中華大典

幾何總部

主編　李民芬

二 幾何總部

畫法幾何總部

三角總部

幾何總部

主編　李民芬

平面幾何部

題解

明·徐光啟《幾何原本·序》【略】《幾何原本》者度數之宗，所以窮方圓平直之情，盡規矩準繩之用也。利先生從少年時，論道之暇，留意藝學。且此業在彼中所謂師傳曹習者，其師丁氏，又絕代名家也，以故極精其說。而與不佞游久，講譚餘晷，時時及之，因請其象數諸書，更以華文。獨謂此書未譯，則他書俱不可得論，遂共翻其要，約六卷。既卒業而復之，由顯入微，從疑得信，蓋不用爲用，衆用所基，真可謂萬象之形囿，百家之學海，雖實未竟，然以當他書，既可得而論矣。私心自謂：不意古學廢絕二千年後，頓獲補綴唐虞三代之闕典遺義，其裨益當世，定復不小，因偕二三同志刻而傳之。先生曰：「是書也，以當百家之用，庶幾有羲和、般墨其人乎？猶其小者；有大用於此，將以習人之靈才，令細而確也。」余以爲小用大用，實在其人，如鄧林伐材，棟梁榱桷，恣所取之耳。顧惟先生之學，略有三種：大者修身事天，小者格物窮理，物理之一端別爲象數。一一皆精實典要，洞無可疑；其分解擘析，亦能使人無疑。而余乃亟傳其小者，趨欲先其易信，使人繹其文，想見其意理，而知先生之學，可信不疑，大概如是，則是書之爲用更大矣。

又徐光啟《幾何原本雜議》 下學工夫，有理有事。此書爲益，能令學理者祛其浮氣，練其精心；學事者資其定法，發其巧思，故舉世無一人不當學。聞西國古有大學，師門生常數百千人，來學者先問能通此書，乃聽入。何故？欲其心思細密而已。其門下所出名士極多。

能精此書者，無一事不可精；好學此書者，無一事不可學。

凡他事，能作者能言之，不能作者亦能言之；獨此書爲用，能言者即能作者，若不能作，自是不能言。何故？言時一毫未了，向後不能措一語，何由得妄言之。以故精心此學，不無知言之助。

凡人學問，有解得一半者，有解得十九或十一者，獨幾何之學，通即全通，蔽即全蔽，更無高下分數可論。

人具上資而意理疏莽，即上資無用；人具中材而心思縝密，即中材有用。能通幾何之學，縝密甚矣！故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也。

此書有四不必：不必疑，不必揣，不必試，不必改。有四不可得：欲脫之不可得，欲駁之不可得，欲減之不可得，欲前後更置之不可得。有三至、三能：似至晦實至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁實至簡，故能以其簡簡他物之至繁；似至難實至易，故能以易易他物之至難。易生于簡，簡生于明，綜其妙在明而已。

此書爲用至廣，在此時尤所急須，余譯竟，隨偕同好者梓傳之。利先生作敘，亦最喜其亟傳也，意皆欲公諸人人，令當世亟習焉。而習者蓋寡，竊意百年之後必人人習之，即又以爲習之晚也。而謬謂余先識，余何先識之有？

有初覽此書者，疑奧深難通，仍謂余當顯其文句。余對之：度數之理，本無隱奧，至于文句，即爾日推敲再四，顯明極矣。倘未及留意，望之似奧深焉，譬行重山中，四望無路，及行到彼，蹊徑歷然。請假旬日之功，一究其旨，即知諸篇自首迄尾，悉皆顯明文句。

幾何之學，深有益於致知。明此，知向所揣摩造作，而自詭爲工巧者皆非也。一也。明此，知吾所已知不若吾所未知之多，而不可算計也。二也。明此，知向所想像之理，多虛浮而不可挼也。三也。明此，知向所立言之可得而遷徙移易也。

此書有五不可學：躁心人不可學，麤心人不可學，滿心人不可學，妒心人不可學，傲心人不可學。故學此者不止增才，亦德基也。

昔人云「鴛鴦繡出從君看，不把金針度與人」，吾輩言幾何之學，政與此異。因反其語曰：「金針度去從君用，未把鴛鴦繡與人」，若此書者，又非止金針度與而已，直是教人開丱冶鐵，抽線造針；又是教人植桑飼蠶，湅絲染縷。有能此者，其繡出鴛鴦，直是等閑細事。然則何故不與繡出鴛鴦？曰：能造金針者能繡鴛鴦，方便得鴛鴦者誰肯造金針？又恐不解造金針者，菟絲棘刺，聊且作鴛鴦也！其要欲使人人真能自繡鴛鴦而已。

清·梅文鼎《幾何通解》以句股解《幾何原本》之根。 幾何不言句股，然其理並句股也。西人謂勾股爲直角三角形，譯書時，不能會通遂分途徑。故其最難通者，以句股釋之則明。惟理分中末綫似與句股異源。今爲游心於立法之初，而仍出於句股。信古九章之義，包舉無方。

用理分中末線説

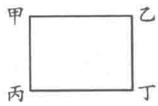
言西學者，以幾何爲第一義，而傳只六卷，其有所秘耶？抑爲義理淵深，翻譯不易，而姑有所待耶？《測量全義》言：有法之體五，其面其積皆等。其大小相容相抱，與球相似。《幾何》十一、十二、十三、十四卷諸題，極論此理。又《幾何》六卷言：理分中末線爲用甚廣，量體所必需，《幾何》十三卷諸題全賴之，古人目爲神分線。又言：理分中末線求法，見本卷三十題，而與二卷十一題同理。至二卷十一題，則但云無數可解，詳見九卷。其義皆引而未發。故雖有此線，莫適所用，疑之者十餘年，辛未歲養病山阿，游心算學，於量體諸法，稍得窺其奧，爰證《曆書》之誤數端，於十二等面二十等面，得理分中末之用，及諸體相容之確數，故以立方爲主，其内容十二等面邊得理分線之末，二十等面邊得理分線之中，反覆推求，了無凝滯，始信《幾何》諸法，可以理解。而彼之秘爲神授，及吾之屏爲異學，皆非得其平也。其理與法，詳《幾何補編》。

清・方中通《數度衍》卷首之三《幾何約》

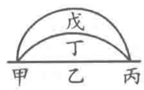
名目一

無長短廣狹厚薄，曰點。

點引爲線，有長而無廣。

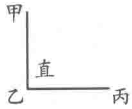


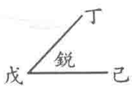
線展爲面，有長有廣。

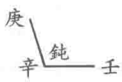


甲乙丙直線也，甲丁丙、甲戊丙曲線也。

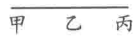
甲平面也，乙曲面也。







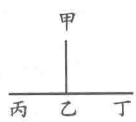
兩線相遇，作角甲乙丙爲直角，丁戊己爲鋭角，庚辛壬爲鈍角。



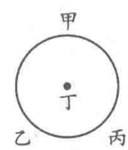
甲乙、乙丙兩線相遇不能作角，仍是直線也。

甲乙、乙丙兩線相遇不能作角，仍是曲線也。

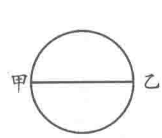
作角有三：有直，有曲，有雜。



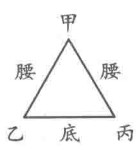
甲乙線爲丙丁之垂線，亦互爲垂線也。



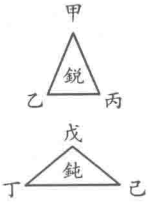
圜形甲乙丙也，外圓線爲圜之界，内中點爲圜之心。



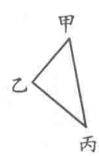
甲乙線爲圜徑，分爲兩半圜形。



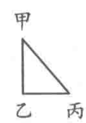
三邊形以乙丙在下者爲底，以甲乙、甲丙兩邊爲腰，三邊線俱等者，爲平邊三角形。

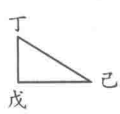


三邊形有兩邊線等，爲兩邊等三角形。



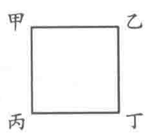
三邊形三線不等，爲三不等三角形。



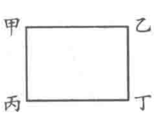


三邊形有一直角，爲三邊直角形。

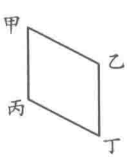
三邊形有一鈍角，爲三邊鈍角形。



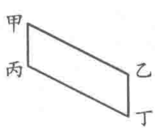
四邊形四線等，而角俱直，爲直角方形。



直角形其角俱直，而邊兩相等。

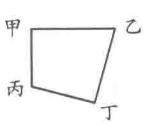


斜方形四邊等，但非直角。



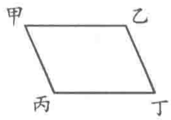
長斜方形其邊兩相等，但非直角。

已上四種俱謂有法四邊形。



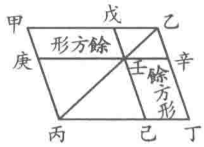
四邊不等謂之無法四邊形。

兩直線同面行，不相離、不相遇、不相遠，爲平行線。

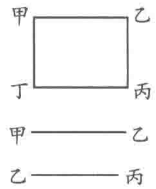


一形每兩邊有平行線，爲平行線方形。

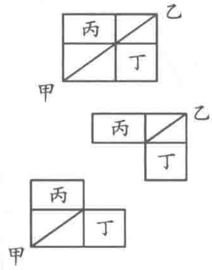
名目二



凡平行線方形，于兩對角作直線，名爲對角線。又于兩邊縱横各作平行線與對角線交羅相遇，即分此形爲四平行線方形。其有對角線者，爲角線方形。其無對角線者，爲餘方形。

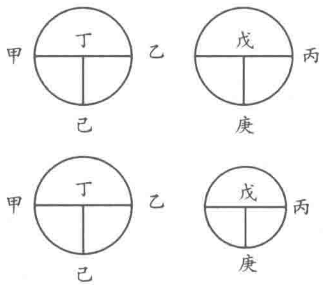


凡直角形之兩邊函一直角者，爲直角形之矩線也。如甲乙偕乙丙兩線爲直角形之矩線也。得矩線，即知直角形大小之度。

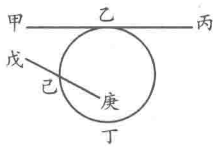


諸方形有對角線者，其兩餘方形任偕一角線方形爲磬折形，或偕乙、或偕甲。

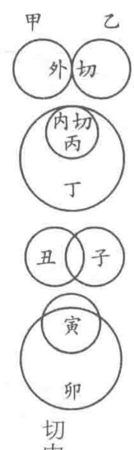
名目三



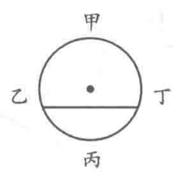
凡圜之徑線等，或從心至圜界線等爲等圜。如上圖，甲乙、乙丙兩徑等，或丁己、戊庚從心至圜界等，則兩圜必等。若下圖徑線不等，則兩圜亦不等。



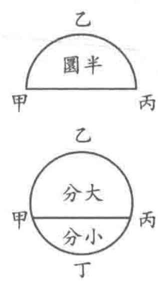
凡直線切圜界過之，而不與界交，爲切線。如甲乙線切乙己丁圜之界，乙又引長之至丙而不與界交，其甲丙線全在圜外，爲切線。若戊己線先切圜界，而引之至庚入圜內，則交線也。



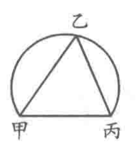
凡兩圜相切，如甲、乙切外，丙、丁切內，爲切圜。子、丑、寅、卯，爲交圜。



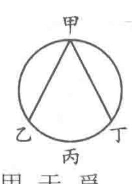
凡直線割圜爲圜分，過心者爲半圜分，函心爲圜大分，不函心爲圜小分。



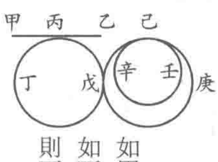
凡圜界偕直線內角爲圜分角，其在半圜分內爲半圜角，在大分內爲大分角，小分內爲小分角。



凡圜界任于一點出兩直線作角，爲負圜分角。



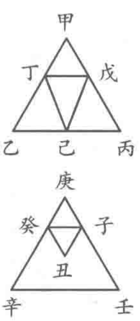
若兩直線之角乘圜之一分，爲乘圜分角。如甲乙丙丁圜內，于甲點出甲乙、甲丁兩線，其乙甲丁角爲乘乙丙丁圜分角。



或直線切圜、或兩圜相切于內、兩圜相切于外，皆爲切邊角。如甲乙線切丙丁戊圜于丙，則甲丙丁、乙丙戊兩角皆切邊角也。又如丙丁戊、己戊庚兩圜外切于戊，及己戊庚、己辛壬兩圜內切于己，則丙戊己、戊己辛、壬己庚三角皆切邊角也。

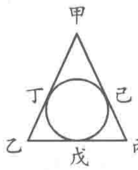
凡從圜心以兩直線作角，偕圜界作三角形，爲分圜形。如甲乙丙丁圜，從戊心出戊甲、戊丙兩線，偕甲丁丙圜界作角形爲分圜形也。

名目四

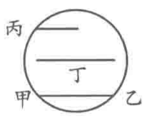


直線形居他直線形內，而此形之各角切他形之各邊，爲形內切形。如丁戊己形居甲乙丙形之內也。直線形居他直線形外，而此形之各邊切他形之各角，爲形外切形。如甲乙丙形居丁戊己形之外也。若子癸丑而丑不切辛壬邊，則不然，餘倣此。

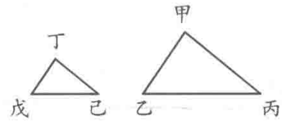
直線形之各角切圜之界爲圜內切形，如甲乙丙之相切也。反則爲形外切圜。

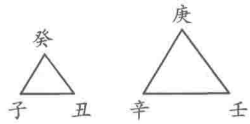


直線形各邊切圜界爲圜外切形。若圜界切直線形各邊，則爲形內切圜。

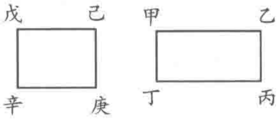


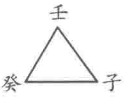
直線兩界抵圜界爲合圜線，如甲乙是也。若丙止一界抵丁，兩界俱不抵，則非也。

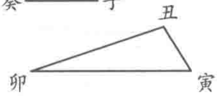




凡形相當之各角等，而各等角旁兩線之比例俱等，爲相似形。如甲乙丙、丁戊己兩角形之甲角、丁角等，乙與戊、丙與己各等，其甲角旁之甲乙與甲丙兩線之比例若丁角旁之丁戊與丁己兩線，而甲乙與乙丙若丁戊與戊己，甲丙與丙乙若丁己與己戊，則此兩角形爲相似形。因知平邊形皆相似形，如庚辛壬、癸子丑俱平邊角形，其各角俱等，各邊之比例亦等是也。四邊、五邊以上諸形倣此。



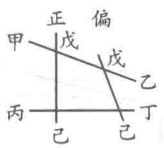




凡形之各兩邊線互爲前後率相爲比例而等，爲互相視之形。如甲乙丙丁、戊己庚辛兩方形，其甲乙、乙丙邊與戊己、己庚邊相爲比例等，而彼此互爲前後，如甲乙與戊己若己庚與乙丙也，則此兩形爲互相視之形。因知壬癸子、丑寅卯兩角形之壬子與丑寅若丑卯與壬癸，或壬癸與丑寅若丑卯與壬子，亦互相視之形也。

線說

有二橫直線，任加一縱線或正或偏，若三線之間同方兩角小於兩直角，則此二橫直線愈長愈相近，必至相遇。如甲乙、丙丁二橫直線，任意作戊己線交於二橫直線之上，而戊己線或正或偏，若戊己線旁同方兩角俱小於直角，或并之小於



兩直角，則甲乙、(兩)[丙]丁二線必有相遇之處。

兩直線不能爲有界之形。

兩直線止能於一點相遇。

凡圜內直線，從心下垂線，其垂線大小之度，即直線距心遠近之度。如甲乙丙丁圜內，甲乙線、丙丁線其去戊心遠近等，因己戊、戊庚兩垂線等故也。若辛壬線去戊心近矣，因戊癸垂線小故也。

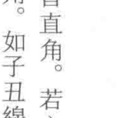
凡一點至直線上，惟垂線至近，垂線之兩旁漸遠。

平行方形不滿一線，爲形小於線。若形有餘、線不足，爲形大於線。

角說

凡直角俱相等。

直線上立垂線，則兩旁皆直角。若立偏線，則一爲鈍角，其一必爲銳角。如子丑線上，甲乙垂線也，丙丁偏線也。



清·李子金《幾何易簡集》卷一　《幾何要法》删注

幾何家者，西洋之法也。其目有四：曰點、曰線、曰面、曰體。線以度長短；面以度廣狹；體以度厚薄。而必自點始，點引爲線，線展爲面，面運爲體，于是幾何之論起焉。

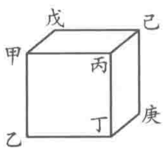
所謂點者，無長短、廣狹、厚薄。如圖，甲畢世積點不能結線。

•甲

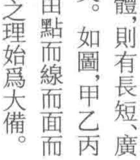
所謂線者，雖有長短而無廣狹、厚薄。如圖，甲乙畢世積線不能結面。

所謂面者，雖有長短、廣狹而無厚薄。如圖，甲乙丙丁畢世積面不能結體。

至于體，則有長短、廣狹、厚薄矣。如圖，甲乙丙丁戊己庚由點而線而面而體，而幾何之理始爲大備。

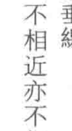


點無可論，以線論之，有直線、有曲線、有斜線、有橫線、有垂線、有平行線。曲直斜橫，人所易知。

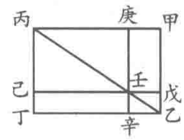


如圖，乙丁垂于甲丙橫線之上爲甲丙之垂線。

如圖，甲乙與丙丁兩線並行至于無窮，不相近亦不相遠，爲平行線。



凡形每兩邊各有平行線，爲平行方形。如甲乙丙丁平行方形，于乙丙兩角作一線爲對角線，又依乙丁平行作戊己線，依甲乙平行作庚辛線，其對角線與戊己庚辛兩線交羅相遇于壬，即作大小四平行方形矣。庚壬己丙及戊壬辛乙謂之角線方形，甲庚壬戊及丁己壬辛爲餘方形。



清・杜知耕《幾何論約》卷一之首

界説三十六則凡造論，先當分别解説論中所用名目，故作界説。

一界：點無長短廣狹厚薄。

二界：線有長短，無廣狹厚薄。線有曲有直。

三界：線之界是點。

四界：直線止有兩端，兩端之間上下更無一點。

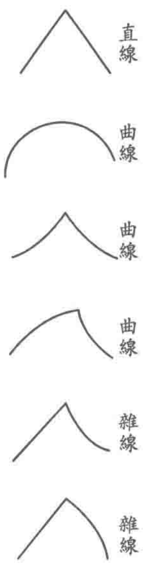
五界：面有長短、廣狹，而無厚薄。

六界：面之界是線。

七界：平面一面平在界之内。

八界：（平角）兩直線于平面縱横相遇處，如甲乙、乙丙兩線所作，不以線之大小較論。凡言角，連用三字，中間一字爲所指之角。如稱甲乙丙角乃指乙角而言也。

九界：直線相遇作角爲直線角，本書中所論皆是直線角。角有三等：一直線角，二曲線角，三雜線角。

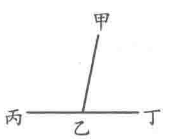


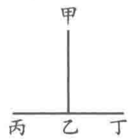
十界：甲乙縱線加丙丁横線上乙左右作兩角相等而直，角方中矩曰直。則甲乙爲丙丁之垂線。

十一界：凡角大于直角曰鈍角。如甲乙丙角。

十二界：凡角小于直角曰鋭角。如前圖甲乙丁角。

十三界：界者，一物之始終。今所論有三界：點爲線之界；線爲面之界；面爲體之界；體不可爲界。





十四界：形或在一界，如平圓、立圓等形。或在多界之間。如平方、立方及平立三角、六角、八角等形。

十五界：圜自界至心，任作幾許直線，俱等。

十六界：圜之中處爲心。

十七界：自圜之一界作一直線過中心至他界爲圜徑，徑分圜爲兩平分。

十八界：徑線與半圜界所作形爲半圜。

十九界：在直線界中之形爲直線形。

二十界：在三直線界中之形爲三邊形。

二十一界：在四直線界中之形爲四邊形。

二十二界：在多直線界中之形爲多邊形。

二十三界：三邊形三邊線等，爲平邊三角形。

二十四界：三邊形兩邊線等，爲兩邊等三角形。

二十五界：三邊形三邊俱不等，爲三不等三角形。

二十六界：三邊形有一直角，爲三邊直角形。

二十七界：三邊形有一鈍角，爲三邊鈍角形。

二十八界：三邊形三角皆鋭，爲三邊鋭角形。凡三邊形，恒以在下者爲底，兩旁者爲腰。

二十九界：四邊形四邊俱等而角直，爲直角方形。

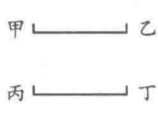
三十界：直角形，其角皆直，其邊兩兩相等。

三十一界：斜方形四邊等，而非直角。

三十二界：長斜方形，其邊兩兩相等，而非直角。

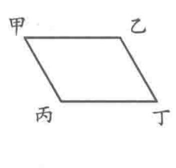
三十三界：已上四種謂之有法四邊形，四種之外他方形皆謂之無法四邊形。

三十四界：兩直線如甲乙、丙丁兩線。于同面，行至無窮不相離，亦不相遠，而不相遇，爲平行線。



三十五界：一形每兩邊有平行線，甲丙與乙丁平行，甲乙與丙丁平行。爲平行方形。

三十六界：凡平行方形于對角作直線，又于兩邊縱横各作平行線，過對角線于壬，即分此形爲四平行方形，其兩形有對角線者，己辛、庚戊兩形。爲角線方形；其兩形無角線者，丁壬、壬乙



兩形。爲餘方形。甲乙丙丁方形，今止稱爲丁乙方形，省文也。

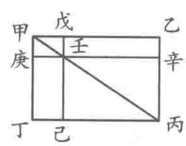
求作四則求作者，不得言不可作。

一求：自此點至彼點求作一直線。

二求：一有界直線，求從一界引長之成一直線。

三求：不論大小以點爲心求作圜。

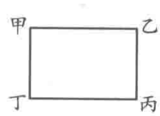
四求：設一度于此，求作彼度較此度或大或小。凡言度者，或線、或面、或體皆是。



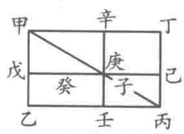
又　卷二之首

界說二則

一界：凡直角形之兩邊函一直角者，爲直角形之矩線。如甲乙偕乙丙函甲乙丙直角，得此兩邊，即知直角形大小之度。若別作兩線與甲乙、乙丙各等，亦知丁乙直角形大小之度，則兩線爲直角形之矩線。



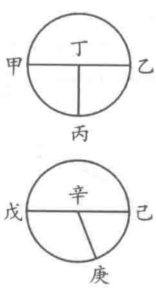
二界：諸方形有對角線者，其兩餘方形任偕一角線方形爲磬折形。如乙丁方形，不論斜直作甲丙對角線，從庚點作戊己、辛壬兩線與方邊平行，而分本形爲四方形。其辛己、戊壬爲餘方形，辛戊、己壬爲角線方形，兩餘方形任與壬己一角線方形并，形曲如磬，謂之癸子庚磬折形。用戊辛角線方形，倣此。



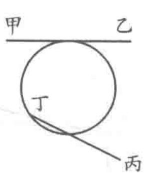
又　卷三之首

界說十則

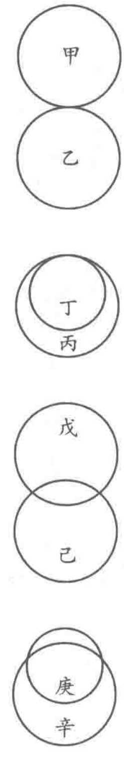
一界：凡圜之徑線等，或從心至圜界線等爲等圜。如甲乙、戊己兩徑等，或丁丙、辛庚從心至圜界等，即兩圜等。



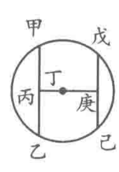
二界：凡直線切圜界過之，而不與界交，爲切圜線。甲乙在圜外爲切圜線，若丙丁入圜內則交線也。



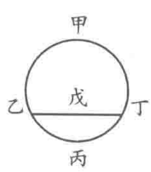
三界：凡兩圜相切而不相交，爲切圜。甲、乙兩圜相切于外，丙、丁兩圜相切于內，俱曰切圜。戊己、庚辛則交圜也。



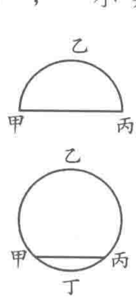
四界：凡圜內直線從心下垂線，其垂線大小之度即直線距心遠近之度。如甲乙距丁心近，則丙丁垂線小。戊己距心遠，則丁庚垂線大。



五界：凡直線割圜之形，爲圜分。如丁乙線割圜，其乙甲、丁乙、丙丁皆爲圜分。圜分有三等：過心者爲半圜分；函心者爲圜大分，不函心者爲圜小分。又割線爲弦，圜分爲弧。



六界：凡圜界偕直線作角，爲圜分角。其在半圜內爲半圜角；在大分內爲大分角；在小分內爲小分角。

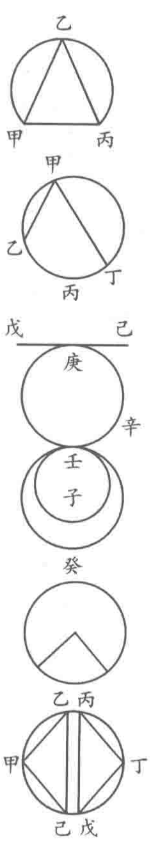


七界：凡圜界任于一點出兩直線作一角，爲負圜分角。甲乙丙圜分甲丙爲底，于乙點出兩直線作甲乙丙角，爲負甲乙丙圜分角。

八界：若兩直線之角乘圜之一分，爲乘圜分角。甲乙丙丁圜內，于甲點出甲乙、甲丁兩線，作乙甲丁角，爲乘乙丙丁圜分角。圜角三種之外，又有一種爲切邊角。或直線切圜，如己庚辛；或兩圜相切于外，如辛壬癸；或兩圜相切于內，如癸壬子，俱爲切邊角。

九界：凡從圜心以兩直線作角偕圜界爲三角形，曰分圜形。

十界：兩負圜角相等，即所負之圜分相似。甲乙己與丁丙戊兩負圜分角等，則所負丙丁戊與乙甲己兩圜分相似。又兩圜或不等，其負圜分角等，即兩圜分相似。相似者，同爲幾分圜之幾也。



又　卷四之首

界說七則

一界：此直線形居他直線形內，此直線形爲他直線形內切形。

二界：此直線形居他直線形外，此直線形爲他直線形外切形。

三界：圜內直線形以各角切圜界，爲圜內切形。

四界：圜外直線形以各邊切圜界，爲圜外切形。

五界：直線形內圜圜界切直線形之各邊，爲形內切圜。

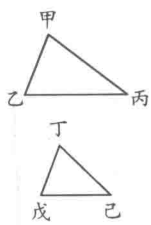
六界：直線形外圜圜界切直線形之各角，爲形外切圜。

七界：直線之兩端各抵圜，爲合圜線。如甲乙、丙丁兩線俱爲合圜線。而戊己、辛庚兩線或至界，或不至界，或俱不至界，皆不得爲合圜線。

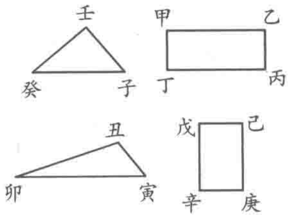
又　卷六之首

界說六則

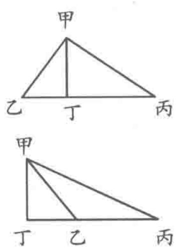
一界：凡形相當之各角等，而各等角旁兩線之比例俱等，爲相似之形。如兩角形之甲、乙、丙三角與丁、戊、己三角俱等，其甲角旁之甲乙與甲丙，若丁角旁之丁戊與丁己，餘兩等角旁之各兩線其比例俱等，則兩角形爲相似之形。依顯，平邊角形皆相似之形。



二界：兩形之各兩邊線互爲前後率，相與爲比例而等，爲互相視之形。如兩方形之甲乙與戊己，若己庚與乙丙。而彼此互爲前後率，則此兩形爲互相視之形。依顯，兩角形之壬子與丑寅，若丑卯與壬癸，則兩形亦爲互相視之形。

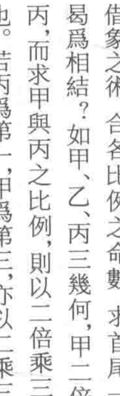


三界：理分中末線，一線兩分之，其全與大分之比例，若大分與小分。此線爲用甚廣，主量體尤所必需，古人目爲神分線也。



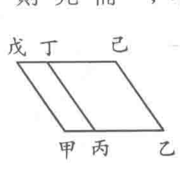
四界：度各形之高，皆以垂線之亘爲度。如甲乙丙角形作甲丁垂線，即甲丁爲甲乙丙角形之高度。

五界：比例以比例相結，以各比例不同理而相聚爲一比例，則用相結之法、借象之術、合各比例之命數，求首尾一比例之命數也。



曷爲相結？如甲、乙、丙三幾何，甲二倍于乙，乙三倍于丙，而求甲與丙之比例，則以二倍乘三倍得甲六倍于丙也。若丙爲第一，甲爲第三，亦以二乘三得丙反六倍于甲也。若四率，則先以前三率之兩比例結爲一比例，復與第三比例相結也。若五率，則以第一、第二、第三率之兩比例相結，以第三、第四、第五率之兩比例相結，又以此所結之兩比例乘除相結而爲一比例也。自六以上，倣此。曷謂借象？如前所說，三幾何二比例皆以中率爲關紐，畧如連比例之同用一中率也。有不同理二比例，而異中率者是不同理之斷比例也。無法可結，當別立三幾何二比例，而同中率以中率當第二，又當第三。乘除相結，依倣求之。如所設幾何十六爲首，十二爲尾，却云十六與十二之比例，若八與三及二與四之比例。八爲前之前、四爲後之後、三與二爲前之後、後之前，所謂異中率也。欲乘除相結無法可通矣，用是別立三幾何，則三其八得二十四爲前，三其三得九爲前之後，即以九爲後之前，以求九與何數，若二與四，得十八爲後。其二十四與九，若八與三也；九與十八，若二與四也，則十六與十二，若二十四與十八也。三比例以上，倣此遞結之。

六界：平行方形不滿一線，爲形小于線；若形有餘線不足，爲形大于線。如甲丁形不滿甲乙線，而丙乙半線上無形，即作甲己滿甲乙線上方形，則甲丁爲依甲乙線之有闕方形，而丙己爲甲丁之闕形。又甲丙線上作甲己形，其甲乙邊大于元設甲丙線，之較爲丙乙，而甲己形大于甲丙線上之甲丁形，則甲己爲依甲丙線之帶餘方形，而丙己形爲甲己之餘形。



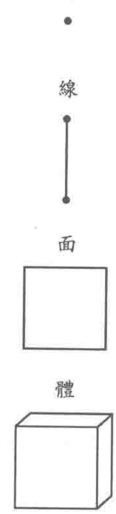
清・《數理精蘊》上編卷二

《幾何原本》一

第一

凡論數度，必始於一點。自點引之而爲線，自線廣之而爲面，自面積之而爲體，是名三大綱。是以有長而無闊者，謂之線；有長與闊而無厚者，謂之面；長與闊厚俱全者，謂之體。惟點無長闊厚薄，其間不能容分，不可以數度。然線之

兩端即點，而線面體皆由此生。點雖不入於數，實爲衆數之本。



第二

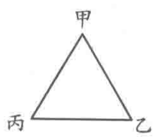
線有直曲兩種。其二線之一端相合，一端漸離，必成一角。二線若俱直者，謂之直線角。一線直一線曲者，謂之不等線角。二線俱曲者，謂之曲線角。

第三

凡角之大小，皆在於角空之寬狹。出角之二線，即如規之兩股，漸漸張去，自然開寬。是以命角不論線之長短，止看角之大小。如丙角兩線雖長，其開股之空狹，遂爲小角。若丁角兩線雖短，其開股之空寬，遂成大角矣。

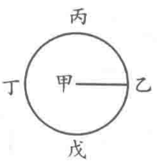
第四

凡命角，必用三字爲記。如甲乙丙三角形，指甲角，則云乙甲丙角；指乙角，則云甲乙丙角；指丙角，則云甲丙乙角是也。亦有單舉一字者，則其所舉之一字，即是所指之角也。如單言甲角、乙角、丙角之類。



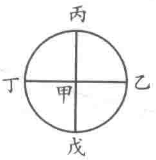
第五

凡有一線，以此線之一端爲樞，復以此線之一端爲界，旋轉一周，即成一圜。如甲乙一線，以甲端爲樞，乙端爲界，旋轉復至乙處，即成乙丙丁戊之圜。此圜線謂之圜界，圜界內所積之面度謂之圜面。



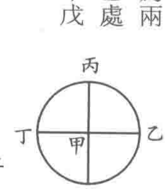
第六

凡圜界不拘長短，其分界之所即爲弧線。如乙丙丁戊之圜，丙至丁、丁至戊俱爲弧線，因其形似弧，故名之。



第七

凡圜自一界過圜心至相對之界畫一直線，將一圜爲兩平分，則爲圜徑。如乙丙丁戊之圜，以甲爲心，自圜界乙處過甲心至丁，或自圜界丙處過甲心至戊畫乙甲丁及丙甲戊線，皆爲圜徑也。



第八

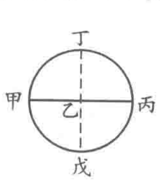
凡自圜心至圜界作幾何線，皆謂之輻線。其度俱相等，因平分全徑之半，故又謂之半徑線。

第九

凡圜界，皆以所對之角而命其弧。而角，又以所對之弧而命其度。蓋角度俱在圜界，而圜界爲角度之規也。如乙角爲心，甲丙爲界，則乙角相對之界即甲丙弧，而甲丙弧即乙角之度也。

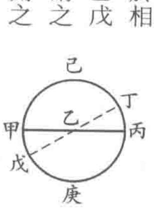
第十

凡角相對之弧得圜界四分之一者，此角必直，故謂之直角。如甲丁丙戊之圜，甲乙丙之徑自中心乙至圜界丁畫一半徑，將半圜界又分爲兩平分，則成甲乙丁、丙乙丁之二角。此二角各得圜界四分之一，則此二角爲直角也。若自丁界過乙心至圜界戊處畫一直線，又成丁乙戊之徑，復得甲乙戊、丙乙戊兩相等之直角矣。故凡畫一直線，交於別線，其所成之角若直，此線謂之垂線。蓋因平分圜界爲四，其四弧相對之四角必相等，而皆爲直角，則其二徑相交必互爲垂線可知矣。



第十一

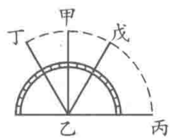
凡角相對之弧不足圜界四分之一者，謂之鋭角。若過四分之一者，謂之鈍角。故自圜徑中心復畫一輻線，而不平分半圜之界，則成一鋭角、一鈍角。如甲己丙庚之圜，於甲乙丙之徑自乙心至甲己丙之半圜界，不兩平分於丁處畫一輻線，遂成丙乙丁一鋭角、甲乙丁一鈍角。再將丁乙線引於相對圜界戊處，畫一丁乙戊徑線，復成甲乙戊一鋭角、丙乙戊一鈍角。合前二角，總爲四角矣。故凡二角兩尖相對，謂之對角。二角兩尖相並，謂之並角。如甲乙戊、丙乙丁二角之



兩尖相對，即謂之對角。丙乙戊、甲乙丁二角之兩尖亦相對，故亦謂之對角也。如丙乙戊、甲乙戊之二角兩尖相並，而同出一線，則謂之並角矣。

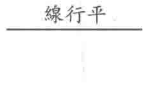
又 第十七

凡大小圜界俱定爲三百六十度，而一度定爲六十分，一分定爲六十秒，一秒定爲六十微，一微定爲六十纖。夫圜界定爲三百六十度者，取其數無奇零便於布算，即徵之經傳亦皆符合也。易曰：凡三百有六十當期之日。邵子曰：三百六十中分之得一百八十爲二至二分相去之數。度下皆以六十起數者，以三百六十，乃六六所成，以六十度之，可得整數也。凡有度之圜界，可度角分之大小。如甲乙丙角欲求其度，則以有度之圜心置於乙角，察乙丙、乙甲之相離可以容圜界之幾度，如容九十度，即是甲乙丙直角。何以知爲直角？因九十度爲全圜三百六十度之四分之一，前言：凡角得圜界四分之一者爲直角，故知其爲直角也。若過九十度者，爲丁乙丙鈍角。不足九十度者，爲丙乙戊鋭角。觀此三角之度，其餘可類推矣。



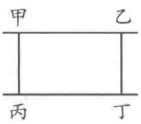
第十八

凡二線之間寬狹相離之分俱等，則此二線謂之平行線也。



第十九

欲求平行線之間相距幾何，則自上一線不拘何處至下一線畫二縱線，則此二線爲相距度分也。如甲乙、丙丁二線平行，自上線甲、乙二處至下線丙、丁二處畫二縱線，則此二線爲相等線，其度必等。然則甲乙、丙丁相對之間，其相距之遠近不已見耶。



《幾何原本》二

第一

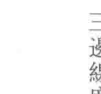
凡各種界所成俱謂之形。其直界所成者爲直界形；曲界所成者爲曲界形。凡直界所成各形未有少於三角形界者，故三角形爲諸形之首。

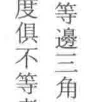
第二

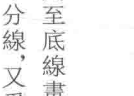
凡三角形，一角直者爲直角三角形；一角鈍者爲鈍角三角形；三角俱鋭者爲鋭角三角形。

第三

凡三角形，其三邊線度等者爲等邊三角形；兩邊線度等者爲兩等邊三角形；三邊線度俱不等者爲不等邊三角形。

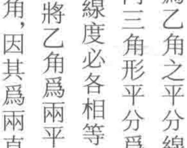






又 第十

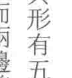
有兩邊相等之三角形，自上角至底線畫一直線，將底線爲兩平分，則此線爲上角之平分線，又爲底線之垂線也。如甲乙、丙乙兩邊線度相等之甲乙丙三角形，自上角乙至底線丁畫一直線，將甲丙底線爲兩平分，則爲乙角之平分線，又爲甲丙底線之垂線也。蓋乙丁線將乙甲丙三角形平分爲甲乙丁、丙乙丁兩三角形，此兩三角形之各界線度必各相等。而各角之度又俱相等，則甲乙丁角、丙乙丁角將乙角爲兩平分矣。而甲丁乙角、丙丁乙角又爲相等之兩直角，因其爲兩直角，故乙丁線爲平分甲丙底線之垂線也。

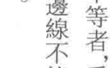


《幾何原本》三

第一

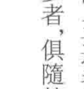
凡四邊線函四角者，其形有五。四邊線度等，而角度亦等者，爲正方形；四角直而兩邊線短、兩邊線長者，爲長方形；四邊線度等，而角度不等者，爲等邊斜方形；兩邊線長、兩邊線短，而角度又不等者，爲兩等邊斜方形。以上四形，俱自平行線出。如四邊線不等，亦不平行，而四角度又不等者，爲不等邊斜方形。

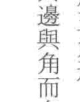




又 第十三

凡等邊等角各形內，五邊者爲五角形；六邊者爲六角形；邊愈多角愈多者，俱隨其邊與角而名之焉。



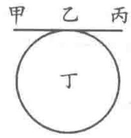


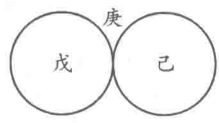
《幾何原本》四

第一

凡有直線切於圜界，而不與圜界相交者，謂之切線。如甲乙丙線切於丁圜乙界，其線雖自甲過乙至丙，而與圜界不出入相交，此甲乙丙線即爲圜之切線

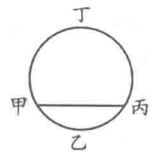
也。又如一圜與一圜界相切而不相交，則謂之切圜。假如戊圜與己圜於庚界相切，二界總未相交，故又謂之切圜也。





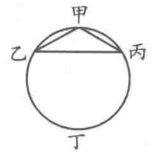
第二

凡一直線橫分圜之兩界，謂之弦線。其所分圜界之一段謂之弧，此弧與弦相交所成之二角謂之弧分角。如甲丙線橫分甲乙丙丁圜界於甲丙，則甲丙線爲弦，其所分之甲丁丙一段、甲乙丙一段皆謂之弧，而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙、丙甲乙二角即謂之弧分之角焉。



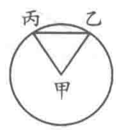
第三

凡自一圜弦線之兩頭復作二直線，相遇於圜界之一處，其所成之角，謂之圜分内角，又謂之弧分相對之界角也。如甲乙丁丙圜之甲乙丙一段，自乙丙弦線之兩頭各作一直線於甲處相遇，其所成之乙甲丙角即圜分内角，然此甲角與乙丁丙弧相對，故又爲弧分相對之界角也。



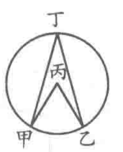
第四

凡一圜有二輻線，截弧之一段，所成之三角形，謂之分圜面形。如甲圜自甲心至圜界乙、丙二處作甲乙、甲丙二輻線，所成之甲丙乙三角形即爲分圜面形也。



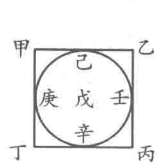
又 第十

一圜界内，任於圜界一段至圜心作二線，至圜界作二線，即成二角。在圜心者爲心角；在圜界者爲界角。設如甲乙丁圜，自甲乙一段至丙心作甲丙、乙丙二線，仍自甲乙至丁界作甲丁、乙丁二線，成甲丙乙、甲丁乙二角。其甲丙乙角爲心角，甲丁乙角爲界角也。



又 第十七

凡函圜各界形之各線，與圜界相切而不相交，則謂之函圜切界形。如甲乙丙三角形之甲乙、乙丙、丙甲三界線，俱在庚圜界之丁、己、戊三處相切而不相交，故謂之函圜切界三角形。又若甲乙丙丁四方形之甲乙、乙丙、丙丁、丁甲四界線，俱在戊圜界之己、庚、辛、壬四處相切而不相交，則謂之函圜切界四邊形。觀此二圖，則知函圜各界形必大於所函圜界形之分矣。



第十八

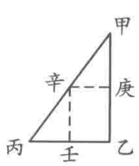
凡圜内直界形之各角，止抵圜界而不割出，則謂之圜内所函各邊形。如甲乙丙三角形之甲角、乙角、丙角，俱與丁圜界相抵而不曾割出，即謂之圜内所函三角形。又如甲乙丙丁四方形之甲角、乙角、丙角、丁角，俱與戊圜界相抵而不割出，則謂之圜内所函四邊形。觀此二圖，則知函於圜界各界形必小於圜界形之分矣。

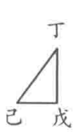
又 上編卷三

《幾何原本》八

第三

凡大小兩三角形，其相當之二角度若兩兩相等，則其餘一角亦必相等，如此類兩三角形謂之同式三角形也。雖其内容積分不同，而其相當各界互相爲比，俱爲相當比例之率焉。如甲乙丙、丁戊己大小兩三角形，其甲角與丁角等，乙角與戊角等，則所餘丙角必與己角等，而爲同式三角形也。二卷第三節言：凡三角形之三角相併，與二直角等，則此大小兩三角形之各三角相併，亦俱爲二直角。於二直角中減去大形之甲角、乙角，餘爲丙角。減去小形之丁角、戊角，餘爲己角。其所減之數既等，則所餘之數亦必等矣。若於大形内與乙丙平行作庚辛線，與甲乙平行作辛壬線，則成甲庚辛、辛壬丙兩小三角形。此兩小形之相當角度與大形之相當角度亦必俱等，故皆謂之同式形也。凡同式之形，其容積雖不一，而其各界互相

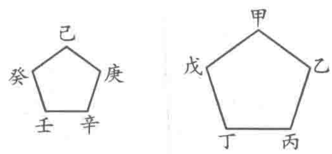


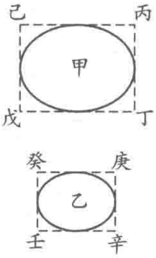


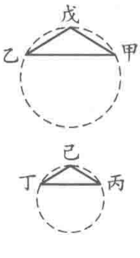
爲比，皆爲相當比例之四率。是故以大三角形之甲乙全線與所截甲庚一段之比，即如大三角形之甲乙一邊與小三角形之相當丁戊一邊之比也。大三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比，即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之相當丁己一邊之比也。大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比，即如大三角形之乙丙底線與小三角形之戊己底線之比也。至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比，亦如甲乙丙大三角形與丁戊己小三角形相當各界之比也。由此推之，凡同式之形，其相當各界互相爲比，皆爲相當比例之率可知矣。

又　第六

有衆多邊形，其邊數同，相當各角俱等，而相當界之比例又同，則謂之同式形也。如有甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸大小兩多邊形，其邊數俱爲五，其相當甲、己二角，乙、庚二角，丙、辛二角，丁、壬二角，戊、癸二角各度俱等，而甲乙邊與己庚邊之比，即同於乙丙邊與庚辛邊之比。其相當邊互相比之俱同者，即謂之同式多邊形也。又如衆曲線形，於其内外作各種直界形，其式若同，則謂之同式曲線形也。假如有甲、乙大小兩曲線形，在甲大形内作一丙丁戊己庚五邊形，在乙小形内作一辛壬癸子丑五邊形，此所作兩五邊形之式若同，則曲線形之式必同。又如甲、乙大小兩曲線形，在甲大形外作一丙丁戊己四邊形，在乙小形外作一庚辛壬癸四邊形，此所作兩四邊形之式若同，其曲線形之式亦必同，故皆謂之同式曲線形也。或如甲乙、丙丁大小兩圜分，於大圜分内作一戊甲乙三角形，於小圜分内作一己丙丁三角形，此所作兩三角形之式若同，則圜分之式亦必同，故謂之同式圜分也。

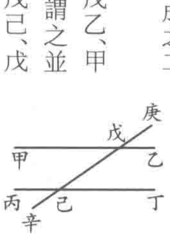






清·莊亨陽《幾何原本舉要》　凡角度皆起於圓心而見於圓界。圓不論大小俱有三百六十度之數，度有六十分，分有六十秒，秒有六十微，微有六十纖，自此以下又有不盡之數分之，故執有度之圓界爲凡角大小之規也。

二平行線若作一斜線交加於上，則二横線内外所成之二角俱爲相等。



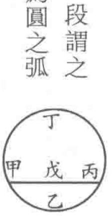
在平行線上作一斜直線即成八角，此八角之庚戊乙、甲戊己兩相等角謂之對角；甲戊庚、庚戊乙兩角同心謂之並角；庚戊乙、戊己丁二角相等角一邊謂内外角；甲戊己、戊己丁二角相等，其尖錯交，謂相對錯角；庚戊乙、丁己辛二角之等角一邊謂之外角；乙戊己、丁己戊二角之相等角一邊謂之内角。八角之中，半鈍、半鋭各自相等。推之三平行線、四平行線皆然也。

四邊形有五種：一四方形邊角俱等也；一長方形角等而兩邊長兩邊短也；若四邊等而角兩鈍兩鋭者謂斜方形；又兩邊長兩邊短而角兩鈍兩鋭者謂長斜方形；若四邊不等四角又不等者謂無法形。

凡四邊平行線形，其角之各兩對角必俱相等。於對角作線，分爲兩三角形，是爲對角線必將平行線四邊形分爲兩平分。

凡一直線切於圓界，雖長過界而不與圓界出入交加，此謂之切線。又兩圓之圓界相遇相切，而不相交加出入，謂之切圓。

凡一直線横分圓界謂之弦，如戊。所分圓界之一段謂之弧。如甲乙丙弦線與弧線相遇處成兩形，如甲乙丙俱爲圓之弧分之角。



凡自弦之兩頭作兩線，外向圓界相遇，此角名爲圓分内角，又謂對弧立角。

自圓心作二輻線至弧線成三角形，謂之分圓面形。

三角俱抵圓邊者界角也；一角居心，二角抵邊者心角也。大小三角形每每相當，角若等，則其積雖異而其形爲同，謂同式三角形也。再有一三角形，自此形分之出一庚子癸三角形，又出一子丑壬三角形，此所分出兩形與原形每每相當，角俱等，亦謂同式形也。