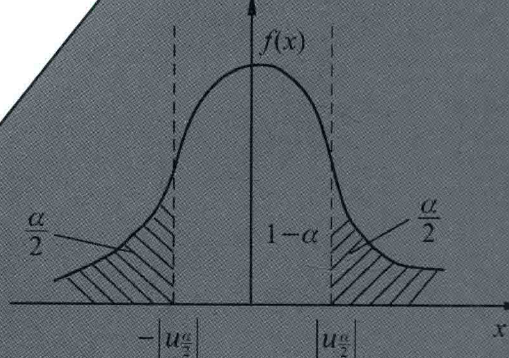
新世纪高等学校教材

（第2版）

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

王 芬 主 编
孙永平 陈珍培 林仁炳 副主编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

（第2版）

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

王 芬 主 编

孙永平 陈珍培 林仁炳 副主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王芬主编. —2 版. —北京：北京师范大学出版社，2015.6

ISBN 978-7-303-19404-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 186623 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　刷：北京中印联印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：730 mm×980 mm 1/16
印　张：15
字　数：252 千字
版　次：2015 年 6 月第 2 版
印　次：2015 年 6 月第 2 次印刷
定　价：30.00 元

策划编辑：胡廷兰　　责任编辑：邢自兴
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：陈　民　　责任印制：陈　涛

内容提要

本教材主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量及其独立性、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、参数估计、总体参数的区间估计、总体参数的假设检验、两个总体的统计推断、线性回归分析与方差分析初步。

本教材可作为应用型高校工科、经济、管理本科生概率论与数理统计课程的教材。教材中标记“ * ”的内容供对数理统计有要求的专业或者有兴趣的读者参考选用。

前 言

本教材着力于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论与基本方法，突出概率论与数理统计的基本思想方法和实际应用，强调概念的直观性和基本方法的应用性。本书的内容无论是概念还是定理都是从具体问题入手，由易及难循序渐进地展开讨论，具有较好的可读性。本教材编写遵循以下原则。

一、突出基础知识，弱化理论分析。根据应用型人才培养目标，在传统知识体系基本框架下，充分兼顾学生的学习基础与学习兴趣，介绍概率统计的基本知识与基本方法。

二、突出思想方法，弱化计算技巧。根据教育部高等学校数学与统计教学委员会制定的概率论与数理统计教学基本要求，对概率统计的基本思想进行全面介绍，对较为复杂的计算技巧予以弱化，教材内容安排上注意可读性与可教性。

三、突出实际应用，淡化抽象推导。正如前面指出，概率论与数理统计在实际中具有广泛应用，大到国民经济，小到日常生活。本教材安排了相当一部分来自工程技术与日常生活方面应用的例子。对于证明技巧较高的定理，我们只给出结论，对于理论推导有兴趣的读者，我们都指出其参考文献方便读者查阅。

四、突出数理统计，减少概率内容。根据应用型人才的实际需求，尽量多介绍数理统计的基本方法与应用，与同类教材相比适当压缩概率论的篇幅，增加数理统计实际应用的例题与习题，供大家模仿与练习。另外，从易学易用的角度出发，对数理统计部分的内容体系做了较大的调整。

本教材与同类教材相比，在内容安排与处理技巧方面具有以下特点。

第 1 章介绍概率论的基本概念。对随机事件的讨论，强调样本点与样本空间，淡化事件及其关系，从概率的公理化定义出发得出概率的加法法则，将概率的统计定义安排在第 1 章的附录中以供参考。对于古典概型只安排一些基本类型，不涉及复杂的计算。将全概率公式与贝叶斯公式合在一个定理中便于学生理解两者之间的联系。为了突出对独立事件的理解，将伯努利概型移到第 2 章与二项分布一起介绍。

第 2 章用密度函数来定义连续型随机变量，将分布函数内容安排在连续型随机变量之后，降低连续型随机变量的学习难度，这样可以在对随机变量认识比较充分的基础上学习随机变量的分布函数，有利于对分布函数的理解与掌握。

第 3 章重点介绍随机向量及其独立性，弱化随机向量的边缘分布。在介绍随机变量函数分布时，讨论的问题为后面统计量 t 分布，χ^2 分布，F 分布做了很好的铺垫。

第 4 章介绍随机变量的一些数字特征，以实际问题为背景，以学生的认知规律为核心，以数学期望为主线展开讨论。改变一般教材以知识的逻辑体系组织内容的传统写法，争取使读者在使用时易学易用，并安排一些具有时代气息的实际问题，增强内容的可读性、趣味性和实用性。

第 5 章讨论大数定律和中心极限定理，这部分内容弱化了理论推导，突出实际应用。

第 6 章将数理统计的基本概念与参数点估计的方法合在一起。在介绍样本均值和样本方差等样本矩后，接着介绍参数的矩法估计，使得学生既可以掌握矩法估计的方法、又可以理解样本矩的概念。在理解样本函数的基础上学习极大似然估计也成为顺理成章的事情。

第 7 章介绍单个总体参数区间估计。由于有第 3 章中随机变量函数分布的基础，本章就直接将统计量的分布与分位数结合确定相应参数的置信区间。将常用统计量分布分散在其他章节降低了学习难度。

第 8 章介绍单个总体参数假设检验。由于单参数的区间估计和单参数假设检验分别安排在前后章，且所涉及的统计量相同，这样便于理解和应用。

第 9 章介绍两个总体的统计推断。将两个总体的区间估计与假设检验放在同一章中，所用的统计量是相同的，便于掌握相关统计量的应用。

第 10 章介绍线性回归分析和方差分析初步。我们将最小二乘法与线性回归模型分开介绍，这样既有利于最小二乘法的掌握，也有利于线性回归模型的理解，克服了一般教材将两者结合介绍的弊端，增强知识系统的逻辑联系。最

后简单介绍了方差分析的初步应用。

本教材例题、习题连贯配套，例题、习题按难度递进安排，前后章节呼应。与同类教材相比安排较多的例题与习题，共计例题 143 题，习题 293 题，供学生练习参考。在数学教育界有一句话流传甚广，那就是美籍匈牙利数学家保罗·哈尔莫斯(Paul Halmos)的名言："The only way to learn mathematics is to do mathematics"(学习数学的唯一方法是做数学)，这句话对我们读者都有一定的启发。本教材相当一部分例题、习题直接取材于日常生活和工程技术领域的实际问题，具有较强的时代气息，能增强教材的趣味性与吸引力。

本教材不在书后附参考答案，目的是鼓励读者独立思考，解题思路不为答案左右。对于需要答案以检验自己课余学习成效的读者，请发邮件到 781916525@qq.com 来索取。

本教材由王芬、孙永平、陈珍培、林仁炳共同编写。其中第 2 章、第 4 章由王芬编写，第 9 章、第 10 章由孙永平编写，第 6 章、第 7 章、第 8 章由陈珍培编写，第 1 章、第 3 章、第 5 章由林仁炳编写。全书中的所有图形都由王芬、陈珍培使用 Matlab 等软件绘制，他们同时对全部内容进行认真仔细的校对，全书由王芬统稿。

本教材的编写过程中吸收和采用了国内同类教材(见书后参考文献)的部分例题与习题，不具体一一列出，在此向这些作者表示衷心的感谢。浙江科技学院薛有才教授和浙江大学王秀云副教授认真阅读了本书初稿并提出宝贵的意见与建议。本教材的编写同时还得到浙江树人大学教务处处长金劲彪教授的大力支持，并获得浙江树人大学第二批应用性教材建设项目资助。在整个编写过程中得到北京师范大学出版社胡廷兰编辑的支持与帮助，在此一并表示衷心的感谢。

本教材书稿虽然经过十几次的认真讨论修改及校对，但是仍会存在一些错误与不妥之处，恳请广大专家、同行和读者的批评与指正，使得本书在使用过程中不断完善。

编者

2015 年 5 月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率 /1

1.1 随机事件 …… 1

1.1.1 随机试验、样本点与样本空间 …… 1

1.1.2 随机事件的关系及运算 …… 3

◆习题 1-1 …… 4

1.2 古典概率模型 …… 5

◆习题 1-2 …… 8

1.3 概率的加法公式 …… 9

1.3.1 概率的公理化定义 …… 9

1.3.2 概率的加法公式 …… 9

◆习题 1-3 …… 10

1.4 条件概率与乘法公式 …… 11

1.4.1 条件概率 …… 11

1.4.2 乘法法则 …… 13

1.4.3 全概率公式与贝叶斯公式 …… 15

◆习题 1-4 …… 20

1.5 事件的独立性 …… 20

1.5.1 两个事件的独立性 …… 20

1.5.2 多个事件的独立性 …… 22

1.5.3 试验的独立性 …… 23

◆习题 1-5 …… 23

复习题 …… 24

第 1 章 附录 …… 26

第 2 章　随机变量及其分布 /28

2.1　随机变量的概念 …… 28
2.2　离散型随机变量 …… 29
2.2.1　离散型随机变量的概念 …… 29
2.2.2　两点分布和二项分布 …… 30
2.3.3　泊松分布 …… 32
◆习题 2-2 …… 35
2.3　连续型随机变量 …… 36
◆习题 2-3 …… 41
2.4　随机变量的分布函数 …… 43
2.4.1　分布函数的概念与性质 …… 43
2.4.2　正态分布的分布函数 …… 47
◆习题 2-4 …… 48
2.5　随机变量函数的分布 …… 49
◆习题 2-5 …… 52
复习题 …… 52

第 3 章　随机向量及其分布 /54

3.1　随机向量及其联合分布 …… 54
3.2　二维离散型随机向量及其独立性 …… 55
3.2.1　二维离散型随机向量 …… 55
3.2.2　二维离散型随机向量的独立性 …… 56
◆习题 3-2 …… 57
3.3　二维连续型随机向量及其独立性 …… 58
3.3.1　二维连续型随机向量 …… 58
3.3.2　二维连续型随机向量的边缘分布 …… 60
3.3.3　二维连续型随机向量的独立性 …… 61
3.3.4　常用的二维连续型随机向量 …… 61

◆习题 3-3 ······ 63
3.4 随机向量函数的分布 ······ 64
3.4.1 离散型随机向量函数的分布 ······ 64
3.4.2 连续型随机向量函数的分布 ······ 65
3.4.3 t 分布与 F 分布 ······ 69
3.4.4* $Z_1=\max\{X, Y\}$和 $Z_2=\min\{X, Y\}$的分布 ······ 70
◆习题 3-4 ······ 71
3.5 条件分布与条件密度* ······ 72
3.5.1 二维离散型随机向量的条件分布列 ······ 72
3.5.2 二维连续型随机向量的条件密度函数 ······ 74
◆习题 3-5 ······ 75
复习题 ······ 76

第 4 章 随机变量的数字特征 /78

4.1 数学期望 ······ 78
4.1.1 离散型随机变量及其函数的数学期望 ······ 78
4.1.2 连续型随机变量及其函数的期望 ······ 81
4.1.3 二维随机向量(X, Y)的函数的期望 ······ 84
4.1.4 数学期望的性质 ······ 85
◆习题 4-1 ······ 87
4.2 方差 ······ 89
4.2.1 方差的概念 ······ 89
4.2.2 方差的性质 ······ 89
◆习题 4-2 ······ 93
4.3 协方差与相关系数 ······ 94
4.3.1 协方差与相关系数定义 ······ 94
4.3.2 协方差与相关系数的性质 ······ 96
4.3.3* 协方差矩阵 ······ 97
4.3.4* 随机变量的矩 ······ 97

◆习题 4-3 …… 97
复习题 …… 98

第 5 章 大数定律与中心极限定理 /101
5.1 大数定律 …… 101
◆习题 5-1 …… 104
5.2 中心极限定理 …… 104
◆习题 5-2 …… 108
复习题 …… 108

第 6 章 参数估计 /110
6.1 数理统计的基本概念 …… 110
6.1.1 总体与个体 …… 110
6.1.2 样本与样本分布 …… 110
6.1.3 统计量 …… 111
◆习题 6-1 …… 113
6.2 参数的点估计 …… 113
6.2.1 矩法估计 …… 114
6.2.2 最大似然估计法 …… 117
◆习题 6-2 …… 121
6.3 估计量的评选标准 …… 122
6.3.1 无偏性 …… 122
6.3.2 有效性 …… 124
6.3.3 一致性 …… 124
◆习题 6-3 …… 126
复习题 …… 126

第 7 章 总体参数的区间估计 /128
7.1 正态总体均值的置信区间 …… 128

7.1.1 方差 σ^2 已知时均值 μ 的置信区间 …… 128
7.1.2 方差 σ^2 未知时均值 μ 的置信区间 …… 133
◆习题 7-1 …… 135
7.2 正态总体方差的区间估计 …… 136
◆习题 7-2 …… 139
7.3 正态总体参数的单侧区间估计 …… 140
◆习题 7-3 …… 144
7.4 大样本下非正态总体参数的区间估计* …… 144
7.4.1 正态逼近法 …… 144
7.4.2 比例 p 的置信区间 …… 145
◆习题 7-4 …… 147
复习题 …… 147

第 8 章 总体参数的假设检验 /149

8.1 假设检验的概念 …… 149
8.2 正态总体均值的假设检验 …… 151
8.2.1 总体方差 σ^2 已知时，均值 μ 的检验 …… 151
8.2.2 总体方差 σ^2 未知时，均值 μ 的检验 …… 155
◆习题 8-2 …… 157
8.3 正态总体方差的假设检验 …… 159
◆习题 8-3 …… 161
8.4 大样本下非正态总体的显著性检验* …… 162
8.4.1 正态逼近法 …… 162
8.4.2 比例 p 的检验 …… 163
◆习题 8-4 …… 164
复习题 …… 164

第 9 章 两个总体的统计推断 /166

9.1 两个正态总体参数的区间估计 …… 166

9.1.1 两个正态总体均值差的置信区间 …… 166
9.1.2 两个正态总体方差比的置信区间 …… 169
◆习题 9-1 …… 172
9.2 两个正态总体参数的检验 …… 173
9.2.1 两总体均值的显著性检验 …… 173
9.2.2 两总体方差的显著性检验 …… 175
◆习题 9-2 …… 177
复习题 …… 178

第 10 章 线性回归分析与方差分析初步 /180

10.1 数据的相关性 …… 180
10.1.1 样本相关系数 …… 181
10.1.2 相关性检验 …… 183
10.2 一元线性回归分析 …… 184
10.2.1 回归直线与最小二乘法 …… 184
10.2.2 一元线性回归模型 …… 187
10.2.3 回归模型参数的估计 …… 187
10.2.4 回归系数的假设检验 …… 189
10.2.5 预测的置信区间 …… 190
10.2.6 可线性化的回归分析 …… 192
◆习题 10-2 …… 196
10.3 方差分析* …… 197
10.3.1 问题的提出 …… 197
10.3.2 数学模型 …… 198
10.3.3 平方和分解 …… 200
10.3.4 检验方法 …… 201
◆习题 10-3 …… 204
复习题 …… 205

参考文献 /207

附表一　泊松分布表 /208

附表二　标准正态分布表 /210

附表三　t 分布上侧分位数表 /213

附表四　χ^2 分布上侧分位数表 /215

附表五　F 分布上侧分位数表 /219

附表六　相关系数显著性检验表 /223

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究不确定现象发生的规律性的学科. 20 世纪以来，它已经在工程技术、管理科学和经济活动等很多领域有着广泛应用. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验、样本点与样本空间

在一定条件下，对自然或社会现象进行的观察或实验称为试验，下面都是一些试验的例子.

掷一枚硬币，观察是否币值朝上.

掷一枚骰子，观察掷出的点数.

在一副扑克牌中随意抽出两张，观察是否得到数字或字母相同的一对.

这些例子比较简单，在我们今后的讨论中将多次提到.

在概率论中，把满足以下条件的试验称为随机试验(random experiment)，简称试验，记为 E.

(1)试验在相同条件下是可重复的；

(2)试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

(3)每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知.

在掷一枚硬币的试验中，用 ω_1 表示硬币币值朝上，用 ω_0 表示硬币币值朝下，试验有两个可能结果：ω_1 和 ω_0，我们称 ω_1 和 ω_0 为样本点，称全体样本点的集合 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$为试验的样本空间.

掷一枚骰子的试验中，用 1 表示掷出点数 1，用 2 表示掷出点数 2，依次类推，用 6 表示掷出点数 6，试验的可能结果是 1，2，3，4，5，6. 我们称这六个数字是试验的样本点，所有样本点的集合

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

或者

$$\Omega=\{\omega \mid \omega=1, 2, \cdots, 6\}$$

是试验的样本空间.

一般地，试验 E 的每一个结果称为样本点，用希腊字母 ω 表示，全体样本点的集合称为样本空间，用大写希腊字母 Ω 表示. 样本空间 Ω 的子集 $A(A\subset\Omega)$ 称为随机事件，简称事件(严格地说，事件是 Ω 中满足一定条件的子集合组成的集合类中的元素，对它的讨论超出本书的范围). 事件是概率论中最基本的概念，通常用大写字母 A，B，C 或 A_1，A_2，A_3 表示.

按照上述约定，试验中事件 A 发生与试验结果(样本点)$\omega\in A$ 是等价的. 用 $\overline{A}=\Omega-A$ 表示集合 A 的余集，则事件 A 不发生与试验结果(样本点)$\omega\in\overline{A}$ 是等价的. 为了简便，有时直接用 $A(A\subset\Omega)$表示 A 事件发生，而 $\overline{A}$ 表示事件 A 不发生.

注意：本书对于子集符号"$\subset$"和"$\subseteq$"不加区分，统一使用"$\subset$"，$A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集，不表示是真子集.

空集$\varnothing$是 Ω 的子集，由于$\varnothing$中没有样本点，永远不可能发生，所以$\varnothing$是不可能事件. Ω 也是样本空间Ω 的子集，它包含了所有的样本点，因而总是会发生的，我们称 Ω 是必然事件.

例 1　将一枚硬币连掷两次，不妨称币值的面为正面，另一面为反面，观察两次中出现正、反面的情况，写出试验的样本点与样本空间.

解　有 4 种结果，即 4 个样本点，样本点分别是

(正，正)，表示第一次正面出现，第二次也正面出现，

(正，反)，表示第一次正面出现，第二次反面出现，

(反，正)，表示第一次反面出现，第二次正面出现，

(反，反)，表示第一次反面出现，第二次也反面出现.

于是样本空间是

$\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$.

例 2　设从装有三个白球(记为 1，2，3 号)与两个黑球(记为 4，5 号)的袋中任取两个球. 观察取出的两个球的号码，写出试验的样本空间.

解　观察取出的两个球的号码，用 ω_{ij} 表示"取出第 i 号与第 j 号"球($1\leqslant i<j\leqslant 5$)，于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合

$$\Omega=\{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}\}.$$

注：本例中球的颜色对样本空间的构成没有影响，若 5 个球都是一样的颜色，样本空间 Ω 保持不变.

1.1.2 随机事件的关系及运算

由前面的讨论知，事件是样本空间的某个子集，事件经过集合运算得到的结果还是事件，即当A，B是事件，则

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A-B=A\cap\overline{B}$$

都是事件.

样本空间Ω是由试验E的所有可能结果构成的全集，样本点ω是Ω的元素，事件A就是Ω的子集. 这样事件的运算可以借用集合的运算符号表示. 例如：

1. $A=B$表示两个集合A，B相等；
2. $A\cup B$发生等价于A和B至少一个发生；
3. $A\cap B$发生等价于A和B都发生；
4. $A-B=A\cap\overline{B}$发生等价于A发生而B不发生；
5. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$发生表示至少有一个$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$发生，

   $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$发生表示至少有一个$A_i(i=1,2,\cdots)$发生；
6. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$发生表示$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$都发生，

   $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$发生表示$A_i(i=1,2,\cdots)$都发生.

我们也用AB表示$A\cap B$，当$AB=\varnothing$时，也用$A+B$表示$A\cup B$.

当事件$AB=\varnothing$，称事件A和B不相容，或者A和B互斥，即A和B不可能同时发生. 对于多个事件A_1，A_2，$\cdots$，两两不相容是指$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，也称互不相容，或者两两互斥. 若$AB=\varnothing$且$A+B=\Omega$，称A，B是互为对立事件，也称A是B对立事件，或者B是A对立事件. $\overline{A}$为A的对立事件，或者逆事件，显然$\overline{A}$和A是互斥的. 两个对立事件，一定是互斥的，两个互斥的事件，不一定对立.

事件的运算公式就是集合的运算公式，例如：

(1)$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$；

(2)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(AB)C=A(BC)$；

(3)$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4)$A\cup B=A+\overline{A}B$，$A=AB+A\overline{B}$；

(5)$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

对于多个事件的情形是$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$；$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.