灰色预测模型
及其在岩石渗流中的应用

HUISE YUCE MOXING JIQI ZAI YANSHI SHENLIU ZHONG DE YINGYONG

马德宜◎著

吉林大学出版社

灰色预测模型及其在岩石渗流中的应用

马德宜◎著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

灰色预测模型及其在岩石渗流中的应用/马德宜著.
--长春:吉林大学出版社,2017.11
ISBN 978-7-5692-1619-6

Ⅰ.①灰… Ⅱ.①马… Ⅲ.①灰色预测模型－渗流模型－研究 Ⅳ.①N949

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 325979 号

书　　名　灰色预测模型及其在岩石渗流中的应用
HUISE YUCE MOXING JIQI ZAI YANSHI SHENLIU ZHONG DE YINGYONG

作　　者　马德宜　著
策划编辑　孟亚黎
责任编辑　孟亚黎
责任校对　樊俊恒
装帧设计　马静静
出版发行　吉林大学出版社
社　　址　长春市朝阳区明德路 501 号
邮政编码　130021
发行电话　0431－89580028/29/21
网　　址　http://www.jlup.com.cn
电子邮箱　jlup@mail.jlu.edu.cn
印　　刷　三河市铭浩彩色印装有限公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　11.25
字　　数　146 千字
版　　次　2018 年 4 月　第 1 版
印　　次　2018 年 4 月　第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5692-1619-6
定　　价　42.00 元

前　言

灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分，以 GM(1,1)模型为代表的灰色预测模型在社会、经济、工程等领域得到了广泛应用。研究人员在 GM(1,1)模型的基础上，开展了大量的拓展和优化工作，有效提高了模型的拟合与预测精度，并拓展了其应用范围。而关于函数型灰色预测模型的系统研究尚未见到，将灰色预测模型应用于岩石渗流方面的系统研究也尚未见到。

本书是作者近年来在灰色系统理论的预测模型研究工作及将其应用于岩石渗流工程问题的总结和提升。灰色系统理论的预测模型涉及对数灰色模型、Logistic 灰色模型和高斯灰色模型三种函数型灰色模型，以及广义分数阶灰色模型、分数阶内涵型模型和不同分数阶累加的离散灰色模型三种分数阶灰色模型。其在岩石渗流工程中的应用涉及煤岩蠕变-渗流试验中渗透率与围压的关系、软岩在蠕变试验中轴向变形与时间的关系、煤峰前蠕变-渗流试验中应变与时间的关系、岩石蠕变-渗流试验中渗流量与时间的关系和渗透率与时间的关系。

本书的出版得到了许多老师和同学的支持与指导，衷心感谢博士后指导教师李建林教授！感谢王乐华教授、刘杰教授、柳福祥副教授、刘军副教授！感谢岩土力学基本理论及应用团队的其他老师与同学！

本书在写作过程中，由于参考的资料和文献众多，可能难以一一予以注明，请相关作者给予谅解。同时在此书出版之际，向各位作者致以诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中存在不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

马德宜

2017 年 10 月

目　录

第 1 章　灰色理论与岩石渗流概况

1.1　灰色系统理论的基本原理与主要内容

人类对未来世界进行探索，一般会经历完全未知、部分未知和完全已知三个阶段。灰色系统是包含部分已知信息和部分未知信息的系统。灰色理论主要是研究客观世界中普遍存在的灰色系统的一种新兴理论和方法。

1.1.1　灰色系统理论的产生与发展

1982 年，邓聚龙教授在《系统与控制通信》上发表了第一篇灰色系统论文“灰色系统的控制问题”，同时在《华中工学院学报》上发表灰色系统论文“灰色控制系统”。这一系列成果标志着灰色系统理论问世[1]。

邓聚龙教授创立的灰色系统理论，是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法。灰色系统理论的研究对象为部分信息已知、部分信息未知的少数据、贫信息不确定性系统。其研究手段主要是通过对部分已知信息进行挖掘，进而提取有价值的信息，最终实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效预测。现实生活中存在的少数据、贫信息不确定性系统，为灰色系统理论提供了丰富的研究对象和广阔的发展空间。

1.1.2 不确定性系统的特征

信息不完全、不准确是不确定性系统的基本特征。系统演化的动态特性、人类认识能力的局限性和经济、技术条件的制约，导致不确定性系统的普遍存在[1]。

信息不完全是不确定性系统的基本特征之一。系统信息不完全的情况可以分为四种，一是元素信息不完全；二是结构信息不完全；三是边界信息不完全；四是运行行为信息不完全。信息不完全是绝对的，信息完全则是相对的。人们以其有限的认识能力观测无限的时空，不可能得到所谓的完全信息。概率统计中的大样本实际上表达了人们对不完全的容忍程度。通常情况下，样本量超过 30 即可视为大样本，但有时候即使收集到成千上万个样本也未必能找到潜在的统计规律。

不确定性系统的另一个基本特征是数据不准确。不准确与不精确的含义基本相同，表达的都是与实际数值存在的误差或偏差。根据不准确产生的本质来划分，可分为概念型、层次型和预测型三类。概念型不准确源于人们对某种事物、观念或意愿的表达。层次型不准确是由研究或观测的层次改变形成的数据不准确。预测型不准确是由于难以完全把握系统的演化规律，人们对未来的预测不准确。

1.1.3 几种不确定方法的比较

概率统计、模糊数学、灰色系统理论和粗糙集理论是四种常见的不确定性系统研究方法。它们的共同点是研究对象都具有某些不确定性。根据研究对象在不确定性上的不同之处，派生出这几种各具某种特色的不确定性学科[1]。

概率统计研究的是随机不确定现象，其出发点是大样本，并

要求随机不确定变量服从某种典型分布。模糊数学重点研究认知不确定问题，其研究对象具有内涵明确、外延不明确的特点。粗糙集理论采用精确的数学方法研究不确定性系统，其主要思想是利用已知的知识库，近似刻画和处理不精确的知识。灰色系统理论重点研究概率统计、模糊数学难以解决的少数据、贫信息不确定性问题，并依据信息覆盖，通过序列算子的作用探索事物运动的现实规律，其特点是少数据建模。

1.1.4 灰色系统的基本原理

信息完全明确的系统称为白色系统，信息未知的系统称为黑色系统，部分信息明确、部分信息不明确的系统称为灰色系统。灰色系统理论的研究是“部分信息已知，部分信息未知”的少数据、贫信息不确定性系统，运用灰色系统方法和模型技术，通过对部分已知信息的生成，人们能够开发、挖掘蕴涵在系统观测数据中的重要信息，实现对现实世界的正确描述和认识[1]。

在灰色系统理论的创立和发展过程中，邓聚龙教授提炼了灰色系统所必须满足的几条基本原理。

公理1.（差异信息原理）差异是信息，凡信息必有差异。

公理2.（解的非唯一性原理）信息不完全、不确定情况下的解是非唯一的。

公理3.（最少信息原理）灰色系统理论的特点是充分开发利用已占有的最少信息。

公理4.（认知根据原理）信息是认知的根据。

公理5.（新信息优先原理）新信息对认知的作用大于老信息。

公理6.（灰性不灭原理）信息不完全是绝对的。

1.1.5 灰色系统理论的主要内容

灰色系统理论经过三十多年的发展，现已基本建立起一门新兴学科的结构体系。其主要内容包括[1]灰数运算与灰色代数系统、灰色方程、灰色矩阵等灰色系统的基础理论；序列算子和灰色信息挖掘方法；用于系统诊断、分析的系列灰色关联分析模型；用于解决系统要素和对象分类问题的多种灰色聚类评估模型；系列灰色预测模型（GM）和灰色系统预测方法和技术；主要用于方案评价和选择的灰靶决策和多目标加权灰靶决策模型；以及以多方法融合创新为特色的灰色组合模型，如灰色规划、灰色投入产出、灰色博弈、灰色控制等。

GM 系列模型包括 GM(1,1)模型、离散 GM 模型、分数阶 GM 模型、Verhulst 模型和 GM(r,h)模型等。灰色系统预测是基于 GM 模型做出的定量预测，按照其功能和特征可分为数列预测、区间预测、灾变预测、季节灾变预测、波形预测和系统预测等几种类型。

特别引人注目的是，很多科技工作者从自身所从事的应用领域出发，结合具体应用实例，产生了一系列灰色理论的应用研究成果，在灰色理论的带动下，相继产生了灰色水文学、灰色地质学、灰色历史学、灰色医学、灰色控制理论、灰色混沌理论、灰色图像处理等新兴交叉学科，产生了一批极有特色的相关专著。比如，陈新军等人的《灰色系统理论在渔业科学中的应用》、罗佑新等人的《灰色系统理论及其在机械工程中的应用》、夏军的《灰色系统水文理论、方法及应用》、赵云胜等人的《灰色系统理论在地学中的应用研究》、雷铁栓等人的《灰色系统理论在农业上的应用》、宋子齐等人的《灰色理论油气储层评价》、霍俊江等人的《灰色系统理论在历史研究中的应用》等。

1.2 灰色预测模型的发展

1.2.1 基本概念

灰色数列，也称灰色过程，指原始数据序列。灰色模型(Grey Model, GM)，指对灰色数列建立的模型。不同于数据序列建立差分方程的传统建模方式，灰色模型是用原始数据序列作数据生成后再建立的微分方程。

灰色理论建立微分方程的模型基于下述概念、观点、方式和方法[1]。

(1)灰色理论按开集拓扑定义了数列的时间测度，进而定义了信息浓度、灰导数与灰微分方程。

(2)将随机量当作是在一定范围内变化的灰色量，将随机过程当作是在一定范围、一定时间内变化的灰色过程。

(3)灰色模型实际上是生成数列模型，因为灰色理论是将无规律的原始数据经过生成，使其变为较有规律的生成数列后再建模。

(4)灰色理论通过灰数的不同生成方式、数据的不同取舍方式和不同的残差模型来调整、修正、提高建模精度。

(5)残差指模型计算值与实际值之差。考虑了残差修正的灰色模型称为差分、微分模型。

(6)灰色理论的模型选择基于关联度的概念和基于关联度收敛原理。关联度收敛是一种有效范围的近似收敛。

(7)灰色模型并非适合所有的数据序列，对模型的适用性要进行检验。

(8)灰色模型所得数据必须经过数据生成的逆过程，即还原

后才能使用。

灰色模型是灰色系统理论的基本模型，也是灰色控制的理论基础。通用的灰色模型表示为 GM(n,N)。其中，n 表示阶数，N 表示变量的个数，该模型是一个 n 阶 N 个变量的 GM 模型。n 与 N 不同，GM 模型的意义和用途就不同，要求的数据序列也不同。

灰色理论认为对既含有已知信息又含有未知信息的系统进行预测，就是对在一定范围内变化的、与时间有关的灰色过程的预测。尽管过程中所显示的现象是随机的、杂乱无章的，但毕竟是有序的、有界的，因此，这一数据集合具备潜在的规律。灰色预测就是利用这种规律建立灰色模型，对灰色系统进行预测。

1.2.2 灰色模型的基本形式

GM 系列模型是灰色预测理论的基本模型，尤其是邓聚龙教授提出的均值 GM(1,1)模型，应用十分广泛[1]。

定义 1.1 设原始序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\} \tag{1.1}$$

其中 $x^{(0)}(k)\geqslant 0,k=1,2,\cdots,n$。则一阶累加序列

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\} \tag{1.2}$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n$。设

$$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n)\}, \tag{1.3}$$

其中 $z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),k=2,3,\cdots,n$。称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \tag{1.4}$$

为灰色模型 GM(1,1)的均值形式。

定义 1.2 称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b \tag{1.5}$$

为 GM(1,1)模型均值形式的白化微分方程。

定理 1.1　均值灰色模型 GM(1,1)的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\frac{b}{a}+\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k-1)},k=1,2,\cdots,n \quad (1.6)$$

1.2.3　灰色模型的扩展形式

针对有些数据序列，均值灰色模型 GM(1,1)拟合效果不好的问题，不少研究学者对其从不同角度进行了改进。

1. 离散灰色模型 DGM(1,1)

定义 1.3　称

$$x^{(1)}(k+1)=\beta_1 x^{(1)}(k)+\beta_2,k=1,2,\cdots,n-1 \quad (1.7)$$

为 GM(1,1)模型的离散形式，简称离散 GM(1,1)模型(DGM)。

定理 1.2　离散 GM(1,1)模型的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1')-\frac{\beta_2}{1-\beta_1}\right)\beta_1^k+\frac{\beta_2}{1-\beta_1},k=1,2,\cdots,n \quad (1.8)$$

2. 非齐次指数离散灰色模型

定义 1.4　对原始数据序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\} \quad (1.9)$$

其一次累加生成序列为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\} \quad (1.10)$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n$。称

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k+1)=\beta_1\hat{x}^{(1)}(k)+\beta_2 k+\beta_3\\ \hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)+\beta_4\end{cases} \quad (1.11)$$

为近似非齐次指数离散灰色模型(NDGM)，其中 $\hat{x}^{(1)}(k)$是原始序列数据的拟合值，β_1，β_2，β_3 和 β_4 为待定参数，$\hat{x}^{(1)}(1)$为迭代初始值。

3. 残差GM(1,1)模型

定义1.5 若

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)=(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)} \tag{1.12}$$

则相应的残差修正时间响应式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\begin{cases}(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}, & k<k_0\\ (1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}\pm a_{\varepsilon}\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\dfrac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}}\right)e^{-a_{\varepsilon}(k-k_0)}, & k\geqslant k_0\end{cases} \tag{1.13}$$

称为累减还原式的残差修正模型。

定义1.6 若

$$\hat{x}^{(0)}(k)=(-a)\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak} \tag{1.14}$$

则相应的残差修正时间响应式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\begin{cases}(-a)\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}, & k<k_0\\ (-a)\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}\pm a_{\varepsilon}\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\dfrac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}}\right)e^{-a_{\varepsilon}(k-k_0)}, & k\geqslant k_0\end{cases} \tag{1.15}$$

称为导数还原式的残差修正模型。

4. 基于分数阶累加的离散灰色模型

定义1.7 称

$$x^{(r)}(k+1)=\beta_1 x^{(r)}(k)+\beta_2,\ k=1,2,\cdots,n-1 \tag{1.16}$$

为基于分数阶累加的离散灰色模型。

定理1.3 基于分数阶累加的离散灰色模型 $x^{(r)}(k+1)=\beta_1 x^{(r)}(k)+\beta_2$ 参数的最小二乘估计满足

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{1.17}$$

其中