普通高等教育“十三五”规划教材

QUANTUM MECHANICS

量子力学

liangzi lixue

符力平 彭勇宜◎编著
何军◎主审

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

量 子 力 学

符力平　彭勇宜　编著
何　军　主审

中南大學出版社
www.csupress.com.cn
·长 沙·

图书在版编目（CIP）数据

量子力学 / 符力平，彭勇宜编著. --长沙：中南大学出版社，2017.9

ISBN 978-7-5487-3014-9

Ⅰ.①量… Ⅱ.①符… ②彭… Ⅲ.①量子力学—高等学校—教材 Ⅳ.①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 233482 号

量子力学

符力平　彭勇宜　编著

何　军　主审

□**责任编辑**　谭　平
□**责任印制**　易红卫
□**出版发行**　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　　邮编：410083
发行科电话：0731-88876770　　传真：0731-88710482
□**印　　装**　长沙鸿和印务有限公司

□**开　　本**　787×1092　1/16　□**印张** 28.25　□**字数** 702 千字
□**版　　次**　2017 年 9 月第 1 版　□2017 年 9 月第 1 次印刷
□**书　　号**　ISBN 978-7-5487-3014-9
□**定　　价**　68.00 元

前言
PREFACE

这本《量子力学》是针对大学物理专业和应用物理专业初学量子力学的本科生写的。作为一本量子力学入门读物，目的是要让学生对量子力学有很好的了解，使学生不但能掌握量子力学解决问题的基本方法，还能从物理本质上对量子力学有深刻的理解，为后续进一步深入学习量子力学打下良好的基础。

众所周知，量子力学是物理专业本科生的一门重要专业基础课，同时，也是一门比较难学的课程。为了使学生学好量子力学，学得轻松，学得明白，本书主要从以下三个方面来介绍量子力学。

首先，阐明量子力学的基本观念。这是量子力学的出发点，其意义是指量子力学对待物质运动的看法。由于以量子化和波－粒二象性为特点的一些实验的出现，使得人们在试图解释这些现象的过程中逐渐形成了一种与经典物理学迥然不同的世界观——非决定论。它主张一个物理体系在没有被测量前不具备有确定的物理特性，只有对它进行了测量，方可获得该体系的物理特性。尽管这一观念的讨论最终涉及哲学，容易陷入不同哲学观的纷争之中，但我们既不回避、也不涉足，我们要让学生了解这里的观点，要让学生知道量子力学是在什么样一种观念下建立的，这是重要的，对学生理解量子力学接下来的“所作所为”能起到“四两拨千斤”的作用。

其次，厘清量子力学的基本原理。与经典物理学不同，量子力学的基本原理讲起来似乎总有些含糊不清，甚至还有些混乱，如：波－粒二象性、不确定原理、叠加原理以及互补原理等究竟哪几个是基本的？它们又存在什么样的联系？它们是完全相互独立的还是在一定程度上又相互包含的？这使得熟悉经典物理学的人一开始就会感到茫然。尽管有些高等一点的量子力学教材会给出一个公理体系，但对于初学量子力学的学生来讲，还是很难琢磨透这一公理体系背后的物理含义。因此，在参考了许多国内外教材的基础上，本书梳理出一套既比较合理又有清楚物理背景的基本原理体系，并以定律的形式明确给出，使得学生理解和掌握起来更加容易，而掌握了这些基本原理，也就相当于掌握了量子力学的基本内容。

最后，透析量子力学的表示形式。量子力学创建初期就有矩阵力学和波动力学之分，后来人们逐渐认识到这背后本质的东西，反过来，也说明量子力学的基本原理可以有多种不同

的表示形式。因此，在初学量子力学的过程中，需要循序渐进，不要把复杂的表示形式与基本原理混杂在一起，造成不必要的学习障碍。本书主要以波动力学的形式来展现量子力学，直到最后两章，才以比较深入的方式介绍量子力学的一种抽象形式。这会使学生在熟悉了量子力学的基本理论的前提下感到眼前一亮，留下许多回味和思考。

鉴于以上考虑，本书分成为四个部分。第一部分为前四章，主要阐述量子力学的基本观念和基本原理，这是整个量子力学的核心。其中首章取名为第0章，这是因为此章并非量子力学的内容，具有较好经典力学基础的读者完全可以跳过去。但这一章包含了一些重要的物理思想，对学习量子力学有很大的帮助。同时，对后续常要用到的Fourier理论作了物理上的诠释。接下来与传统教材的做法一样，第1章介绍一些近代物理实验，以及由此所产生的一些矛盾。第2章则是在这些实验的基础上展开讨论，最终引导出量子力学的基本观念。在第3章中，我们以量子力学的基本观念为出发点，以建立一个新理论为目标，结合实验和已有的理论，采用归纳的方法，以定律的形式给出新理论的基本原理。在这一过程中，尽量做到叙述清每一条原理的来龙去脉，使学生比较容易接受和理解这些原理。与经典力学的做法相仿，第二部分以单粒子量子体系为导向，展开量子力学各种运用的讨论，同时，在单粒子问题的讨论中，逐步对量子力学理论进行完善。例如，补充介绍了算符的对易关系、正则量子化等。第三部分介绍多粒子体系的最基本问题，并给出量子力学基本原理的最后一个定律。最后两章构成本书的第四部分——量子力学的一般形式。主要介绍了量子力学的数学基础和量子力学的内积形式，即通常所说的Dirac符号形式。相比同层次的教材来讲，这一部分的数学内容可能难度较大，但本着要让学生真正弄懂的原则，本书作了较深入的讨论。另外，我们也注意到，这一部分数学内容在其他学科(包括工程类)里也都在强调之中，是现代分析必备的工具。因此，对于物理专业的学生来讲也是必须要掌握的。

全书所用课时大约在72个课时，其中部分内容可以用作自学。本书的前12章曾作为量子力学(一)(64个课时)的教学内容，而第13、14两章再加上角动量理论和对称变换则作为量子力学(二)(48个课时)的教学内容。

在多年教授量子力学的过程中，我们曾参阅了许多国内外的优秀教材，从中学到不少东西，受益匪浅，在此谨向这些作者们表示衷心的感谢。

我们要感谢历届听课的学生，他们的学习热情给予了我们写作上的动力，他们的质疑给我们带来写作上的灵感。特别感谢余婷婷、康璐、叶显爵和付亚圣等同学对书稿所做的工作。

感谢中南大学出版社谭平女士的热情支持。本书出版获得了中南大学精品教材项目和中南大学出版基金的支持，在此也一并致谢。

由于我们水平有限，对量子力学的认识和理解都很肤浅，书中难免存在错误和不妥之处，我们真心实意地欢迎读者提出批评和建议。

符力平　彭勇宜

2017年9月于中南大学

目录

PREFACE

第一部分 基本原理

第二部分　单粒子体系

第四部分　一般形式

第一部分 基本原理

第 0 章　质点组牛顿力学

——耦合质点组的振动与波

经典力学根据所讨论的对象可分为质点力学和质点组力学，牛顿的运动定律在质点力学中得到了全面展现，成为经典力学的基本原理。而质点组力学则在将牛顿理论运用于实际的过程中充当着重要角色，例如，一个实际物体的运动就可以看作是某一种质点组的运动。我们熟悉的质点组有刚体、弹性固体和流体等；另外，质点组也有离散型与连续型之分。

本章我们主要讨论这样的质点组，这种质点组中的每个质点都在其自身平衡位置附近作振动，而质点之间又通过某种方式相互联系着，故这种质点组称为耦合质点组（system of coupled particles）。特别地，我们以考虑一维的情况为主。

此外，从物理学的角度，我们对 Fourier 理论作新的解读，进而提高对处理一般问题方法的认识。

0.1　质点组的振动

虽然牛顿力学的基本原理看上去比较简单，也容易理解和掌握，但由这一基本原理所建立起来的理论却是庞大的，所能解决的问题也是非常广泛的。此外，牛顿力学的这种理论模式对后来发展起来的各个学科也都有巨大的影响。牛顿力学的基本原理是针对单个质点来陈述的，真正具有实际应用的应是将质点的基本原理过渡到质点组的情况。例如，对刚体质点组运动的讨论，就是对有形状的实际物体运动描述的一种逼近。

我们来看离散型耦合质点组的运动。

0.1.1　两个质点的耦合摆

将两个相似的单摆用弹簧连接起来，形成一个耦合质点组，称它为耦合摆（coupled pendula），见图 0－1。我们来考察这一耦合质点组的运动。

显然，相比单个质点的振动，两个质点的情况还是比较复杂的。例如，若将质点 1 拉离平衡位置，然后释放，任其运动。质点 1 的运动情况见图 0－2。

倘若质点数比较多，可以想象各个质点的运动情况将会变得更加复杂。当然，从理论上讲，再多的质点，根据牛顿运动定律还是可以求解的，因为质点数多无非就是方程数多而已。不过，从物理学的角度考虑，则有不同的解法，而且这一解法的思想也深刻地影响着数学。物理上的考虑是基于这样的事实：两个耦合的质点存在着易于求解的一些简单运动形式，而

一般的运动则可以看成是这些简单运动形式的组合。这样就将整个复杂的运动转换成求解这些简单运动。

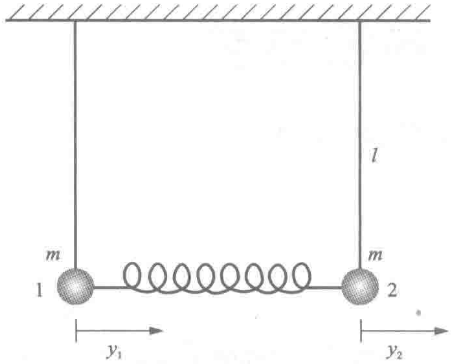

图 0-1 耦合摆

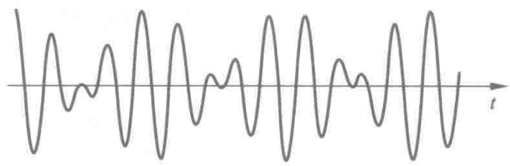

图 0-2 质点 1 的位置-时间变化图

下面具体来说明这一物理思想。对于耦合摆来讲，一般情况下，尽管两个质点的运动比较复杂，但它们存在简单的运动形式，例如，两质点进行所谓的同步摆就是其中的一种，见图 0-3。

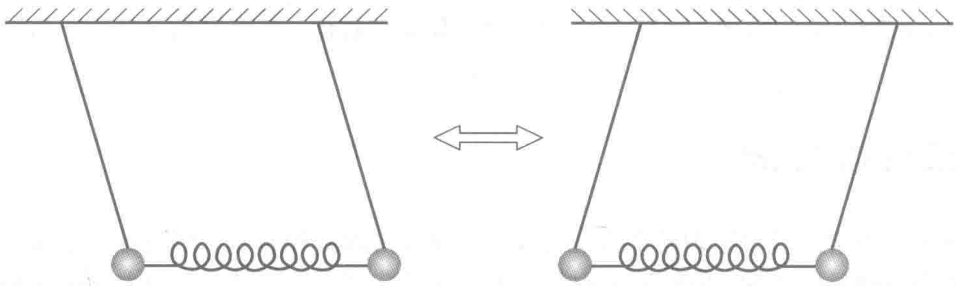

图 0-3 同步摆的两个状态，每个质点都以同样的频率和固定的振幅振动

此时弹簧不起作用，可以拿掉(弹簧无质量)，这就成了两个独立的单摆。体系的运动方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} y_1 = 0 \tag{0-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} y_2 = 0 \tag{0-2}$$

在这种情况下，两个质点都是以同样的频率 $\sqrt{g/l}$ 在运动，振幅也是确定的。根据质点的振动，若两个质点都是从静止开始运动的话，则可直接写出它们的运动方程

$$y_1(t) = A\cos\omega_1 t,\ y_2(t) = A\cos\omega_1 t \tag{0-3}$$

其中：A 由初始位移决定，$\omega_1 = \sqrt{g/l}$，初相位为零。

除了同步摆这一简单运动形式外，还有另外一种简单的形式，即两质点以相同的频率作相向运动的情况，见图 0-4。

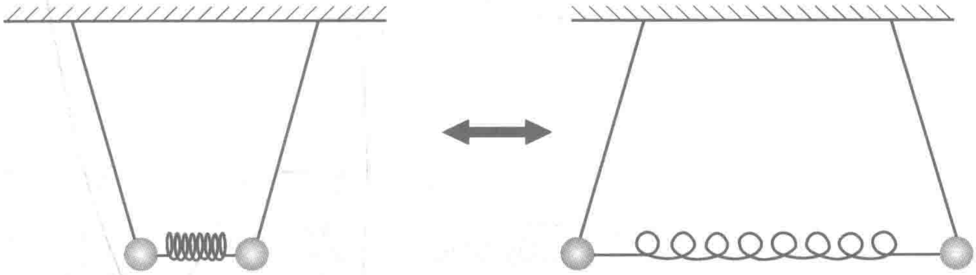

图0-4　相向摆的两个状态，每个质点都以同样的频率和固定的振幅振动

此时，由于弹簧的中心点不动，因而耦合的两质点运动等价于两个单独的振动，见图0-5。例如，质点1的运动方程这时就为

$$-\frac{mgy_1}{l}-2ky_1=m\frac{d^2y_1}{dt^2} \tag{0-4}$$

其中：等号左边第一项为单摆的回复力（对较小的 θ，取 $y_1\approx l\theta_1$）；第二项则为弹簧相对伸长 $2y_1$ 的回复力。

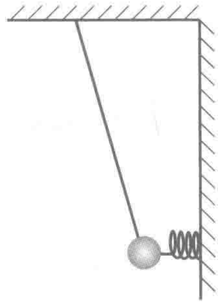

图0-5　弹簧中心点不动，类似于弹簧中心点被固定在墙上

将方程化简，得

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\omega_2^2y_1=0 \tag{0-5}$$

其中：$\omega_2^2=(g/l+2k/m)$，显然，$\omega_2>\omega_1$。这样，我们又可以写出两质点的运动方程（注意到对称性，有 $y_1=-y_2$）

$$y_1(t)=B\cos\omega_2t,\ y_2(t)=-B\cos\omega_2t \tag{0-6}$$

其中：B 由初始位置决定。同样，由于质点是从静止开始运动的，其初相位为零。

由上面的讨论，可以看出质点组这种简单运动形式的几个特点：

(1)每个质点都以同一个频率振动；

(2)每个质点都具有恒定的振幅（一般情况下，各振幅可不相等）；

(3)各质点之间的相位差是固定的：要么是零，要么是 π；

(4)一旦质点组以其中一种简单形式运动，则质点组将保持在这一简单运动形式之中，不会发生改变，也即每一简单运动形式都是稳定的。

我们称具有这些特点的运动形式（或模式）为简正模（normal mode）。由此可见，同步摆就是一种简正模，我们称之为“单摆模”。相向摆也是一种简正模，我们形象地称之为“呼吸模”。

耦合摆的这两种简正模又是如何与它的一般运动联系起来的呢？或者说，耦合摆的一般运动是不是能够用“单摆模”和“呼吸模”来表示？下面从牛顿定律入手，来考察耦合摆的一般运动，见图0-6。设两质点的位移分别为 y_1 和 y_2，弹簧的相对伸长为 (y_1-y_2)，所以，作用在质点1上的弹力为

$$F_s=-k(y_1-y_2)$$

此外，还有摆力（θ 很小）

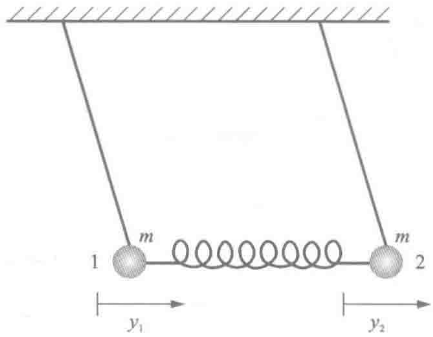

图 0-6 $y_1 \neq \pm y_2$ 时简正模迭加的一般情况

$$F_{\mathrm{p}} = -\frac{mg}{l} y_1$$

因此，质点 1 的牛顿运动方程为

$$-\frac{mg}{l} y_1 - k(y_1 - y_2) = m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} \tag{0-7}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} y_1 + \frac{k}{m}(y_1 - y_2) = 0 \tag{0-8}$$

类似地，质点 2 所受到的回复力为

$$F_{\mathrm{T}} = -\frac{mgy_2}{l} + k(y_1 - y_2)$$

其运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} y_2 - \frac{k}{m}(y_1 - y_2) = 0 \tag{0-9}$$

式(0-8)和式(0-9)就是两个质点组所满足的运动方程，它们是一组耦合的二阶常微分方程。一般必须同时求解才能获得该问题的解。但我们分析发现：若将式(0-8)与式(0-9)两方程相加，则可得

$$\frac{\mathrm{d}^2(y_1 + y_2)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}(y_1 + y_2) = 0 \tag{0-10}$$

式(0-10)与简谐振动的牛顿方程 $d^2y/\mathrm{d}t^2 + \omega_0^2 y = 0$ 比较，正是变量为$(y_1 + y_2)$的简谐振动方程。其振动频率为 $\sqrt{g/l}$，而这也恰好是单摆模的频率。若将两方程相减，则得

$$\frac{\mathrm{d}^2(y_1 - y_2)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)(y_1 - y_2) = 0 \tag{0-11}$$

同样，这也恰好是变量为$(y_1 - y_2)$的简谐振动方程，其振动频率为 $\sqrt{g/l + 2k/m}$，为呼吸模的频率。为了看得更清楚，我们引入变量

$$q_1 = (y_1 + y_2),\ q_2 = (y_1 - y_2) \tag{0-12}$$

则原来的两个方程就变成

$$\frac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2q_1=0 \tag{0-13}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_2^2q_2=0 \tag{0-14}$$

这是两个独立的简谐振动方程，q_1 值的变化与 q_2 值无关，反之亦然。两个振动的频率分别是 $\omega_1=\sqrt{g/l}$ 和 $\omega_2=\sqrt{(g/l+2k/m)}$ 。两个方程的通解分别是

$$q_1(t)=A\cos(\omega_1t+\varphi_1),\ q_2(t)=B\cos(\omega_2t+\varphi_2) \tag{0-15}$$

其中：A 和 B 以及 φ_1 和 φ_2 分别是积分常数，由初始条件决定。由于这是两个独立的简谐振动，故将变量 q_1 和 q_2 称为简正坐标(normal coordinates)，而 ω_1 和 ω_2 称为简正频率(normal frequencies)。

回头再看原问题的解。通过式(0-12)有

$$y_1(t)=\frac{1}{2}(q_1+q_2)=\frac{1}{2}[A\cos(\omega_1t+\varphi_1)+B\cos(\omega_2t+\varphi_2)] \tag{0-16}$$

和

$$y_2(t)=\frac{1}{2}(q_1-q_2)=\frac{1}{2}[A\cos(\omega_1t+\varphi_1)-B\cos(\omega_2t+\varphi_2)] \tag{0-17}$$

由式(0-16)、式(0-17)可以看出，耦合摆的一般运动确实是用两种简正模来表示的。也就是说，我们只要求出了简正模，再根据初始条件定出四个参数 A、B、φ_1 和 φ_2，就可以得到问题的一般解，从而使复杂问题简单化。

例1　一个耦合摆，$m=0.10$ kg，$l=0.15$ m 及 $k=5.0$ N/m。在 $t=0$ 时，左边的质点被固定在 $x_1=1.0$ cm 处，右边的在 $x_2=3.0$ cm 处，然后两质点同时被释放。求 $t=5.0$ s 时质点1的位置在哪里？

解：由初始条件 $t=0$ 可知：$y_1=1.0$，$y_2=3.0$，$v_1=v_2=0$(此时开始释放)。代入到式(0-16)和(0-17)的展开式中，得

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ A=4,\ B=-2$$

所以

$$y_1=\frac{1}{2}(4\cos\omega_1t-2\cos\omega_2t)=2\cos\omega_1t-\cos\omega_2t$$

$$y_2=\frac{1}{2}(4\cos\omega_1t+2\cos\omega_2t)=2\cos\omega_1t+\cos\omega_2t$$

其中

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}=8.1\ \mathrm{rad/s},\ \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}=13\ \mathrm{rad/s}$$

代入 $t=5$ s，得

$$y_1(t=5\ s)=-1.9\ \mathrm{cm}$$

对于由两个质点构成的耦合摆，将它们的一般运动问题归结为简正模的求解，这似乎是由于存在某些巧合因素才做到的。但我们需要指出的是，这其实是一种普遍成立的方法，是可以推广开来的，而且，不论是在物理学中还是在数学中，都是解决问题的一种重要手段。今后，我们把这种求解过程叫做简正模分析(normal mode analysis)。为了后面讨论多个质点

情况的需要，下面再将处理问题的整个过程整理如下。

首先，写出两质点的运动方程

$$\ddot{y}_1+\frac{g}{l}y_1+\frac{k}{m}(y_1-y_2)=0$$

$$\ddot{y}_2+\frac{g}{l}y_2-\frac{k}{m}(y_1-y_2)=0$$

其次，根据前面的分析，两个质点一定存在特殊的运动形式——简正模，因此可以假设简正模有频率 ω，两质点都以此频率作运动。于是，两质点的运动可以写成：$y_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi)$，$y_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi)$。①这里将两质点的相位都取成了一样，为了反映两质点的相位可以相差 π 的情况，我们认为 A_1 和 A_2 可以取负。然后，将以上简正模代入质点的运动方程，得

$$-A_1\omega^2\cos(\omega t+\varphi)+\frac{g}{l}A_1\cos(\omega t+\varphi)+\frac{k}{m}(A_1-A_2)\cos(\omega t+\varphi)=0$$

$$-A_2\omega^2\cos(\omega t+\varphi)+\frac{g}{l}A_2\cos(\omega t+\varphi)-\frac{k}{m}(A_1-A_2)\cos(\omega t+\varphi)=0$$

由此可得

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)A_1-\frac{k}{m}A_2=0$$

$$-\frac{k}{m}A_1+\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)A_2=0$$

这是关于 A_1 和 A_2 齐次线性方程组。该方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} g/l+k/m-\omega^2 & -k/m \\ -k/m & g/l+k/m-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

由此可解出简正模的简正频率② ω：

$$\omega_1=\sqrt{g/l},\ \omega_2=\sqrt{(g/l+2k/m)}$$

这正是我们前面得到的结果。最后，将耦合摆问题的解用简正模来表示，即式(0-16)和式(0-17)。

由此看出，这种解题方法的最大特点是：不直接求解耦合的质点组运动方程，相反，认定质点组有简单的集体运动形式——简正模。先将所有这些简正模求出来，再对其进行组合，就可以得到问题的全部解。

简正模分析为我们描述耦合质点组的运动提供了一种极为重要的方法。事实上，它也是迄今为止处理此类质点组最为有效的方法之一，是我们考察物质世界的一种新思路。我们既可以选择直接描述各个质点运动的方式，也可以选择描述简正模成分的方式(俗称频谱分析)，二者都同样地刻画了体系的运动情况；而后者是从一个不寻常的角度看问题，因此，是一种极具效率的方法，应用范围相当广泛，我们应予以足够的重视。

---

① 一般情况下，$A_1\neq A_2$。例如，非对称的耦合摆，两者频率相等，但摆长不等。

② 正因为如此，简正频率也叫本征频率(eigenfrequency)。