何家竣 编著

高中数学

解题方法导引

- 数学专题 63
- 典型例题 293
- 方法引导 201
- 相关链接 56

上海大学出版社

何家竣 编著

高中数学解题方法导引

- 数学专题 63
- 典型例题 293
- 方法引导 201
- 相关链接 56

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法导引/何家竣编著. —上海：上海大学出版社，2017. 4

ISBN 978—7—5671—2716—6

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①何…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料　Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 063119 号

责任编辑　丁　译
封面设计　施羲雯
技术编辑　金　鑫
　　　　　章　斐

高中数学解题方法导引
何家竣　编著
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路 99 号　邮政编码 200444)
(http://www. press. shu. edu. cn　发行热线 021—66135112)
出版人:戴骏豪
*
江苏句容排印厂印刷　各地新华书店经销
开本 890×1240　1/32　印张 10　字数 298 000
2017 年 5 月第 1 版　2017 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978—7—5671—2716—6/G・2485　定价:32. 00 元

前　言

与初中数学相比，高中数学无论是系统性，还是抽象性，都有了质的飞跃. 高考数学不仅要求学生具有熟练的运算能力，更是对学生全面的数学能力与素质的考查.

笔者原为大学教师，近十年来都在高考数学的教学与辅导的第一线，根据自己多年来对高考数学试题的分析研究与总结，针对高中数学中的一些典型问题，及其在高考数学考题中所体现的主流倾向，逐渐编撰了该书，并作为每届高考学生的辅导用书，深得同学们的好评，也收到了良好的效果. 本书有别于普遍的一些习题汇编的复习用书，以下几个方面有其独到之处.

(1) 精选习题，变式拓展，关联研究. 作为高考数学系统复习用书，本书的选题基本上涵盖了高考数学的主要知识点，均为具有代表性及具有较高思维价值的高考试题、模拟题等. 对某些习题笔者进行了变式、拓广，也有些习题是将原题与变式题合并，或几个关联题合并以形成一个小研究专题，还有一些是笔者针对高考方向的原创题. 因此，本书一般不收录普遍参考书上都有的普通习题，大部分习题具有一定的难度，有一定的综合性、思维性、技巧性、研究性.

(2) 巧排体例，注重方法，思想关联. 与普通的习题汇编不同，本书所编习题大部分章节，并不是普遍的教科书式的单个知识点的罗列，而是以思想性及解题方法为主线，配之以相关题型变化而展开. 特别注重并充分阐述各种解题方法对各种题型变化的对照研究. 对重要章节，如函数、数列、圆锥曲线，务求题型与解题方法详尽. 例如在第八章圆锥曲线，各种参考书均将三大曲线分开论述，这样就割裂了三大曲线的共性处理，本书以常用的方法及常见的问题这两大方面来统一处理三大曲线，更能让读者领悟各种解题方法在各种曲线上的异同.

(3) 注意通法，精研多法，轻巧解题. 现今高考数学教学，解题的主导思想是注重通法，忽视巧解. 注重通法本无可厚非，但一味追求通法，

往往将数学解题导入另一类的八股，使解题过程冗长、计算呆板、繁杂乏味. 长此下去，往往会抹杀了许多学子的数学天赋，使人望题生厌而失去对数学的兴趣，这完全有悖素质教育理念. 数学解题的本质是无限追求简洁优美又富有灵感的解法，更何况，大多高考压轴大题一味用通法则繁复而无法解决. 因此，本书在论述解题思想与方法上，在充分注意通法的前提下，刻意展示一题多解性，充分论述各种解法在各种题型的变化上的优势与局限，很多考题的解法，加入了笔者多年的解题思考，并博采众长. 许多新颖、简明优美而让人耳目一新的解法与数学思想在同类的高考数学习题集中是比较少见的.

(4) 解法严谨，释理明晰，深入浅出. 本书的习题虽然大多有一定的难度，但笔者在解法上加入了许多导引、注解，并注重解后思考. 因此，本书非常适宜自学，具有中等程度的备考学子均能流畅阅读.

承蒙上海大学的山石教授仔细审阅了全书，并提出了许多建议，在此感谢！

上海大学出版社编辑黄晓彦老师提出了许多指导性的建议，并为本书的出版做了大量的工作，在此感谢！

限于笔者的水平，本书肯定有诸多谬误，敬请读者不吝赐教斧正.

何家竣

2017 年 3 月于上海

目　　录

第一章　集　　合

集合是数学中的一个重要概念，它确立了其在现代数学理论体系中的基础地位.可以说，现代数学各个分支的几乎所有成果都构筑在严格的集合理论上.也即理解数学，从理解集合开始.高中数学一开始就引入集合的概念，标志着抽象严格的数学形式语言与初中数学的描述性表示的一个分水岭.因此，要顺利解决集合问题，首先必须用自己的语言正确“翻译”当前的集合定义，搞清是哪类元素依据何种性质而引成一集.

【专题 1. 空集问题】

【例 1】 设 m,n 为正整数，集合 $A=\{1,2,\cdots,m\}$，$B=\{1,2,\cdots,n\}$，则在 A 的子集中，满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的子集 C 有________个.

【解】 若 $m\leqslant n$，则 A 的子集都是 B 的子集，其中只有 $\varnothing$ 使 $B\cap\varnothing=\varnothing$，故 A 中满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的子集 C 共有 2^m-1 个；

若 $m>n$，设 $D=\{n+1,n+2,\cdots,m\}$，则 D 的子集也是 A 的子集，且 A 的子集中，只有 D 有子集与 B 不相交.D 有 $m-n$ 个元素，故有 2^{m-n} 个子集，满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的子集共有 2^m-2^{m-n} 个.综上，满足题意的子集 C 的个数是

$$\begin{cases}2^m-1, & m\leqslant n,\\ 2^m-2^{m-n}, & m>n.\end{cases}$$

【例 2】 集 $A=\{x\mid 2a<x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$，若 $B\cap A=B$ 且 $B\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是________.

【解】 按题意 $\begin{cases}3a+1\geqslant 2,\\ 2a<4,\\ 2a<2,\\ 3a+1\leqslant 4,\end{cases}$

得$\frac{1}{3}\leqslant a<1$.

【方法导引 1】 在数轴上画图时要注意区间端点的黑空点，以利考虑等号是否成立. 另，如本题去掉条件 $B\neq\varnothing$，则需讨论当 $B=\varnothing$时，即 $3a+1<2$，得 $a<\frac{1}{3}$；当 $B\neq\varnothing$时，得$\frac{1}{3}\leqslant a<1$，总之，$a<1$.

【方法导引 2】 (1) $\varnothing$是任意一个集合的子集. 即若 $B\cap A=B$，当 $B\neq\varnothing$时，$A\neq\varnothing$；当 $B=\varnothing$时，A 可空可不空.

(2) $\varnothing$是任意一个非空集合的真子集. 即若 $B\cap A=B$ 且 $B\neq A$，此时 B 无论是否是$\varnothing$，均有 $A\neq\varnothing$. 忽视空集的讨论，是解答集合习题中的一种最常见的错误，应引起高度重视.

【例 3】 若关于 x 的方程 $x^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}+a=0$ 的解集只有一个子集，则 a 的范围是________.

【解】 方程化为$(x-1)^2+\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+a-2=0$，解集只有一个子集，即方程无解，当且仅当 $a>2$.

【方法导引】 如将方程化为$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2+a-3=0$，从而得 $a>3$，这种解法错误. 因为 $x+\frac{1}{x}-1>0$ 恒成立. 事实上，此时因 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 或$\leqslant -2$，故$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2\geqslant 1$，即 $a-3>-1$，得 $a>2$.

同样对此方程也不能令 $\Delta=-4(a-3)<0$，由此得到 $a>3$. 这是因为令 $t=x+\frac{1}{x}-1$ 时，t 的值域非 $\mathbf{R}$，不能光用 Δ 来判定.

本质上，关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 无解的实数 a 的取值范围就是函数 $f(x)$的值域在 $\mathbf{R}$ 上的补集.

例如方程 $x^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^2-2}+\log_2 x-a=0$ 的解集只有一个子集. 此时，由函数在 $x\in[\sqrt{2},+\infty)$ 单调递增，可求出其 $f(x)$

值域,a 的取值范围就是函数的值域在 $\mathbf{R}$ 上的补集.而对于关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解的 a 的取值范围就是函数 $f(x)$ 的值域.

【例 4】 集 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$,$B=\left\{y\,\middle|\, y=\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}\right\}$,则使 $B\cap A=B$ 成立的 a 的取值范围是________.

【解】 若按常规思路,应先求出集 B 是函数的值域,再由包含关系求得 a 的范围.但这样先求函数的值域较不易,可作如下转化:$y=f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$的定义域为 $\mathbf{R}$,由 $A=(-3,2)$ 且 $B\cap A=B$,则本题等价于$-3<\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$ 对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,即得

$$\begin{cases} x^2+ax-2>-3(x^2-x+1), & \text{对所有的 } x\in\mathbf{R} \text{ 恒成立},\\ x^2+ax-2<2(x^2-x+1), & \text{对所有的 } x\in\mathbf{R} \text{ 恒成立},\end{cases}$$

得$\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, & \text{对所有的 } x\in\mathbf{R} \text{ 恒成立},\\ 4x^2+(a-3)x+1>0, & \text{对所有的 } x\in\mathbf{R} \text{ 恒成立},\end{cases}$

故有$\begin{cases} \Delta_1=(a-3)^2-16<0,\\ \Delta_2=(a+2)^2-16<0,\end{cases}$

得$-1<a<2$.

【方法导引】 若定义域为非 $\mathbf{R}$,此时应化为在该定义域上恒成立,则化为讨论在该定义域上的最值.另外,对应的另一个问题为集 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$,$B=\{x\mid f(x)=x^2+(a+2)x+a^2>3\}$,求使 $B\cap A=B$ 成立的 a 的取值范围.这将会应用到二次方程根的分布问题,我们将在第二章中总结给出,参见第二章例 67.

【例 5】 函数 $f(x)=x^2+bx+c$,集 $A=\{x\mid f(x)=x\}$,集 $B=\{x\mid f(x-1)=x+1\}$,若 $A=\{2\}$,则集 $B=$________.

【解】 由 $f(x)=x$,得 $x^2+(b-1)x+c=0$.又 $A=\{2\}$,故方程应为$(x-2)^2=0$,得 $c=4,b=-3$,故 $f(x)=x^2-3x+4$.由 $f(x-1)=x+1$,即 $x^2-6x+7=0$,得 $x=3\pm\sqrt{2}$,故 $B=\{3+\sqrt{2},3-\sqrt{2}\}$.

【方法导引】 用自己的语言正确翻译 $A=\{2\}$,就意味着方程 $f(x)$

$=x$ 有等根 2，而不是仅仅理解为 2 是该方程的根.

【例 6】 在$\triangle ABC$中，(1)$A>30^\circ$是$\sin A>\frac{1}{2}$的________条件；(2)$A>B$是$\sin A>\sin B$的________条件.

【解】 (1) 若$\sin A>\frac{1}{2}$，则$30^\circ<A<150^\circ$. 而若$A>30^\circ$，如$A=175^\circ$，则$\sin A<\frac{1}{2}$，故是必要非充分条件.

(2) 在$\triangle ABC$中，$A>B$，当且仅当$a>b$，当且仅当$\frac{a}{2\mathrm{R}}>\frac{b}{2\mathrm{R}}$，当且仅当$\sin A>\sin B$，故为充要条件.

【相关链接】 (1) 当$A,B\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，$A>B$是$\sin A>\sin B$的________条件.

(2) 当A,B均为第一象限的角，则$A>B$是$\sin A>\sin B$的________条件.

【解】 (1) 充要条件. 因为此时函数$\sin x$单调递增.

(2) 非充分非必要. 如$390^\circ>60^\circ$，但$\sin 390^\circ<\sin 60^\circ$；同样，$\sin 60^\circ>\sin 390^\circ$，但$60^\circ<390^\circ$.

【例 7】 设集$A=\{x\,|\,x^2+(2m-3)x-3m=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+(m-3)x-m=0\}$，若集合$A\cup B$是一个三元实数集合，则$A\cup B=$________.

【解】 由A中的方程$x^2+(2m-3)x-3m=0$的$\Delta=4m^2+9>0$，由B中的方程$x^2+(m-3)x-m=0$的$\Delta=m^2-2m+9>0$，可知A,B均为二元集，而$A\cup B$是一个三元集合，则两方程有公共解，设之为a，则

$$\begin{cases}a^2+(2m-3)a-3m=0,\\ a^2+(m-3)a-m=0,\end{cases}$$

两式相减得$m(a-2)=0$，即$m=0$或$a=2$. 若$m=0$，则$A=B$，$A\cup B$不会是一个三元集合，相矛盾，则$a=2$，代回前式，得$m=2$，故$A\cup B=\{-3,-1,2\}$.

【方法导引】 如果集A和B中的二次方程的Δ非恒大于零，则需

引起讨论.

【例 8】 集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$,集 $B=\{(x,y)|2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则实数 m 的取值范围是________.

【解】 当 $m\leqslant 0$ 时,集合 A 是以 $(2,0)$ 为圆心,以 $|m|$ 为半径的圆,集合 B 是在两条平行线之间,由 $\frac{2-2m-1}{\sqrt{2}}+m=(1-\sqrt{2})m+\frac{1}{\sqrt{2}}>0$,又因 $A\cap B\neq\varnothing$,则此时无解;

当 $m>0$ 时,首先由 $A\neq\varnothing$,得 $m\geqslant\frac{1}{2}$;

当 $m=\frac{1}{2}$ 时,集 A 为圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{1}{4}$,集 B 为 $1\leqslant x+y\leqslant 2$,显然满足 $A\cap B\neq\varnothing$;

当 $m>\frac{1}{2}$ 时,集合 A 是以 $(2,0)$ 为圆心,以 $\sqrt{\frac{m}{2}}$ 和 $|m|$ 为半径的圆环,而集合 B 是在两条平行线之间,必有

$$\begin{cases}m>\frac{1}{2},\\ \frac{|2-2m|}{\sqrt{2}}\leqslant m,\end{cases}\cup\begin{cases}m>\frac{1}{2},\\ \frac{|2-2m|}{\sqrt{2}}>m,\\ \frac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}\leqslant m,\end{cases}$$

解得 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}+2$.

【例 9】 对实数 $p>0$,设集合 $S_p=\{\theta|f(x)=\cos[p(x+\theta)]$ 是奇函数$\}$,若对任意实数 a,$S_p\cap[a,a+1]$ 的元素都不超过两个,则实数 p 的取值范围为________.

【解】 $\cos[p(x+\theta)]$ 是奇函数,则 $p\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $\theta_k=\frac{k\pi}{p}+$

$\frac{\pi}{2p}$,故$|\theta_k-\theta_{k-1}|=\left|\frac{\pi}{p}\right|\geqslant 1$,又由 $p>0$,故得 $0<p\leqslant\pi$.

【例 10】 若两个复数集 $A=\{z\,|\,|z-2|\leqslant 2\}$,$B=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{z_1 \mathrm{i}}{2}+b,\right.$ $\left.z_1\in A,b\in\mathbf{R}\right\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,b 的取值范围是________.

【解】 由 B 集中 $z=\frac{z_1\mathrm{i}}{2}+b$,得 $z_1=-2(z-b)\mathrm{i}$,而由 $z_1\in A$,则$|z_1-2|\leqslant 2$,得$|-2(z-b)\mathrm{i}-2|\leqslant 2$,即$|\mathrm{i}|\cdot|-(z-b)\mathrm{i}-1|\leqslant 1$,故得$|z-(b+\mathrm{i})|\leqslant 1$,即 $B=\{z\,|\,|z-(b+\mathrm{i})|\leqslant 1,b\in\mathbf{R}\}$,要使 $A\cap B=\varnothing$,即两圆$|z-2|=2$ 与$|z-(b+\mathrm{i})|=1$ 外离,故得 $b<2-2\sqrt{2}$或 $b>2+2\sqrt{2}$.

【方法导引】 本题解法的思想实质就是解析几何中的代入轨迹法,利用复数,我们实行了整体代入,而常规解法思想也是如此,利用 B 集中的两复数 $z(x,y)$与 $z_1(x_1,y_1)$对应关系,分别解出 x_1 和 y_1,然后代入 A 集的轨迹方程即可.

【例 11】 已知命题"若 $f(x)=m^2x^2$,$g(x)=mx^2-2m$,则集$\left\{x\,\middle|\,f(x)<g(x),x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}=\varnothing$"是假命题,则实数 m 的取值范围是________.

【解】 该命题为假命题,意味着不等式 $f(x)<g(x)$在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$上有解. 由 $m^2x^2<mx^2-2m$,得 $m(m-1)x^2<-2m$.

首先 $m\neq 0$,当 $m\geqslant 1$ 时,得$(m-1)x^2<-2$,不合;

当 $0<m<1$ 时,得 $x^2>\frac{2}{1-m}$,要使在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$上有解,则需$\sqrt{\frac{2}{1-m}}<1$,得 $m<-1$,不合;

当 $m<0$ 时,得 $x^2<\frac{2}{1-m}$,此时只需$\sqrt{\frac{2}{1-m}}>\frac{1}{2}$,得 $m>-7$.

综上，$m\in(-7,0)$.

【例 12】 设集 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集，且满足对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$（$i\neq j$，$i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\}$），都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,y\}$ 表示 x,y 两个数中的较小者），则 k 的最大值为________.

【解】 集 M 的含两个元素的子集共有 $C_6^2=15$ 个，从中排除使得 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}=\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$ 的即可. 由于

$\{1,2\}$，$\{2,4\}$，$\{3,6\}$ 满足 $\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right\}=\min\left\{\frac{2}{4},\frac{4}{2}\right\}=\min\left\{\frac{3}{6},\frac{6}{3}\right\}=\frac{1}{2}$；

$\{2,3\}$，$\{4,6\}$ 满足 $\min\left\{\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right\}=\min\left\{\frac{6}{4},\frac{4}{6}\right\}=\frac{2}{3}$；

$\{1,3\}$，$\{2,6\}$ 满足 $\min\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{1}\right\}=\min\left\{\frac{2}{6},\frac{6}{2}\right\}=\frac{1}{3}$，

故 k 的最大值为 $15-2-1-1=11$.

【专题 2. 一类函数值域为 R 的概念】

【例 13】 若 $c>0$，设 P：$c^x>1$ 的解集是 $\{x\mid x<0\}$；Q：函数 $y=\lg(2cx^2+2x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求使命题“P 且 Q”为假而命题“P 或 Q”为真的 c 的取值范围为________.

【解】 P 正确 $0<c<1$；要使 Q 正确，$f(x)=2cx^2+2x+1$，应与 x 轴有交点，令 $\Delta=4-8c\geqslant0$，得 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$（$c>0$，保证了定义域存在）.

由命题“P 且 Q”为假而命题“P 或 Q”为真，则 P 与 Q 有且仅有一个是正确的. 若 P 真且 Q 假，则 $\frac{1}{2}<c<1$；若 Q 真且 P 假，则 $c\in\varnothing$.

综上所述 $\frac{1}{2}<c<1$.

【方法导引】 对于此类函数，应正确区分使其定义域为 $\mathbf{R}$ 和使其

值域为 $\mathbf{R}$ 的所蕴含的不同的概念. 使其定义域为 $\mathbf{R}$，即意味着函数在 $\mathbf{R}$ 上恒有意义；而若要求使其值域为 $\mathbf{R}$，此时没有要求（其实也不能要求）其定义域为 $\mathbf{R}$. 参见第二章例 1.

【相关链接】 函数 $f(x)=\log_{(a+2)}[ax^2+(a+2)x+a+2]$ 有最大值或最小值，求 a 的取值范围.

【解】 要使该函数存在最大值或最小值，由本例可知，有以下两种情况：

(1) $\begin{cases} a<0, \\ a+2>0, \\ a+2\neq 1, \\ \Delta>0, \end{cases}$

得 $a\in(-2,-1)\cup(-1,0)$；

(2) $\begin{cases} a>0, \\ a+2>0, \\ a+2\neq 1, \\ \Delta<0, \end{cases}$

得 $a>\dfrac{2}{3}$.

综上 $a\in(-2,-1)\cup(-1,0)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

【专题 3. 定义在离散集上的和的求法】

【例 14】 (1) 对集合定义一个唯一确定的"交替和"如下：按照递减次序重新排列该子集中的元素，然后从最大数开始交替减、加后合计所得的数. 如 $\{1,2,4,6\}$，其"交替和"就是 $6-4+2-1=3$，则 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集的"交替和"的总和为________.

(2) 设集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，若 $B\cap A=B$ 且 $B\neq\varnothing$，记 $G(B)$ 为集 B 中元素的最大值与最小值之和，则对所有的集合 B，$G(B)$ 的平均值为________.

【解】 (1) $A=\{1,2,\cdots,n\}$，其中含有 n 的子集有 2^{n-1} 个，不含有 n 的子集也有 2^{n-1} 个，现把这两类集合之间建立一种一一对应的关系：

对于一个不含有 n 的 A 的子集 P，若它的"交替和"为 k，则 $P\cup\{n\}$的"交替和"必为 $n-k$，这一对集合的"交替和"之和为 $k+n-k=n$，而这样成对的集合共有 2^{n-1} 对，故所求总和为 $n2^{n-1}$.

(2) 元素 1 与 n 在所有子集中各出现 2^{n-1} 次，这一对总和为 $(n+1)2^{n-1}$.

元素 2 与 $n-1$ 这一对要作为最大值与最小值，则它们各属的子集应分别不含有 1 与 n，故它们在所有子集中出现的情况均是 $C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{n-2}^{n-2}=2^{n-2}$，故这一对总和为 $(n+1)2^{n-2}$.

依次类推，故对所有的集合 B，$G(B)$的总和为 $(n+1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^0)=(n+1)(2^n-1)$，而 n 元非空集合共有非空子集为 2^n-1 个，故 $G(B)$的平均值为 $(n+1)\dfrac{2^n-1}{2^n-1}=n+1$.

【相关链接】 若集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，定义这个集的"复合乘幂和"：$a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{i}^2+\cdots+a_n\mathrm{i}^n$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，设 S_n 表示集$\{1,2,\cdots,n\}$的所有非空子集的"复合乘幂和"的总和. 已知 $S_8=-176-64\mathrm{i}$，$S_9=p+q\mathrm{i}$，$p,q\in\mathbf{Z}$，则$|p|+|q|=$________.

【解】 设集 $A=\{1,2,\cdots,9\}$，由题意 A 的所有不包含元素 9 的非空子集的复合乘幂总和为 S_8，而对于包含元素 9 的 A 的子集 B，记 B 中元素个数为 $k+1$，其中 $0\leqslant k\leqslant 8$，此时所有 A 的包含元素 9 的 $k+1$ 元子集的复合乘幂和为 $T_k+9\mathrm{i}^{k+1}C_8^k$，其中 T_k 为集$\{1,2,\cdots,8\}$的所有 k 元子集的复合乘幂和，于是 A 的所有包含元素 9 的非空子集的复合乘幂和应为

$$\sum_{k=0}^{8}(T_k+9\mathrm{i}^{k+1}C_8^k)=S_8+9\mathrm{i}\sum_{k=0}^{8}(\mathrm{i}^kC_8^k)=S_8+9\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^8=S_8+144\mathrm{i},$$

从而 $S_9=2S_8+144\mathrm{i}=2(-176-64\mathrm{i})+144\mathrm{i}=-352+16\mathrm{i}$，故得$|p|+|q|=352+16=368$.

类似的进一步问题，参见第五章例 23.

【例 15】 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P,\\ -x, & x\in M,\end{cases}$

其中 P,M 为 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$.