21世纪大学公共数学系列教材

微积分

● 吕 炜 费祥历 亓 健 编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

微积分

吕　炜　费祥历　亓　健　编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分/吕炜，费祥历，亓健编著—北京：中国人民大学出版社，2017.9
21 世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-24557-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①吕… ②费… ③亓… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 134251 号

21 世纪大学公共数学系列教材
微积分
吕 炜 费祥历 亓 健 编著
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　次**	2017 年 9 月第 1 版
印　张	29	**印　次**	2017 年 9 月第 1 次印刷
字　数	693 000	**定　价**	56.00 元

前 言

微积分是大学经济管理类各专业重要的基础课。当代经济学、管理学理论的一个突出特点是定量化、信息化，本质上是数学化，诺贝尔经济学奖的获奖工作大部分与数学应用相关。

微积分的主要研究对象是函数，函数是表达量之间关系的基本数学模型。微积分是以极限为工具研究函数的微观性质和宏观性质，主要包括函数的极限、连续、变化率、微分、微分方程与差分方程、各类积分和函数的逼近。通过微积分的学习培养学生以变化的、辩证的观点看待问题、分析问题和解决问题，养成逻辑思维、量化思维、模型思维的数学素养，并为学习专业课和进一步发展打下坚实的知识基础。它在培养学生的计算能力、分析解决问题的能力以及逻辑思维能力和综合素质方面都发挥了重要作用，是现代经济学科人才培养必不可少的一部分。

本教材依据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会2014年版《大学数学课程教学基本要求》，适度结合全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲的要求进行编写，突出针对经济管理类专业的高等数学教材的特点，保持微积分理论体系的严谨性、完整性。概念的引入、理论体系的建立体现了研究式、问题引导的学习思想，应用例题的选取以及练习题的选择充分考虑了数学思想方法、基本技能的掌握和经济应用，为学生进一步学习专业课打好基础。

中国石油大学作为能源行业国家重点大学，从1953年建校不久后的1956年就设立了经济管理类专业，历来十分重视基础课教学及教材建设，本书被列为学校“十三五”规划教材。在编写过程中，许晓婕、陈永刚、李洪芳等老师对本书提出了很多宝贵的意见，并对本书中的例题和练习题进行了验算。

本书在编写过程中参考了大量国内外教材和教学研究成果，未一一列出，中国人民大学出版社李丽娜编辑对本教材的编写花费了大量精力，借此一并表示感谢。

限于编者水平和理念的不同，书中不当之处在所难免，敬请同行和读者批评指正，以利改进。

编者

2017年7月12日

21世纪大学公共数学系列教材

目 录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

1.1　函数的概念 …… 1

1.2　初等函数 …… 15

1.3　经济学常用函数 …… 23

1.4　数列的极限 …… 27

1.5　函数的极限 …… 38

1.6　无穷小量与无穷大量 …… 45

1.7　极限的运算 …… 50

1.8　函数的连续性与间断点 …… 57

第一章习题答案与提示 …… 66

第二章　导数与微分 …… 70

2.1　导数的概念 …… 70

2.2　导数的计算 …… 77

2.3　高阶导数 …… 86

2.4　几种特殊类型函数的求导方法 …… 90

2.5　函数的微分 …… 95

2.6　导数概念在经济学中的应用 …… 100

第二章习题答案与提示 …… 106

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 110

3.1　微分中值定理 …… 110

3.2　洛必达(L'Hôpital)法则 …… 119

3.3　泰勒公式与函数的高阶多项式逼近 …… 125

3.4 函数的单调性与凹凸性 …… 131
3.5 函数的极值及其求法 …… 138
3.6 函数的最值及其应用 …… 142
3.7 函数图形的描绘 …… 147
第三章习题答案与提示 …… 151

第四章 一元函数积分学 …… 155
4.1 定积分的基本概念和性质 …… 155
4.2 不定积分的概念与性质 …… 163
4.3 牛顿-莱布尼茨公式 …… 170
4.4 不定积分的换元积分法 …… 175
4.5 不定积分的分部积分法 …… 184
4.6 定积分的计算 …… 191
4.7 广义积分 …… 201
4.8 定积分的应用 …… 209
第四章习题答案与提示 …… 220

第五章 微分方程和差分方程初步 …… 226
5.1 微分方程的基本概念 …… 226
5.2 一阶微分方程 …… 231
5.3 可降阶的高阶微分方程 …… 240
5.4 二阶线性微分方程 …… 245
5.5 微分方程应用举例 …… 257
5.6 简单差分方程及其应用 …… 264
第五章习题答案与提示 …… 275

第六章 向量代数与空间解析几何初步 …… 279
6.1 空间直角坐标系 …… 279
6.2 向量的概念及其线性运算 …… 283
6.3 向量的数量积与向量积 …… 292
6.4 曲面及其方程 …… 298
6.5 空间曲线及其方程 …… 307
6.6 平面及其方程 …… 312
6.7 空间直线及其方程 …… 320
第六章习题答案与提示 …… 328

第七章 多元函数微分学 …… 332
7.1 多元函数的极限与连续 …… 332
7.2 偏导数 …… 341

7.3 全微分 …… 348
7.4 多元复合函数的求导法则 …… 352
7.5 隐函数求导法 …… 358
7.6 多元函数的极值及其求法 …… 362
第七章习题答案与提示 …… 373

第八章 多元函数积分学 …… 377
8.1 二重积分的概念与性质 …… 377
8.2 二重积分在直角坐标系下的计算法 …… 385
8.3 二重积分在极坐标系下的计算法 …… 392
8.4 二重积分的应用 …… 404
第八章习题答案与提示 …… 412

第九章 无穷级数 …… 415
9.1 常数项级数的基本概念与性质 …… 415
9.2 常数项级数的审敛法 …… 422
9.3 幂级数 …… 433
9.4 函数展开成幂级数 …… 441
第九章习题答案与提示 …… 452

第一章

函数、极限与连续

微积分的主要研究对象是函数.函数是数学中的一个极其重要的概念,是学习高等数学、应用数学和其他科学技术必不可少的基础.而极限是微积分的主要研究工具.本章将在中学数学的基础上介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函数的概念

1.1.1 集合

集合是现代数学的一个基本概念,可以说现代数学几乎全部是建立在集合理论基础之上的.根据集合论的创始人——德国数学家康托尔对集合的描述,我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫作**集合**,简称**集**.把组成某一集合的各个对象叫作这个集合的**元素**.

习惯上,我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就记为 $a\in A$,读作 a **属于** A;如果 a 不是集合 A 的元素,就记为 $a\notin A$ 或 $a\bar{\in} A$,读作 a **不属于** A.

由数组成的集合叫作**数集**.高等数学主要在实数范围内讨论各种问题,为了方便起见,我们通常用 N,Z,Q 和 R 分别表示自然数集、整数集、有理数集和实数集.并且,如果上述数集中的元素只限于正数,就在集合符号的右上标处记为"+"号;如果数集中的元素都是负数,就在集合符号的右上标处记为"-"号.例如,正有理数集用 Q^+ 表示,负整数集用 Z^- 表示.

由点组成的集合叫作**点集**.因为实数与数轴上的点是一一对应的,有序实数对与平面直角坐标系内的点也是一一对应的.所以我们可以用数轴上的点所组成的点集来表示实数集,用平面直角坐标系内的点所组成的点集来表示有序实数对所组成的集合.

如果集合只包含有限个元素，这样的集合称为**有限集**，否则称为**无限集**.

集合一般可以用两种方法表示. 一种是**列举法**，即列举出集合所含的全部元素，表示为 $A=\{a,b,\cdots,x,y\}$；一种是**描述法**，用集合 A 的元素所具有的共同性质 $p(x)$ 来确定 x 是否属于 A，表示为 $A=\{x|p(x)\}$，即 $x\in A$ 的充要条件是 x 具有性质 $p(x)$.

例如，$\{0,2,4,6,8\}$，$\{x|x-2=0\}$，$\{x|0<x\leqslant 2\}$ 等都是集合. 特别地，集合 $\{x|x^2+1=0, x\in R\}$ 不含任何元素，称为**空集**，记为 $\varnothing$.

只含有一个元素的集合叫作**单元素集**. 例如集合 $\{0\}$.

为叙述方便起见，我们把至少含有一个元素的集合叫作**非空集合**.

注意：集合 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 是两个不同的概念.

设 A,B 是两个集合，如果 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，就称 A 是 B 的**子集合**. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A **包含于** B 或 B **包含** A. 集合 X 的所有子集合的集合称为 X 的**幂集合**，记为"$P(X)$"，即 $P(X)=\{A|A\subset X\}$. $P(X)$ 的子集称为 X 的**集族**，记为 $\{A_i|A_i\subset X, i\in I\}$，$I$ 是某个指标集.

对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称集合 A 和集合 B **相等**，记为 $A=B$. 显然，两个集合相等意味着两个集合有完全相同的元素.

集合的运算主要包括以下几种：

集合 A 与 B 的**并**：$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

集合 A 与 B 的**交**：$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

集合 A 与 B 的**差**：$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

集合 A 与 B 的**直积**：$A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}$，是由 A 中元素 x 作为第一分量、B 中元素 y 作为第二分量的有序对 (x,y) 所构成的集合.

例如，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，$A\cap B=\{1\}$，$A-B=\{2\}$，$B-A=\{3,5\}$，$A\times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5)\}$.

上述运算还可以推广到多个集合的情形. 例如，设 $\{A_i|A_i\subset X, i\in I\}$ 是 X 的一个集族，则

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x|\text{对某个 } i\in I, x\in A_i\}.$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x|\text{对每个 } i\in I, x\in A_i\}.$$

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

特别是，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 记为 A^n.

例如，设 R 是实数轴，则 $R^2=\{(x,y)|x,y \text{ 为任意实数}\}$ 是坐标平面.

一般地，如果我们研究的某个问题限定在一个大集合 I 中，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集合，此时就称 I 为**全集**，$I-A$ 称为 A 的**余集**或**补集**. 记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=I-A$.

集合的并、交、余运算满足下列运算法则.

设 A,B,C 为任意三个集合，则下列法则成立：

(1)**交换律**　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)**结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)**分配律**　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4)**对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上这些法则可根据集合相等的定义直接验证,从略.

1.1.2　常量与变量

在实际问题中,我们经常会遇到各种各样的量,如长度、质量、产量、价格、时间、速度等.在某个过程中,如果一个量只能取一个固定的数值,这个量就称为常量;如果一个量可以取不同的数值,这个量就称为变量.

定义 1　在某个过程中,数值保持不变的量称为**常量**,数值不断变化的量称为**变量**.

例如,取一块铁加热,则铁块质量不变,而铁块的温度、体积在变.因此,在这一铁块加热的过程中,质量是常量,温度、体积是变量.再如,圆的面积 A 和它的半径 r 之间的关系为 $A=\pi r^2$,其中 π 是常量,而 A 和 r 都是变量.

一个量是常量还是变量,随着所考虑的问题不同,可能会有变化.例如,某种商品的价格在较短的时间段内是一个常量,而在较长的时间段内是一个变量.常量可以看成特殊的变量.

对于常量与变量,就数值关系来说,某一过程中常量只能取某一固定数值,而变量可以取不同数值,因此常量又称常数.变量又称变数.通常用字母 a,b,c 等表示常量.用字母 x,y,z 等表示变量.在几何上,如果一个数 a 是常数,则用数轴上的一个定点表示;如果 x 是变数,则用数轴上的一个动点表示.

1.1.3　连续变量的变化范围的表示方法

任何变量都有一定的变化范围.例如,某天的最高温度是 14℃,最低温度是 3℃,那么,这一天温度 t 的变化范围是 3～14(℃).

如果变量的变化是连续的,那么我们常用区间来表示变量的变化范围.例如,如果变量 x 的变化范围在 a 与 b 两实数之间,即 $a<x<b$,那么,相应的动点就在数轴上的点 a 与点 b 之间变化,这些点构成一个不包括端点在内的线段(见图 1.1(a)),我们称之为开区间,并以记号 (a,b) 来表示.正像我们把数 a 称为点 a 一样,我们也常把满足不等式 $a<x<b$ 的实数集称为开区间.类似地,称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数集为闭区间,记做 $[a,b]$(见图 1.1(b)),称满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数集为半开半闭区间,分别记为 $(a,b]$(见图 1.2(a))或 $[a,b)$(见图 1.2(b)).

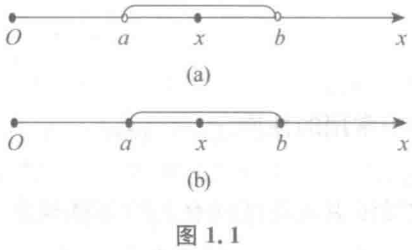


图 1.1

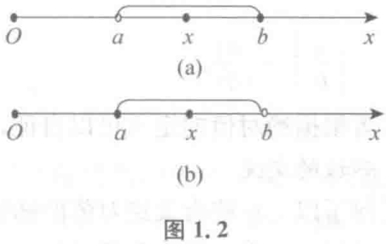


图 1.2

除了上述那些有限区间外，还有一类区间称为无限区间. 开区间$(-\infty,+\infty)$表示全体实数，也可以用不等式表示成$-\infty<x<+\infty$；$[a,+\infty)$表示不小于a的全体实数，有时也写成$a\leqslant x<+\infty$或$x\geqslant a$；$(-\infty,b)$表示小于b的全体实数，有时也写成$-\infty<x<b$或$x<b$. 区间$(-\infty,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$都称为无穷区间，在数轴上的表示分别如图1.3(a)、(b)、(c)所示.

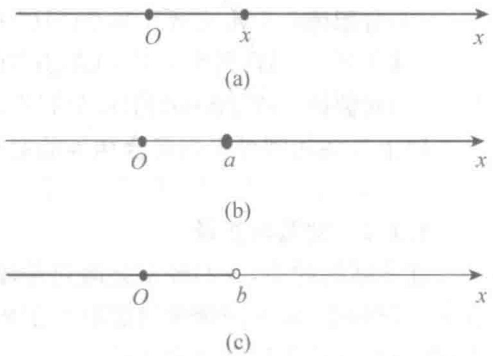


图 1.3

读者可类似地理解区间$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$的含义.

注意：$+\infty$，$-\infty$分别读作"正无穷大"与"负无穷大"，它们不是数，仅仅是个记号.

1.1.4 绝对值与邻域

1. 绝对值的定义

定义 2 任意实数a的绝对值用符号"$|a|$"表示，定义为$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$. 由定义可知，任何一个实数$a$的绝对值是非负的，显然有$|a|=\sqrt{a^2}$，$|-a|=|a|$.

就几何意义而言，$|a|$表示数轴上点a与原点间的距离.

由绝对值的定义还可以得到

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|. \tag{1—1}$$

带有绝对值的不等式$|a|<r$与$-r<a<r$是等价的，即若$|a|<r$，则有$-r<a<r$；反之，若$-r<a<r$，则有$|a|<r$. 从几何上看这是非常显然的，因为$|a|<r$表示点a与原点的距离小于r. 同理可知，绝对值不等式$|x-a|<r$与$a-r<x<a+r$是等价的.

2. 绝对值的性质

关于绝对值的性质，有下面的定理.

定理 1 对于任意两个实数a和b，有

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|, \tag{1—2}$$

$$|a|-|b|\leqslant |a-b|, \tag{1—3}$$

$$|ab|=|a|\,|b|, \tag{1—4}$$

及

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}. \tag{1—5}$$

读者根据绝对值的定义可以自证，这些都是数学中常用的性质.

3. 邻域的定义

了解了以上一些有关绝对值的知识以后，我们就可以引入与区间有关的邻域概念了，这些概念对以后的学习是十分重要的.

定义 3 设x_0与δ是两个实数，且$\delta>0$，满足不等式

$$|x-x_0|<\delta \tag{1—6}$$

的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径，在不需要指明半径 δ 时记为 $U(x_0)$.

上述不等式(1—6)与不等式 $-\delta<x-x_0<\delta$ 是等价的，因此有

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta. \tag{1—7}$$

从而，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，所以说，点 x_0 的 δ 邻域也就是以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间(见图 1.4).

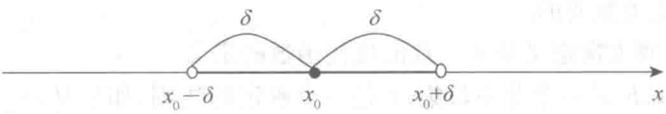


图 1.4

开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 分别称为 x_0 的左邻域和右邻域.

另外，我们称集合 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

例 1 求点 2 的 $\delta=0.1$ 邻域.

解 点 2 的 $\delta=0.1$ 邻域可表示为 $U(2,0.1)$，用不等式表示为 $|x-2|<0.1$，也可表示为 $2-0.1<x<2+0.1$，即 $1.9<x<2.1$.

图 1.5 画出了这个开区间，动点 x 位于这个开区间内时，动点 x 与定点 2 之间的距离小于 0.1.

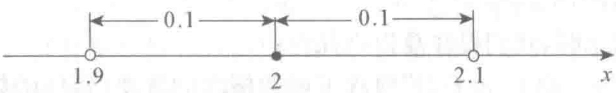


图 1.5

例 2 解绝对值不等式

$$|x|>x \tag{1—8}$$

解 当 $x\geqslant 0$ 时，根据绝对值定义 $|x|=x$，代入式(1—8)有 $x>x$，这是不可能的，故没有任何正实数满足此式.

当 $x<0$ 时，由 $|x|=-x$，代入式(1—8)并移项，得

$$2x<0,$$

即 $$x<0.$$

于是式(1—8)的解为 $x<0$，即一切负实数均满足式(1—8).

1.1.5 函数的概念

函数是一个非常重要的数学概念，也是微积分这门课程研究的主要对象. 可以这样说，整个微积分课程的主要内容就是研究各类函数(包括初等函数和非初等函数，显函数和隐函数等)的各种性质，特别是函数的分析性质，例如连续性、可微性、可积性、逼近等.

人们对于函数的认识经历了一个漫长的历史过程，17 世纪引入的绝大部分函数，在函

数概念还没有被充分认识之前，是当作曲线研究的. 英国数学家格里高里(Gregory, 1638—1675)曾经对函数给出了一个在当时比较清楚的定义. 他说函数是这样的一个量：它是一些其他量经过一系列代数运算而得到的，或者经过任何其他可以想象的运算而得到的. 在后人看来，格里高里的这个定义太窄，因而很快被人遗忘了. 18 世纪，占统治地位的函数概念是：函数是一个由解析表达式所给出的式子. 直到 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1809)才对函数给出了一个与现代函数的定义十分接近的定义. 他说：如果对于给定区间上的每一个 x 的值，都有唯一的 y 值与其对应，则 y 就是 x 的一个函数. 狄利克雷还强调，在整个区间上，y 是否按一种或多种规律依赖于 x，以及 y 依赖于 x 的方式能否用数学表达式来表示，都是无关紧要的.

下面给出与狄利克雷定义基本一致的现代函数的定义.

定义 4 设 $D\subset R$ 是一个非空数集，f 是一个确定的法则，如果 $\forall x\in D$，通过法则 f，存在唯一的 $y\in R$ 与 x 相对应，则称由 f 确定了一个定义于 D 上，取值于 R 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，f 称为**函数关系**. 为了叙述方便，我们也常常把“函数 $y=f(x)$，$x\in D$”简称为“函数 $f(x)$”或者“函数 f”.

如果自变量取某一个数值 x_0 时，函数有确定的值 y_0 和它对应，就称函数在 x_0 处有定义，y_0 称为函数 f 在 x_0 处的**函数值**，即 $y_0=f(x_0)$.

为了区分不同的函数，在需要同时讨论多个函数时，可选用不同的字母表示对应关系，例如，$f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$，$h(x)$等。也可以选其他字母表示自变量与因变量，例如，成本函数 $C=C(p)$，面积函数 $A=A(r)$等.

在理解函数的概念时，我们要注意以下几点：

(1)函数的记法“$y=f(x)$，$x\in D$”包含了函数概念的重要信息：函数建立了两个变量 x 和 y 之间的关系，x 是自变量，D 是函数的**定义域**，定义域表示自变量的变化范围，y 是因变量，它随着 x 的变化根据对应关系 f 而变化. 当自变量取遍定义域中的所有值时，对应的函数值的全体叫作函数的**值域**，通常用集合 $\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 表示. 对应法则 f 和定义域 D 是函数的两个要素，f 和 D 确定后，函数就唯一确定了. 换句话说，设有两个函数 $y=f(x)$，$x\in D_1$ 和 $y=g(x)$，$x\in D_2$，那么，如果 $D_1=D_2$(定义域相同)，并且对于每个 $x\in D_1=D_2$，$f(x)=g(x)$(对应法则相同)，它们就表示相同的函数.

(2)确定函数的定义域通常按如下两种情形考虑. 对于实际问题，是根据问题的实际意义具体确定. 例如，自由落体运动 $h=\frac{1}{2}gt^2$，其定义域应为$[0,T]$，其中 T 为自由落体落地的时刻. 一般地，经济学中的自变量常常取正值. 对于由解析式给出的一般函数，函数的定义域指的是使函数的表达式有意义的自变量的变化范围(称为函数的**自然定义域**). 由于我们是在实数范围内讨论函数，求函数的自然定义域的基本原则是：负数不能开偶次方，即$\sqrt[2k]{u}\Rightarrow u\geqslant 0$；分式的分母不能为零，即$\frac{v}{u}\Rightarrow u\neq 0$；对数的真数必须大于零，即$\log_a u\Rightarrow u>0$；反正弦与反余弦函数 $\arcsin u$，$\arccos u\Rightarrow |u|\leqslant 1$.

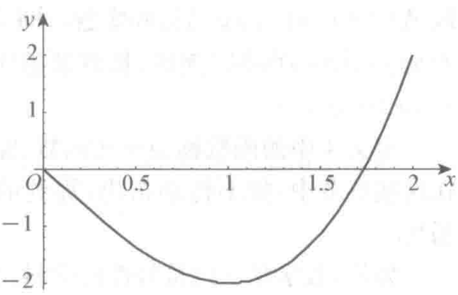
(3)设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，在平面直角坐标系中，点集

$$G(f)=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的图形,也叫作函数的**图像**. 如图 1.6 所示.

比函数概念更一般的是关系和映射的概念.

设 A,B 是两个集合. 我们把直积 $A\times B$ 的子集合 $T\subset A\times B$ 称为由 A 到 B 的一个(二元)关系. 如果 $(x,y)\in T$,就称 x 与 y 有 T 关系,记为 xTy,或者 $y\in T(x)$,y 称为 x 在 T 下的**像**,x 称为 y 在 T 下的**原像**.



$y=x^3-3x,\ 0\leqslant x\leqslant 2$

图 1.6

例如,设 Z^+ 是正整数集合,定义 Z^+ 到 Z^+ 的三个关系,分别为

$$T_1\subset Z^+\times Z^+:T_1=\{(x,y)\mid x=y\};$$
$$T_2\subset Z^+\times Z^+:T_2=\{(x,y)\mid x\text{ 整除}y\};$$
$$T_3\subset Z^+\times Z^+:T_3=\{(x,y)\mid x\leqslant y\};$$

则 T_1,T_3 分别是通常的相等和小于等于关系,T_2 是正整数的整除关系.

设 T 是 X 到 X 的关系(称为 X 上的关系),称 T 具有:

反身性:如果 $\forall x\in X,xTx$;

对称性:如果 $\forall x,y\in X,xTy\Leftrightarrow yTx$;

反对称性:如果 $\forall x,y\in X,xTy$ 且 $yTx\Rightarrow x=y$;

传递性:如果 $\forall x,y,z\in X,xTy$ 且 $yTz\Rightarrow xTz$.

容易看出,前面我们定义的 Z^+ 上的三个关系 T_1,T_2,T_3 都具有反身性、反对称性与传递性.

如果 X 上的关系 T 具有反身性、对称性和传递性,就称 T 是 X 上的一个**等价关系**;如果 X 上的关系 T 具有反身性、反对称性和传递性,就称 T 是 X 上的一个**偏序关系**. 如果 T 是 X 上的一个偏序关系,且 $\forall x,y\in X,xTy$ 和 yTx 中至少一个成立(称为 x 与 y 可比较),就称 T 是 X 上的一个**全序**. 例如,前面我们定义的 Z^+ 上的三个关系中,T_1 是 Z^+ 上的等价关系,T_2,T_3 都是 Z^+ 上的全序关系. 序的概念在我们日常生活中有着广泛的应用,例如在经济学的效用理论中我们常常需要对人们消费商品的满意度进行排序.

定义 5 设 A,B 是两个集合,且 $A\neq\varnothing$,如果关系 $f\subset A\times B$ 满足条件: $\forall x\in A$,存在唯一的 $y\in B$ 使得 $(x,y)\in f$,就称 f 为从 A 到 B 的**映射**. 记为 $f:A\to B$ 或 $y=f(x),x\in A$.

关系 $f\subset A\times B$ 是映射的充分必要条件是:

(1) $\forall x\in A,\exists y\in B$ 使 $(x,y)\in f$,即 A 中每个元素都有像;

(2) 如果 $(x,y_1)\in f,(x,y_2)\in f$,则 $y_1=y_2$,即 A 中每个元素的像唯一.

集合 A 称为 f 的定义域,$f(A)=\{y\in B\mid \exists x\in A$ 使 $y=f(x)\}$,称为 f 的值域. 一般地,$f(A)\subset B$.

如果 $f(A)=B$,即 $\forall y\in B,\exists x\in A$ 使 $f(x)=y$,就称映射 f 是**满射**;如果 $\forall x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,就称 f 是**单射**;如果 f 既是单射又是满射,就称 f 是**双射**,或者一一对应.

显然,当 $A\subset R,B\subset R$ 时映射就是定义 4 中的函数,因此,定义 4 中的函数可简记为 $f:D\to R$. 例如,如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上,可记为 $f:[a,b]\to R$. 在映射的定义中,

取 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 是某些实数$\}$，即 A 是某个平面点集，$B=R$，则 f 为二元函数，记为 $z=f(x,y),(x,y)\in A$. 例如，长方形的面积 S 是关于长 x 和宽 y 的二元函数，$S=f(x,y)=xy,x>0,y>0$.

定义 4 中的函数称为一元函数. 除第七章和第八章以外我们主要讨论一元函数，因此，在这些章节中，如不特别指出，提到的函数均指一元函数. 第七章和第八章主要讨论多元函数.

另外，数学是一门符号性的学科. 它经常用一些简洁的符号来表示数学概念、陈述数学命题，使叙述更加严密、思维更加经济. 本书的许多地方使用以下四个逻辑符号：$\forall$，$\exists$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$.

符号“$\forall$”表示“对任意一个”“对每一个”，例如，“$\forall \varepsilon>0$”表示“对任意一个正实数 ε”，“$\forall x\in A$”表示“对每一个属于 A 的 x”；符号“$\exists$”表示“存在”，例如，“$\exists \delta>0$”表示“存在正实数 δ”；“$A\Rightarrow B$”表示“如果 A 成立，则 B 成立”，其中 A 叫作 B 的充分条件，B 叫作 A 的必要条件，例如，“$x>0\Rightarrow x^2>0$”；“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 的充要条件是 B”“A 等价于 B”，例如，“$x=0\Leftrightarrow x^2=0$”.

例 3 设 $f(x)=\ln(2-x)+\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$，求函数 $f(x)$ 的定义域，计算函数值 $f(1)$，求出表达式 $f(x-1)$.

解 要使得 $f(x)$ 有意义，$\ln(2-x)$，$\sqrt{x+1}$，$\dfrac{1}{x}$ 三项必须同时有意义，因而 x 必须且只需满足关系式 $2-x>0,x+1\geqslant 0,x\neq 0$，从而

$$\begin{cases}2-x>0\\ x+1\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<2\text{ 且 }x\neq 0\Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,2),$$

因此，该函数的定义域为 $D=[-1,0)\cup(0,2)$.

$$f(1)=\ln(2-1)+\sqrt{1+1}+\frac{1}{1}=1+\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}f(x-1)&=\ln(2-(x-1))+\sqrt{(x-1)+1}+\frac{1}{x-1}\\&=\ln(3-x)+\sqrt{x}+\frac{1}{x-1},\quad x\in[0,1)\cup(1,3).\end{aligned}$$

例 4 试判断：

(1)函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 和函数 $f_2(x)=x+1$ 是否相等；

(2)函数 $g_1(x)=x^2$ 与 $g_2(x)=x^2(\cos^2x+\sin^2x)$ 是否相等.

解 (1)函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\in R\mid x\neq 1\}$，函数 $f_2(x)=x+1$ 的定义域为全体实数 R，定义域不同，从而是不同的函数。注意，虽然 $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$，但这个化简过程是在 $x\neq 1$ 的前提条件下进行的.

(2)函数 $g_1(x)=x^2$ 与 $g_2(x)=x^2(\cos^2x+\sin^2x)$ 的定义域都是全体实数 R，因此定义域相同.

由三角函数的恒等式,对任意的实数 x,$\cos^2x+\sin^2x=1$,从而,$g_2(x)=x^2(\cos^2x+\sin^2x)=x^2=g_1(x)$. 因此,虽然从表达式表面来看,$g_1(x)$与 $g_2(x)$的形式有很大的不同,但本质上 $g_1(x)$与 $g_2(x)$是相同的函数.

例 5 若当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=mx+\frac{n}{x}$,$|a|\neq|b|$,求出 $f(x)$.

解 以$\frac{1}{x}$代换题设中的 x,得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{m}{x}+nx,$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,得

$$(a^2-b^2)f(x)=(am-bn)x+\frac{an-bm}{x}.$$

注意到$|a|\neq|b|$,故 $a^2-b^2\neq 0$,从而得

$$f(x)=\frac{am-bn}{a^2-b^2}x+\frac{an-bm}{a^2-b^2}\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

1.1.6 函数的表示法

表示函数的方法主要有三种:**表格法**、**图像法**和**解析法**(公式法).

1. 表格法

将两个变量的函数关系以表格的形式表示出来的方法称为函数的表格法.

例如,银行的年利率与存款期限(定期存款)的对应关系(见表 1.1).

表 1.1

3 个月	6 个月	12 个月	24 个月	36 个月
1.10%	1.30%	1.50%	2.10%	2.75%

表格法在经济学、社会学中很常用.

2. 图像法

将两个变量的函数关系以函数图像的形式表示出来的方法称为函数的图像法.

例如,某段时间内波罗的海干散货综合运价指数 BDI 和时间之间的函数关系见图 1.7.

像这样用图形表示变量之间函数关系的例子在实践中是很多的. 再如,股价变化曲线图、心电图、自动气温记录仪等. 经济学中常用图像分析法分析经济变量的关系,这时没有具体的函数表达式. 事实上,尽管精确的函数式是人们梦寐以求的,但往往是很难得到的,然而,有经验的人员从图形可以分析得到所需要的观察量的信息.

3. 解析法

将两个变量的函数关系以解析式的形式表示出来的方法称为函数的解析法,也称为函数的公式表示法.

例如,函数 $f(x)=\sin(2x-1)$,$y=x^2$ 等,在微积分中讨论的函数几乎都是用解析法表示的.

必须注意的是:有时一个函数的解析式需要用几个式子来表示,即在定义域内,当自变

图 1.7

量在不同的取值范围内时，对应法则用不同的解析式来表示，这样的函数通常叫作**分段函数**. 分段函数是一个函数，而不是几个函数；分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域也是各段函数值域的并集.

下面举几个后面要用到的常见函数的例子：

(1)**绝对值函数**(见图 1.8)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

(2)**符号函数**(见图 1.9)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases},\text{其中 } x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

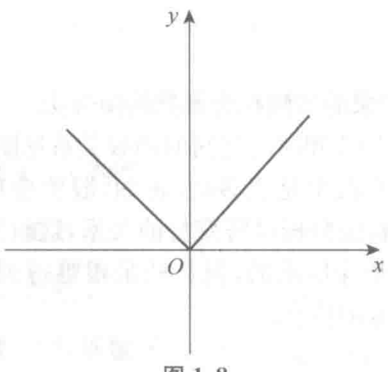


图 1.8

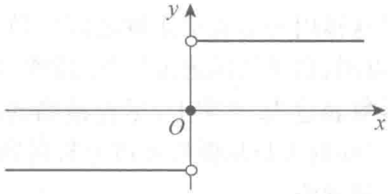


图 1.9

(3)**取整函数**(见图 1.10)

$$y=[x]=\text{不超过 } x \text{ 的最大整数}.$$