $a\geqslant 0$, b 任意的) 证明了 L_∞ 空间中 $G_n^{(2r-1)}(f,x)$ 的带权逼近问题, 主要结果如下[46].

定理 B 对于 $f\in L_\infty[0,\infty)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\varphi(x)=x$, $w(x)=x^a(1+x)^b$, $n\geqslant 4r$, $0<\alpha<2r$, 有下面的两个等价命题:

(i) $|w(x)\big(G_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)\big)|=O\left(\left(\dfrac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\alpha\right)$.

(ii) $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_w=O\big(t^\alpha\big)$. (1.2.4)

显然地, 在 L_∞ 空间中, 当 $\lambda=1$, $a=b=0$ 时, (1.2.4) 就是 (1.2.3).

3. 第 4 章的研究对象是 Baskakov 拟内插式算子 $V_n(k,f,x)$, 即对于$0\leqslant k\leqslant n$,

$$V_n(k,f,x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n(D^j\circ V_n)(f,x)=:\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^nV_{n,j}(f,x).$$

在 [64] 中, 证明了如下等价结果.

定理 C′ 设 $f\in C_B[0,\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)}$, $n\geqslant 2r-1$, $r\in N$, 那么, 对于 $0<\alpha<r$, 以下二者等价:

(i) $\|V_n(2r-1,f,x)-f(x)\|_\infty=O(n^{-\alpha})$.

(ii) $\omega_\varphi^{2r}(f,t)_\infty=O(t^{2\alpha})$. (1.2.5)

本章利用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 推广这个结果, 得到下面的点态逼近等价定理[35].

定理 C 对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0<\alpha<2r$,

$$|V_n(2r-1,f,x)-f(x)|=O\left(\left(\frac{\delta_n^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\alpha\right)\ \text{当且仅当}\ \omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O(t^\alpha),\tag{1.2.6}$$

这里 $\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)},\delta_n(x)=\max\left\{\varphi(x),\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}\sim\varphi(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

明显地, (1.2.5) 是 (1.2.6) 中 $\lambda=1$ 的特殊情形.

4. Szász-Mirakyan 拟内插式算子有如下的定义[80]:

$$S_n^{(r)}=A_n^{(r)}\circ S_n=\sum_{j=0}^{r}\alpha_j^n(x)D^jS_n(f,x)=:\sum_{j=0}^{r}\alpha_j^n(x)S_{n,j}(f,x),\quad 0\leqslant r\leqslant n,$$

这里, $A_n^{(r)}=\sum_{j=0}^r\alpha_j^nD^j$.

在 [80] 中, Diallo 计算了 $\alpha_j^n(x)$, 得到了如下的表达式:

$$\alpha_0^n(x)=1,\quad \alpha_1^n(x)=0,$$

$$\alpha_j^n(x)=c_{j-1}^n\frac{x}{n^{j-1}}+c_{j-2}^n\frac{x^2}{n^{j-2}}+\cdots+c_{j'}^n\frac{x^{j-j'}}{n^{j'}},\quad j\geqslant 2,\tag{1.2.7}$$

这里, $j' = \left[\left(\dfrac{j+1}{2}\right)\right]$, c_j^n 是不依赖于 n 的常数. 文献 [80] 中对于 $S_n^{(r)}$ 的一些逼近性质进行了研究.

定理 D′ 设 $f \in C_B[0,\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $n \geqslant 2r-1$, $r \in N$. 那么, 存在不依赖于 n 的常数 $C>0$ 与 f 使得下式成立:

$$\|S_n^{(2r-1)}f-f\|_\infty \leqslant C\omega_\varphi^{2r}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_\infty.$$

注意到在 [80] 中没有给出逆定理和等价定理. 第 5 章利用统一光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)$ 推广了上述结果, 得到了如下等价定理[42].

定理 D 设 $f \in C_B[0,\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $n \geqslant 4r$, $r \in N$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 那么, 对于 $0<\alpha<2r$, 下面的两个命题等价:

(i) $|S_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)| = O\left(\left(\dfrac{\delta_n^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\alpha\right)$.

(ii) $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O\left(t^{2\alpha}\right)$,

这里, $\delta_n(x)=\max\left\{\varphi(x),\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\} \sim \varphi(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

5. 第 6 章研究了 Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子

$$M_n^{(2r-1)}(f,x)=\sum_{j=0}^{2r-1}\alpha_j^n(x)D^jM_n(f,x)=:\sum_{j=0}^{2r-1}\alpha_j^n(x)M_{n,j}(f,x)$$

的逼近性质. 其主要结果是如下的逼近等价定理[45].

定理 E 如果有 $f \in C[0,1]$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$, $n \geqslant 4r, r \in N, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 以及 $0<\alpha<2r$, 下面的两个命题等价:

$$|M_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)|=O\big((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n(x))^\alpha\big),$$

$$\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O(t^\alpha),$$

其中 $\delta_n(x)=\varphi(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

对于 Bernstein-Durrmeyer 算子拟内插式的多项式系数 $\alpha_j^n(x)$, Sablonnière 在 [75] 中给出了表达式. 这个表达式较为复杂, 这给估计它及其导数增加了困难, 我们将在第 6 章中和其他性质一并介绍.

6. 第 7 章讨论了 Szász-Mirakyan Kantorovich 拟内插式算子的逼近问题, Szász-Mirakyan Kantorovich 算子拟内插式是这样定义的:

$$U_n^{(r)}=\sum_{j=0}^{r}\widetilde{\alpha}_j^n(x)(D^jU_n)(f,x)=:\sum_{j=0}^{r}\widetilde{\alpha}_j^n(x)U_{n,j}(f,x), \quad 0 \leqslant r \leqslant n, \tag{1.2.8}$$

在 [75] 中, Sablonnière 提供了 $\widetilde{\alpha}_j^n$ 和 Szász-Mirakyan 拟内插式算子中的多项式系数 $\alpha_j^n(x)$ 的关系式:

$$\widetilde{\alpha}_j^n(x)=\alpha_j^n(x)+D\alpha_{j+1}^n(x). \tag{1.2.9}$$

由 (1.2.9), 容易知道 $\widetilde{\alpha}_0^n(x)=1$, $|\widetilde{\alpha}_1^n(x)|\leqslant\dfrac{C}{n}$. 在这一部分, 利用光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_\infty$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 和 $\omega_\varphi^{2r}(f,t)_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ 证明了 Szász-Mirakyan 算子拟内插式对于函数 $f\in L_p(I)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 的正、逆定理和逼近等价定理, 主要结果如下[44].

定理 F 假定 $f\in L_p(I)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $n\geqslant4r$, $r\in N$, $0<\alpha<2r$. 那么对于 $1\leqslant p<\infty$, 有

$$\|U_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)\|_p=O\big((n^{-\frac{1}{2}})^\alpha\big)\quad 当且仅当\quad \omega_\varphi^{2r}(f,t)_p=O\big(t^\alpha\big),$$

对于 $f\in C_B[0,\infty)$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 有

$$|U_n^{(2r-1)}(f,x)-f(x)|=O\left(\left(\frac{\delta_n^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\alpha\right)\quad 当且仅当\quad \omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)_\infty=O\big(t^\alpha\big),$$

这里面 $\delta_n(x)=\max\left\{\varphi(x),\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}\sim\varphi(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

7. 第 8 章首次利用高阶光滑模得到了 Bernstein 拟内插式算子的 B 型强逆不等式. 我们证明了下面的重要结果[40].

定理 G 设 $f\in C[0,1]$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$, $n\geqslant4r$, $r\in N$. 则存在常数 k 使得对于 $l\geqslant kn$ 有

$$K_\varphi^{2r}(f,n^{-r})\leqslant C\left(\frac{l}{n}\right)^r\left(\|B_n^{(2r-1)}f-f\|+\|B_l^{(2r-1)}f-f\|\right).$$

显然地, 这一结果当 $r=1$ 时, $B_n^{(1)}(f,x)=B_n(f,x)$. 再利用 K-泛函与光滑模之间的关系就得到了如下结论: 亦即存在 $k>1$ 使得

$$\omega_\varphi^2(f,t)\leqslant C(\|B_n(f,x)-f(x)\|+\|B_{kn}(f,x)-f(x)\|),$$

这正是 [16] 中的结果.

8. 第 9 章建立了 Gamma 算子的拟内插值算子 $G_n^{(2r-1)}(f,x)$ 在 L_p 空间的 B 型 (有关强逆不等式的分类可参考 [16]) 强逆不等式[29]. 主要结果如下.

定理 H 对于 $f\in L_p(I)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 存在常数 $k>1$ 使得对于 $l\geqslant kn$, 有

$$\omega_\varphi^{2r}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p\leqslant C\left(\frac{l}{n}\right)^r(\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_p+\|G_l^{(2r-1)}f-f\|_p).$$

9. Bernstein-Kantorovich 拟内插式算子的定义为[53, 75]

$$K_n^{(r)}(f,x)=\sum_{j=0}^r\hat{\alpha}_j^n(x)D^jK_n(f,x)=:\sum_{j=0}^r\hat{\alpha}_j^n(x)K_{n,j}(f,x),$$

其中 $\hat{\alpha}_j^n(x) \in \Pi_j$ 并且[75]

$$\hat{\alpha}_j^n(x) = \alpha_j^{n+1}(x) + D\alpha_{j+1}^{n+1}(x),$$

$\hat{\alpha}_0^n(x) = 1$. 所以有

$$B_n^{(0)}(f,x) = B_n(f,x), \quad K_n^{(0)}(f,x) = K_n(f,x).$$

由文 [63, 75] 知 $B_n^{(r)}(f,x)$ 和 $K_n^{(r)}(f,x)$ 是有界线性算子, 并且对于 $p \in \Pi_r$, 有

$$B_n^{(r)}(p,x) = K_n^{(r)}(p,x) = p(x).$$

在文 [53, 63] 中已经得到了 $B_n^{(2r-1)}(f,x)$ 和 $K_n^{(2r-1)}(f,x)$ 两个算子的逼近定理. 我们这里利用高阶光滑模给出并证明了 $K_n^{(2r-1)}f$ 拟内插式算子的 B 型强逆不等式[23].

定理 I 如果 $f \in L_\infty[0,1]$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $n \geqslant 4r$, $r \in N$, 那么存在一个常数 k, 当 $l \geqslant kn$ 时, 有

$$w_\varphi^{2r}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant C\left(\frac{l}{n}\right)^r \left(\| K_n^{(2r-1)}f - f \|_\infty + \| K_l^{(2r-1)}f - f \|_\infty \right).$$

10. 第 11 章证明了 Bernstein-Durrmeyer 拟内插式算子的 B 型强逆不等式[24].

定理 J 设 $f \in L_p[0,1]$ $(1 < p \leqslant \infty)$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $n \geqslant 4r$, $r \in N$, 则存在一个常数 k 使得对于 $l \geqslant kn$, 有

$$\omega_\varphi^{2r}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p \leqslant C\left(\frac{l}{n}\right)^r (\|M_n^{(2r-1)}f - f\|_p + \|M_l^{(2r-1)}f - f\|_p).$$

我们知道, 在算子逼近中用高阶光滑模控制的强逆不等式还为数不多, 所以说这些结果是有意义的.