概率论与数理统计

（第二版）

徐慧植　傅波　编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

概率论与数理统计

（第二版）

徐慧植　傅波　编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/徐慧植，傅波编．—2版．—北京：中国财政经济出版社，2017.12

ISBN 978－7－5095－7874－2

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①徐…②傅…　Ⅲ.①概率论②数理统计　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第286274号

责任编辑：樊　闽　　　　　　　　责任校对：杨瑞琦
封面设计：孙俪铭

内容摘要

本书根据教育部颁布的经济、管理类本科专业《经济数学》教学大纲，顺应经济数学教学改革的潮流，以培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才为宗旨，系统介绍了概率论与数理统计的主要内容和方法，包括概率论的基本概念、随机变量及其发布、多维随机变量及其发布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计和假设检验。本书注重基本概念的理解、重视理论推导、重视培养学生用概率论与数理统计的方法解决经济活动中实际问题的能力。

本书适用于高等院校经济、管理类专业的本科生，也适用于高等院校其他专业的本科生，还可作为硕士研究生入学考试参考书。

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142
营销中心电话：88191537　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京富生印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092毫米　16开　12印张　287 000字
2018年1月第2版　2018年6月北京第2次印刷
定价：32.00元
ISBN 978－7－5095－7874－2
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744
打击盗版举报热线：010－88191661　QQ：2242791300

第二版前言

本书第一版发行以来各方面反映尚好，同行也提出了一些意见和建议，我们在教学中也发现了一些值得改进的地方。在中国财政经济出版社的鼓励下，我们着手完善教材，重点在概念的叙述和解释以及结论的应用，从而更好地帮助学生能用随机观念和统计的思想去思考问题、处理问题。

第二版教材保留了第一版教材的体系，在内容上做了一些局部调整和改进。在概率论部分更强调了随机变量的概念和多维随机向量函数的发布，增加了一些与经济学相关的例题和习题；在数理统计部分参考近些年研究生入学考试的大纲和试题，增加了大量考研真题。

本次修订得到学院领导和数理统计系老师们的大力帮助，在此表示感谢！由于水平所限，不当之处在所难免，恳请广大教师和学生提出批评意见，我们将不断改进，与时俱进，把教材建设的工作做得更好。

徐慧植　傅波

2017年11月

目录

第一章

概率论的基本概念

引　言

必然现象与随机现象

在自然界和人类实践活动中经常遇到各种各样的现象，这些现象大体可分为两类：一类是确定的．例如，“向上抛一块石头必然下落”“同性电荷相斥，异性电荷相吸”等，这种在一定条件下有确定结果的现象称为**确定性现象**.

另一类现象是随机的．例如，在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么，这个试验多于一种可能结果，但是在试验之前不能肯定试验会出现哪一个结果．但人们经过长期实践和深入研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性．例如，多次重复抛同一枚硬币得到正面朝上大致有一半．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，我们称之为**统计规律性**．我们把在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称之为**随机现象**.

概率论的研究对象和研究方法

概率论是从数量侧面研究随机现象及其统计规律性的数学学科，它的理论严谨，应用广泛，并且有独特的概念和方法，同时与其他数学分支有着密切的联系，它是近代数学的重要组成部分.

纵观概率论的发展史，就研究方法来说，可以分为三大阶段：初等组合方法、分析方法和测度论方法．在微积分诞生前，概率论的方法停留在初等组合方法．直到 18 世纪中叶，拉普拉斯（法国数学家）等人才把微积分的方法逐步应用到概率论的研究．分析概率论最终在 20 世纪 30 年代由柯尔莫哥洛夫（俄罗斯数学家）以测度论为基础的现代概率论所取代．

概率论的应用相当广泛，不仅应用在天文、气象、水文、地质、物理、化学、生物、医学等学科，而且在农业、工业、经济、管理、军事、电讯等部门也有广泛的应用．现在

概率论是数学系各专业的必修课之一，也是工科、经济类学科（特别是财经类高校）学生的重要基础课.

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验与事件

为了叙述方便，我们把对某种现象作一次观察或进行一次科学实验，通称为一个试验. 如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预测，但却呈现出统计规律性，我们称之为**随机试验**. 本书讨论的试验都是指随机试验. 显然随机现象有以下特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确的、可知道的（在试验之前就可以知道的）并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验出现哪一个结果.

［例 1－1］ E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数；

E_4：记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼叫次数；

E_5：在一批灯泡中任意取一只，测试它的寿命；

E_6：记录某城市一昼夜的最高温度和最低温度.

进行一个随机试验总有一个观察的目的，试验中会观察到有多种不同的结果. 例如，抛一枚硬币，我们的目的是要观察它哪一面朝上，这里只有两个不同的结果：正面或反面. 试验的每一个可能的结果称为**随机事件**，简称**事件**，一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

［例 1－2］ E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况，可能有 8 种不同的结果：$HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT$. 但还有其它可能：出现 0 次正面朝上，出现 1 次正面朝上，出现 2 次正面朝上，出现 3 次正面朝上，等等.

我们把不可能再分的事件称为**基本事件**. 例如在例 1－2 中，“出现 HHH”，“出现 HHT”，…，“出现 TTT” 都是基本事件. 由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**. 例如“出现 2 次正面朝上”是一个复合事件，它由“出现 HHT”“出现 HTH”“出现 THH” 三个事件组合而成.

联系于每一随机试验的每一基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示，由若干个基本事件组合而成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示，由所有基

本事件对应的全部元素组成的集合，称为**样本空间**，样本空间中的每一元素称为**样本点**，样本空间一般用Ω表示．这样一来，概率论的基本概念纳入集合论的轨道：样本空间是一集合（全集），样本点是其中的一个元素，随机事件是样本空间的子集．

1.1.2 事件的关系与运算

做一次随机试验，一定有一个结果，即有一个随机事件发生．设随机试验E的样本空间为Ω, A为随机试验E的事件，显然$A \subset \Omega$, 我们称**事件A发生**当且仅当A中的一个样本点出现．

样本空间Ω包含所有的样本点，且$\Omega \subset \Omega$, 在每次试验中它总会发生，Ω称为必然事件．空集Φ不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，Φ称为**不可能事件**．

事件是一集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义．

设试验E的样本空间为Ω, 而$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是Ω的子集．

（1）若$A \subset B$, 则称事件B包含（蕴含）事件A, 这指的是事件A发生必然导致事件B发生．若$A \subset B$且$B \subset A$, 即$A = B$, 则称事件A与事件B**相等**．

（2）事件$A \cup B = \{x \mid x \in A$或$x \in B\}$称为事件$A$与事件$B$的**和事件**．当且仅当$A$, B中至少有一个发生时，事件$A \cup B$发生．

类似的，称$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件．

（3）事件$A \cap B = \{x \mid x \in A$且$x \in B\}$称为事件$A$与事件$B$的**积事件**．当且仅当$A$, B中同时发生时，事件$A \cap B$发生．$A \cap B$也记作AB．

类似的，称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件；$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件．

（4）事件$A - B = \{x \mid x \in A$且$x \notin B\}$称为事件A与事件B的**差事件**．当且仅当A发生、B不发生时，事件$A - B$发生．

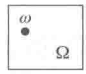
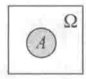
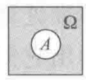
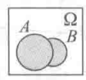
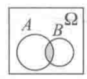
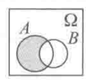
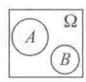
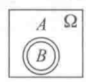
（5）若$A \cap B = \Phi$, 则称事件A与B是**互不相容**的，或**互斥**的．这指的是事件A与事件B不能同时发生．显然基本事件是两两互不相容的．

（6）若$A \cup B = \Omega$且$A \cap B = \Phi$, 则称事件A与事件B互为**逆事件**，或互为**对立事件**．这指的是对每次试验而言，事件A与事件B中必有一个发生，且仅一个发生．A的对立事件记为$\overline{A}$, $\overline{A} = \Omega - A$．显然$\overline{\overline{A}} = A$．

从上面的讨论可以看出，事件的关系及运算与集合的关系及运算是一致的，只是由于概率论中的事件及其运算有着很强的直观背景，所以有它自己的一套说法，这种一致性使我们可以利用集合论的概念和方法来分析事件之间的关系及运算．特别可以利用在集合论中广泛使用的文氏图．另外，特别值得指出的是：关于集合的运算律对于事件的运算完全

适用．我们将事件与集合的相应概念与运算列表对照，并将常用的运算律列举于后（见表 1 – 1）．

表 1 – 1

概率论		集合论	文氏图
样本空间（必然事件）	Ω 随机试验的所有基本结果	全集	
样本点（基本事件）	ω 随机试验的基本结果	Ω 的元素	
事件	A	Ω 的子集	
对立事件	$\overline{A}$ A 不发生	A 的补集	
不可能事件	Φ	空集	
事件的和	$A \cup B$ A 发生或 B 发生	A、B 的并	
事件的积	$A \cup B$ A、B 同时发生	A、B 的交	
事件的差	$A - B$ A 发生而 B 不发生	A、B 的差	
互斥事件	$A \cap B = \Phi$ A、B 不同时发生	A、B 互不相交	
蕴含	$B \subset A$ B 发生导致 A 发生	B 包含于 A	

可以验证事件的运算满足以下关系：

（1）交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

（2）结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

（3）分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

分配律可以推广到有穷或可列的情形，即

$$A \cup \left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i (A \cup A_i),$$

$$A \cap \left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcap_i (A \cap A_i);$$

（4）对偶律：对有穷个或可列无穷个 A_i，有

$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$.

关于事件间的关系，有一些需要注意的地方：

(1) 由 $A - B = C$ 推不出 $A = B \cup C$

事实上，令 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，于是 $C = A - B = \{2, 4\}$，而 $B \cup C = \{1,2,3,4,5\} \neq A$

注：但 $A \supset B$ 时，能由 $A - B = C \Rightarrow A = B \cup C$

(2) 由 $A = B \cup C$ 推不出 $A - B = C$

令 $A = \{1, 2, 3, 5\}$，$B = \{1, 2\}$，$C = \{1, 3, 5\}$，则 $A = B \cup C$ 但 $A - B = \{3, 5\} \neq C$

注：当 $B \subset A$，$C \subset A$，且 $BC = \Phi$ 时可由 $A = B \cup C \Rightarrow A - B = C$

(3) 一般 $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - C$

令 $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{2\}$，则 $A \cup (B - C) = \{1,2,3\} \neq \{1,3\} = (A \cup B) - C$

注：当 $AC = \Phi$ 时，$A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

[例 1 - 3] 设 A,B,C 为 Ω 中的随机事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 与 B 发生而 C 不发生　　$AB - C$ 或 $AB\overline{C}$

(2) A 发生，B 与 C 不发生　　$A - B - C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}$

(3) 恰有一个事件发生　　$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

(4) 恰有两个事件发生　　$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$

(5) 三个事件都发生　　ABC

(6) 至少有一个事件发生　　$A \cup B \cup C$ 或(3)(4)(5)之并

(7) A,B,C 都不发生　　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(8) A,B,C 不都发生　　$\overline{ABC}$

(9) A,B,C 不多于一个发生　　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$

(10) A,B,C 不多于两个发生　　$\overline{ABC}$

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A 为随机试验 E 的事件，显然 A 是 Ω 的子集. 把事件作为集合看待，按照集合的运算，其结果仍然是样本空间 Ω 的子集，但它不一定是随机试验 E 的一个结果，也就是说它不一定是随机事件，因此我们需要一些事件构成的集合，这个集合中的事件按照集合的运算，所得的集合仍然是事件.

定义　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，F 为试验 E 的一些事件作为元素所构成的集合，按照事件的运算满足：

(1) $\Omega \in F$；

(2) 若 $A \in F$，则 $\overline{A} \in F$（对逆封闭）；

(3) 若任意 $A_n \in F$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$（对可列并封闭），

则称 F 为 Ω 上的事件域（σ 代数）.

显然如果 F 为 Ω 上的事件域，则有：

(4) $\Phi \in F$；

(5) 若任意 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in F$，则 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in F$（对有限并封闭）；

(6) 若任意 $A_n \in F$，则 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in F$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$（对有限交、可列交封闭）；

(7) 若任意 $A, B \in F$，则 $A - B \in F$.

练习1

1. 在区间 $[0,2]$ 上任取一数 x，记 $A = \{x \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\}$，$B = \{x \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\}$，求下列事件的表达式：(1) $\bar{A}B$；(2) $A\bar{B}$；(3) $A \cup \bar{B}$.

2. 甲、乙、丙三人射击同一目标，令 A_1 表示事件"甲击中目标"，A_2 表示事件"乙击中目标"，A_3 表示事件"丙击中目标". 用 A_1, A_2, A_3 的运算表示下列事件.

(1) 三人都击中目标；

(2) 只有甲击中目标；

(3) 只有一人击中目标；

(4) 至少有一人击中目标；

(5) 最多有一人击中目标.

3. 证明：对有穷个或可列无穷个 A_i，有

$\overline{\bigcup_{i} A_i} = \bigcap_{i} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i} A_i} = \bigcup_{i} \overline{A_i}$

4. 设 F 为 Ω 上的事件域，

证明：(1) 若任意 $A_n \in F$，则 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in F$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$；

(2) 若任意 $A, B \in F$，则 $A - B \in F$.

§1.2 频率与概率

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，而且希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小.

1.2.1 频率

定义 在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，随机事件 A 发生的次数 n_A

称为事件 A 发生的频数．比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记作 $f_n(A)$．

由定义，易见频率具有以下性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega) = 1$；

(3) 若设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为两两互斥事件，则

$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$．

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度．频率越大，事件 A 发生越频繁，这就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大．反之亦然．因而，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小．但是否可行，看下面的例子．

[例 1-4] 考虑"抛硬币"这个试验，我们将一枚硬币抛 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍．得到数据如表 1-2 所示（其中 n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率）．

表 1-2

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上述数据可以看出：抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其振幅较大，但随着 n 增大，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5．

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数．这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性．我们让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的．

但是，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生可能性的大小．同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义．

到 20 世纪，概率论的各个领域已经得到了大量的成果，而人们对概率论在其他基础学科和工程技术上的应用已出现了越来越大的兴趣，但到那时为止，关于概率论的一些基本概念，如事件、概率却没有明确的定义，这是一个很大的矛盾，这个矛盾使人们对概率客观含义甚至相关结论的可应用性都产生了怀疑．由此可以说明到那时为止，概率论作为

一个数学分支，还缺乏严格的理论基础，这就大大妨碍了它的进一步发展.

19 世纪末以来，数学的各个分支广泛流传着一股公理化潮流，这个流派主张将假定公理化，其他结论则由它演绎导出. 在这种背景下，1933 年俄国数学家柯尔莫哥洛夫在集合与测度论的基础上提出了概率的公理化定义，这个结构综合了前人的结果，明确定义了基本概念，使概率论成为严谨的数学分支，对近几十年来概率论的迅速发展起了积极的作用，柯尔莫哥洛夫的公理已经被广泛地接受.

1.2.2 概率

定义 设 E 是随机试验，Ω 为其样本空间，F 为 Ω 上的事件域，对任意事件 $A \in F$，规定一个实值函数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) 非负性公理：任意 $A \in F$，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性公理：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性公理：对 F 中任意两两互不相容的事件列 $\{A_n\}$ 有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，则称 P 为 F 上的概率函数，简称概率，$P(A)$ 称为事件 A 的概率. 三元组 (Ω, F, P) 称为概率空间.

注：由可列可加性可推出取 $[0,1]$ 区间的有理点的概率为零. 但也不能推广到任意的无限可加性，否则取 $[0,1]$ 区间上的所有实数点的概率也为 0.

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\phi) = 0$.

证明：令 $A_i = \phi(i = 1,2,\cdots)$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 是两两互不相容的事件，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$，根据概率的可列可加性有：

$$P(\phi) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi).$$

由于实数 $P(\phi) \geqslant 0$，因此 $P(\phi) = 0$.

性质 2 （有限可加性）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证明：令 $A_i = \phi(i = n+1, n+2, \cdots)$，根据概率的可列可加性有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3 （单调性）设 A, B 是两个事件，则：

(1) 若 $A \subset B$，有 $P(A) \leqslant P(B)$，$P(B - A) = P(B) - P(A)$；

(2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$，$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.

证明：因为 $A \subset B$，所以 $B = A \cup (B - A)$，且 $A(B - A) = \phi$，由性质 2，有

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

又 $P(B - A) \geqslant 0$，所以 $P(A) \leqslant P(B)$，并且

$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

对于任意两个事件 A 与 B, 由于 $B-A=B-AB$, 且 $AB\subset B$, 根据性质4, 可得 $P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$.

性质4 任一事件 A, 则: $0\leqslant P(A)\leqslant 1$, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明: 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\phi$, 由概率的规范性和性质2, 有

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

于是

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质5 (加奇减偶公式) 任意 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in F$ 有,

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),$$

特别的有: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明: 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$, 且 $A(B-AB)=\phi$, $AB\subset B$, 由性质2和性质4, 可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意三个事件 A,B,C, 有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

利用数学归纳法, 可以证明加奇减偶公式成立.

性质6 (从下连续) 若 $A_n\in F$ 且 $A_n\subset A_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

性质7 (从上连续) 若 $A_n\in F$ 且 $A_n\supset A_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

性质8 (次可加性) 任意 $A_n\in F$, $n=1,2,\cdots$, 有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

1.2.3 古典概型

定义 如果一随机试验满足: 样本空间 Ω 的样本点个数为有限, 每个样本点出现的可能性相同, 则称此随机试验为古典概型 (也称等可能概型).

设随机试验 E 为古典概型, 其样本空间为 Ω, Ω 中样本点数为 n, A 为随机试验 E 的一个结果, A 含有 k 个样本点, 则根据概率的性质, 很容易得到事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}$.

当我们确信一随机试验是古典概型, 此试验中各事件发生的概率的计算问题, 归结为数一数样本点总数与所涉及的事件 A 中包含的样本点个数. 由于计数过程有时也相当复杂, 在此有必要简述初等数学中的计数原理.

计数原理

加法原理：完成一件事，只需 1 个步骤，但有 n 种方法，每一种方法有 m_n 种选择，则完成这件事共有 N 种方法.

$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

乘法原理：完成一件事，有 n 个步骤，每个步骤方法有 m_n 种方法，则完成这件事共有 N 种方法.

$N = m_1 m_2 \cdots m_n$

由加法原理和乘法原理，很容易得到我们今后经常使用的排列与组合：

（1）**排列**：从 n 个不同元素按次序任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素，不放回的取法共有：

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

（2）**组合**：从 n 个不同元素无次序任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素，不放回的取法共有：

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

（3）**重复排列**：从 n 个不同元素中每次取一个，放回后再取下一个，如此连续取 m 次所得到的排列称为重复排列，此种重复排列共有 n^m 个

（4）**重复组合**：从 n 个不同元素中每次取一个，放回后再取下一个，如此连续取 m 次所得到的组合称为重复组合，此种重复组合共有 $C_{n+m-1}^m = \binom{n+m-1}{m}$ 个.

上述四种排列组合及其计算公式，在确定概率的古典方法中经常使用.

［**例 1－5**］（**取球问题**）袋中有5个白球，3 个黑球，分别按下列三种取法在袋中取球.

（1）有放回地取球：从袋中取三次球，每次取一个，看后放回袋中，再取下一个球；

（2）无放回地取球：从袋中取三次球，每次取一个，看后不再放回袋中，再取下一个球；

（3）一次取球：从袋中任取 3 个球.

在以上三种取法中均求 $A = \{$恰好取得 2 个白球$\}$ 的概率.

解：（1）有放回取球.

$$N_\Omega = 8 \times 8 \times 8 = 512,\ N_A = \binom{3}{2} 5 \times 5 \times 3 = 225,\ P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{225}{512} = 0.44$$

（2）无放回取球.

$$N_\Omega = 8 \times 7 \times 6 = 336,\ N_A = \binom{3}{2} 5 \times 4 \times 3 = 180,\ P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{180}{336} = 0.54$$

（3）一次取球.

$$N_\Omega = \binom{8}{3} = 56,\ N_A = \binom{5}{2}\binom{3}{1} = 30,\ P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{30}{56} = 0.54$$

［**例 1－6**］（**彩票问题**）一种福利彩票称为幸运 35 选 7，即购买时从 01，02，…，35 中任选 7 个号码，开奖时从 01，02，…，35 中不重复地选出 7 个基本号码和一个特殊号

码. 中奖规则如表 1－3.

表 1－3

中奖级别	中奖规则
一等奖	7 个基本号码全中
二等奖	中 6 个基本号码及特殊号码
三等奖	中 6 个基本号码
四等奖	中 5 个基本号码及特殊号码
五等奖	中 5 个基本号码
六等奖	中 4 个基本号码及特殊号码
七等奖	中 4 个基本号码，或中 3 个基本号码及特殊号码

试求：各等奖的中奖概率.

解：因为不重复选号是不放回抽样，所以样本空间 Ω 含有 $\binom{35}{7}$ 个样本点，要中奖应把抽取看成是在三种类型中实施（乘法原理）：

第一类号码：7 个基本号码

第二类号码：1 个特殊号码

第三类号码：27 个无用号码

若记 p_i 为中第 i 类奖的概率，则

$$p_1 = \frac{\binom{7}{7}\binom{1}{0}\binom{27}{0}}{\binom{35}{7}} = 0.149 \times 10^{-6}$$

$$p_2 = \frac{\binom{7}{6}\binom{1}{1}\binom{27}{0}}{\binom{35}{7}} = 1.04 \times 10^{-6}$$

$$p_3 = \frac{\binom{7}{6}\binom{1}{0}\binom{27}{1}}{\binom{35}{7}} = 28.106 \times 10^{-6}$$

$$p_4 = \frac{\binom{7}{5}\binom{1}{1}\binom{27}{1}}{\binom{35}{7}} = 84.318 \times 10^{-6}$$

$$p_5 = \frac{\binom{7}{5}\binom{1}{0}\binom{27}{2}}{\binom{35}{7}} = 1.096 \times 10^{-3}$$