EGA 1

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

I. LE LANGAGE DES SCHÉMAS

代数几何学原理

I. 概形语言

[法] Alexander Grothendieck 著
周健 译

高等教育出版社

EGA 1

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

I. LE LANGAGE DES SCHÉMAS

代数几何学原理

I. 概形语言

[法] Alexander Grothendieck 著
(在 Jean Dieudonné 的协助下)
周健 译

高等教育出版社·北京 International Press

Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné):
I. Le langage des schémas

图书在版编目（CIP）数据

代数几何学原理. Ⅰ, 概形语言 /（法）格罗滕迪克著；周健译. -- 北京：高等教育出版社，2018.11
ISBN 978-7-04-050654-9

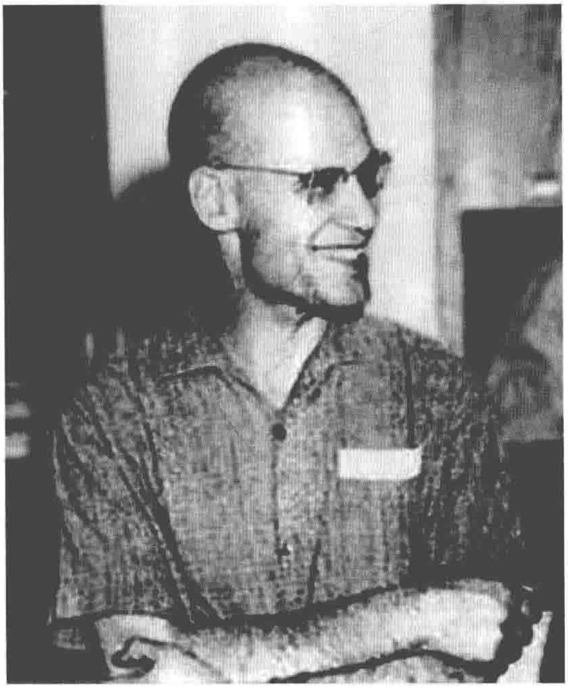
Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①格… ②周… Ⅲ. ①代数几何 Ⅳ. ① O187

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 219811 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 姜 磊　　版式设计 马敬茹
责任校对 吕红颖　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	16.5		
字　数	330 千字	版　次	2018 年 11 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 11 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	89.00 元

物 料 号 50654-00



Alexander Grothendieck
(1928.3.28—2014.11.13)

谨以此译本纪念

已故伟大数学家

Alexander Grothendieck

译者前言

这部书的全名是 Éléments de Géométrie Algébrique, 通常缩写成 EGA, 是 A. Grothendieck 在 20 世纪 50—60 年代写成的 (在 J. Dieudonné 的协助下). 它对现代数学许多领域的发展产生了深远的影响, 至今仍然是对于概形基本概念与方法的最完整最详尽的理论阐述. 由于丘成桐教授的大力推动和支持, EGA 中译本终于得以出版.

为了方便初次接触这本书的读者, 译者将从以下三个方面做出简要的介绍, 以便读者能够获得一个概略的了解. 这三个方面就是: 一、EGA 的成书背景, 二、EGA 的重要影响, 三、EGA 的翻译经过.

在开始之前, 有必要先厘清一个概念, 即 EGA 有狭义和广义之分. 狭义的 EGA 是指已经完成的第一章到第四章, 发表在 Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., Tome 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960—1967) 中[①], 广义的 EGA 是指 Grothendieck 关于这本书的写作计划, 在引言中可以看到一个简略的列表, 共包含 13 章, 涉及非常广泛的主题, 并归结到 Weil 猜想的证明上. 后面的各章内容虽然并没有正式写出来, 但大都以草稿的形式出现在了 SGA, FGA[②] 等多部作品之中, 应该被看成是前四章的自然延续.

本次中译本的范围只是 EGA 的前四章, 但对于下面要谈论的 EGA 来说, 我们不得不作广义的理解, 因为计划中的 13 章内容原本就是一个有机的整体, 各章相互照应, 具有前后贯通的理论构思, 而且说到 EGA 对后来的影响也必须整体地来谈.

[①]新版 EGA 第一章由 Springer-Verlag 于 1971 年出版.

[②]SGA 的全称是 *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, FGA 的全称是 *Fondements de la Géométrie Algébrique*.

(一) EGA 的成书背景

代数几何考察由代数方程所定义的几何图形的性质, 已经有漫长而繁复的历史. 特别是其中的代数曲线理论, 这已经被许多代的数学家使用直观几何语言、函数论语言、抽象代数语言等进行过详细的讨论, 并积累了丰富的知识和研究课题.

20 世纪初, 意大利学派的几位数学家 (Castelnuovo, Enriques 等) 进而完成了代数曲面的初步分类. 但在这一阶段, 传统方法开始受到质疑, 仅使用坐标和方程的语言在陈述精细结果时越来越难以满足数学严密性的要求. O. Zariski 意识到了问题的严重性, 开始着手建立代数几何所需的交换代数基础. 他所引入的 Zariski 拓扑、形式全纯函数等概念使代数几何逐步具有了独立于解析语言的另一种陈述和证明方式. J.-P. Serre 的著名文章 FAC 和 GAGA 等① 进而阐明, 借助层上同调的语言, 在 Zariski 拓扑上也可以建立起丰富而且有意义的整体理论. Grothendieck 在 EGA 中继续发展了 Serre 的理论, 把代数闭域上的结果推广为任意环上 (甚至任意概形上) 的相对理论, 使数论和代数几何重新统一在以交换代数和同调代数为基础的完整而严密的体系之下 (此前代数整数环和仿射代数曲线曾被统一在 Dedekind 整环的语言之下), 可以说完成了 Zariski 以来为代数几何建立公理化基础的目标.

Grothendieck 在扉页上把 EGA 题献给了 O. Zariski 和 A. Weil, 这确认了 Zariski 对于 EGA 成书的重大影响. 我们再来看 A. Weil 对于 EGA 的关键影响, 这就要说到 Weil 的著名猜想, 揭示了有限域 (比如 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) 上的代数方程组在基域的所有有限扩张中的有理解个数所具有的神秘规律. Weil 把这种规律用 Zeta 函数② 的语言做出了表达, 列举了 Zeta 函数所应具有的一些性质. 其中还特别指出, 这种 Zeta 函数的某些信息与另一个代数方程组 (前述方程组是这个方程组通过模 p 约化的方式而得到的) 在复数域上所定义出的复流形的几何或拓扑性质会有密切的关联. Weil 还预测到, 为了证明他的这一系列猜想, 有必要对于有限域上的代数几何对象发展出一套上同调理论, 并要求这种上同调具有与复几何中的上同调十分相似的性质. 在此基础上, 上述猜想便可以借助某种 Lefschetz 不动点定理而得以建立.

Weil 的这个思路深刻地影响了代数几何语言的发展. 上面提到的 FAC 就是朝向实现这一目标所迈出的重要一步③. 但是仅靠凝聚层上同调理论被证明是不够的. Grothendieck 在 Serre 工作的基础上完成了一次思想突破, 他意识到层上同调这个

①FAC 的全称是 *Faisceaux Algébriques Cohérents*, 发表在 The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No. 2 (1955), pp. 197–278, 中译名 "代数性凝聚层"; GAGA 的全称是 *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, 发表在 Annales de l'institut Fourier, Tome 6 (1956), pp. 1–42, 中译名 "代数几何与解析几何".

②算术概形都可以定义出 Zeta 函数, 通常就称为 Hasse-Weil Zeta 函数, Riemann Zeta 函数也包含在其中.

③Weil 也以自己的方式为代数几何建立了一套基础理论, 并写出了 *Foundations of Algebraic Geometry* (1946) 及 *Variétés Abéliennes et Courbes Algébriques* (1948) 等书, 他在这个基础上证明了对于曲线的上述猜想.

理论格式可以扩展到更广泛的“拓扑”上, 这种“拓扑”已经不是传统意义下由开集公理所定义的拓扑, 而是要把非分歧的覆叠映射也当作“开集”来使用. 基于这个想法定义出的上同调 (即平展上同调) 后来被证明确实能够满足 Weil 的要求[①], 但为了要把该想法贯彻到有限域、代数数域、复数域等各种不同的环境里 (比如为了实现 Weil 猜想中有限域上的几何与复几何的联系), 就必须尽可能地把古典代数几何中的各种几何概念 (如平滑、非分歧等) 推广到更一般的语言背景下.

EGA 和很大部分的 SGA (如前所述, 它们原本就应该是 EGA 的组成部分) 都在致力于完成这种理论构建和语言准备的工作. 最终, Weil 猜想的证明是由 Deligne[②] 完成的, 阅读他的文章就会发现, EGA-SGA 的体系在证明中起到了多么实质的作用.

(二) EGA 的重要影响

EGA-SGA 的出现对于后来的数学发展产生了多方面的深远影响.

首先, 概形已经成为数论和代数几何的基础语言, 它的作用完全类似于流形之于微分几何, 充分印证了这个理论体系的包容性、灵活性、方便性以及严密性.

其次, 在概形理论和方法的基础上, 不仅 Weil 猜想得以圆满解决, 而且很多困难的猜想都陆续获得解决, 比如说 Mordell 猜想、Taniyama-Shimura 猜想、Fermat 大定理等. 以 Mordell 猜想为例, Faltings 最早给出的证明中就使用了 Abel 概形的参模空间、p 可除群、半稳定约化定理等关键工具, 这些都是建立在 EGA-SGA 的体系之上的[③]. 再看 Fermat 大定理的证明, 它是建立在自守表示的某些结果、模曲线的算术理论、Galois 表示的形变理论等基础上的, 后面的两个理论都离不开 EGA-SGA 的体系.

EGA-SGA 的体系不仅为解决数论中的许多重大猜想奠定了基础, 而且也催生了很多新的观念和理论体系. 试举几个典型的例子如下:

(1) 恒机理论

这是 Grothendieck 为了解决 Weil 猜想中与 Riemann 假设[④] 相关的部分而提出的理论设想 (基于 Serre 的结果). 与 Deligne 证明中的独特技巧不同, 该理论试图建立一个良好的“恒机”范畴, 使 Riemann 假设成为一个代数演算的自然结果. 这个思路并没有取得成功, 因为其中涉及的“标准猜想”看起来是极为困难的问题. 但“恒机”的想法本身不仅没有就此消亡, 反而日益显示出强劲的生命力. 它首先在 Deligne 的 Theorie de Hodge I, II, III 中得到了侧面的印证, 后来又在关于 L 函数特殊值的一系列猜想中扮演了关键角色 (以恒机式上同调的形式) , 并因此促成了

[①] 参考: Grothendieck, *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki 1964/65, 279.

[②] 参考: Deligne, *La conjecture de Weil, I*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., Tome 43, n° 2 (1974), p. 273–307, 中译名 “Weil 猜想 I”.

[③] 对于 Mordell 猜想本身, 后来也有一些较为“初等”的证明.

[④] 这并不是原始的 Riemann 假设, 只是与它具有类似的形状.

概形同伦理论的发展. 另外值得一提的是, Grothendieck 在构造恒机范畴时所引入的 Tannaka 范畴概念也被证明具有非常普遍的意义.

(2) 代数叠形理论

这起源于 Grothendieck 使用函子语言来重新解释参模理论的工作 (FGA). Hilbert 概形和 Picard 概形的构造是第一批重要的结果, 但后来发现许多在代数几何中很平常的参模函子并不能在概形范畴中得到表识. 代数叠形的概念就是对于概形的一种推广, 目的是把那些有重要意义但又不可表识的参模函子也纳入几何框架之中. 这一理论无论从技术上还是从结果上都是 EGA-SGA 体系的自然延伸, 它的应用范围已经超出数论和代数几何中的问题, 扩展到数学物理等领域.

(3) 导出范畴与转三角范畴

这个理论最初是 Grothendieck 为了恰当表述上同调对偶定理所构思的概念框架. 现在它的应用范围已经扩展到了多个数学分支 (如有限群的模表示、双有理几何、同调镜像对称等), 并被发掘出一些新的意义. Voevodsky 构造恒机范畴的 "导出" 范畴时就使用了这套语言.

(4) p 进刚式解析几何

这个理论最初是 Tate 把 Grothendieck 拓扑的考虑方法引入 p 进解析函数中而定义出来的几何理论, Raynaud 又使用形式概形的语言对它做出了重新的解释. 后来该理论被应用到稳定约化、曲线基本群、p 进合一化理论、p 进 Langlands 对应等诸多问题之中.

限于译者的理解程度, 只能先说到这里, 还有很多话题未能触及.

(三) EGA 的翻译经过

EGA 的中文翻译开始于 2000 年, 到了 2007 年中, 前四章的译稿已大致完成. 在随后的校订工作中, 译者逐渐意识到两个更大的问题.

第一, 我们知道 Grothendieck 写作 EGA 的一个主要动机是要给出 Weil 猜想的详细证明 (除了 Riemann 假设的部分). 但是前四章只是陈述了一些最基础的理论, 尚未深入探讨那些比较核心的话题. 如果不结合后面的内容 (比如 SGA) 来阅读的话, 就看不到这四章理论的许多实际用途, 也不能更充分地理解作者的思维脉络, 而且与后来的那些广泛应用相脱节.

第二, EGA-SGA 体系是建立在一系列预备知识和先行工作的基础上的. 首先, EGA 中大量使用了 Bourbaki 数学原理中的结果 (特别是 "代数学"、"交换代数"、"一般拓扑学" 等卷), 作者 Grothendieck 和协助者 Dieudonné 都是 Bourbaki 的成员. 另外, 正如作者在引言中所指出的, 阅读 EGA 还需要准备两本参考书:

R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.*①

① 中译名 "代数拓扑与层理论".

A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.*①

最后, 作者还告诉我们, EGA 的前三章完全是脱胎于 Serre 的 FAC. 所以仅从译稿的校订工作来说, 译者也必须对上面提到的这些书籍论文做出系统的梳理和把握.

这两个问题迫使译者持续对相关的著作加深了解, 并翻译其中的某些部分, 借此来检验 EGA 译稿的准确性和适用性, 提高译文的质量. 这些工作仍在进行中.

由于理解上的不足, 译文中一定还有译者未曾注意到的错漏之处, 敬请读者指正. 译者将另外准备 "勘误与补充" 一文, 报告可能的错误, 并介绍某些背景信息, 以及与其他文献的联系等, 此文将放置在下面的网址中:

http://www.math.pku.edu.cn/teachers/zhjn/ega/index.html

EGA 中译本的出版工作几经波折. 最终能够达成, 与丘成桐教授的运筹和指导是分不开的, 感谢丘成桐教授的关心和鼓励.

在翻译工作的最初几年里, 译者得到了赵春来教授的莫大支持和帮助. 赵老师曾专门组织讨论班, 以早期译稿为素材进行讨论, 初稿得以完成, 完全是得益于赵老师的无私关怀, 译者衷心感谢赵老师长期以来所给予的工作和生活上的多方支持.

巴黎南大学的 Luc Illusie 教授和 J.-M. Fontaine 教授十分关心此译本的出版工作, 并为此做了许多工作. Illusie 教授热心于中法数学交流, 培养了许多中国学生, 也给予译者很多指导, 他还专门与法文版权所有者 Johanna Grothendieck 女士及法国高等科学研究所 (IHES) 进行联络, 为中文版获得授权创造了良好的条件, 并为此版写了序言. 诚挚感谢 Illusie 教授为此付出的热情和心力. 东京大学的加藤和也教授和巴黎南大学的 Michel Raynaud 教授也给予译者很大鼓励, 在此一并致谢.

译者还要感谢首都师范大学李克正教授、华东师范大学陈志杰教授、台湾大学康明昌教授、中科院晨兴中心田野教授、信息工程研究所刘石柱老师以及众多师友对于此项工作给予的热情鼓励. 同时感谢译者所在单位的历任领导对此项工作的理解和包容.

最后, 感谢高等教育出版社理科学术著作分社王丽萍分社长和编辑李鹏先生在出版工作上的坚持不懈和精心筹备, 感谢波士顿国际出版社 (International Press) 秦立新先生的大力协助.

① 中译名 "同调代数中的几个关键问题".

译本序[①]

A. Grothendieck 的 Éléments de Géométrie Algébrique (在 J. Dieudonné 的协助下完成) 第一本于 1960 年问世, 最后一本于 1967 年问世, 由法国高等科学研究所 (IHES) 出版. 在这部后来以 EGA 的略称而名世的经典著作中, 作者引入并以极为详尽的形式发展了一套新的语言, 即*概形语言*. 由于这种语言具有清晰准确、表达力强、操作灵活等诸多特性, 它很快就成为在代数几何中被普遍采用的语言.

EGA 并无任何老旧. 时至今日, 它所阐发的那些语言和方法仍然被全世界的数论和代数几何专家们所广泛使用. 尽管从那以后, 某些比概形更一般的几何对象 (比如说代数空间、代数叠形等) 也被定义出来, 并在最近 20 年间被越来越多地应用在诸如参模问题、自守形式理论等课题中, 但对于它们的考察仍然要基于概形的语言.

虽然陆续出现了一些十分优秀的介绍和解释 EGA 的教科书, 但说到对于 EGA 的最佳介绍和解释, 仍然非 EGA 本身莫属. 某些人曾说 EGA 很难懂. 情况恰恰相反, EGA 所具有的清晰性和确切性、始终致力于把问题纳入恰当视野的坚持以及寻求对主要结果做出最佳陈述的努力、再加上尽量引出众多推论的编排方式等, 都使得阅读 EGA 成为愉快的体验. 而且只要你需要用到一个关于概形的技术性引理, 查遍群书后通常都会在 EGA 中找到它, 甚至可能比你所需要的形式更好, 还饶上一个完整的证明. 即使是初学者也会很快发现, 参考 EGA 远比参考其他教科书获益更多.

然而, EGA 是用法文书写的, 这就带来一些问题. 在 20 世纪 60 年代时, 法文曾经是很通用的数学语言, 但在今天, 掌握法文的数学工作者已逐年减少, 尤其是在

①原文为英文.

亚洲. 我曾在中国多次讲授代数几何课程, 深切体会到中国的青年学生们对于阅读 EGA 的渴望, 以及面对语言障碍时的无奈. 由此可以理解, EGA 的中译本肯定会是非常有用的. 很高兴周健先生成功地完成了这个翻译, 他一定是克服了不少的困难, 其中就包括给众多的法文技术词汇寻找和遴选出恰当的中文表达. 书后附有法中英三语的索引, 从中读者可以查到同一个数学概念在三种语言下的表达方式.

目前出版的这一卷是 EGA 的第一章 (基于最初的版本), 后续各卷都已经翻译出来, 将会陆续推出.

Luc Illusie

引言

献给 Oscar Zariski 和 André Weil

这部书的目的是探讨代数几何学的基础. 原则上我们不假设读者对这个领域有多少了解, 甚至可以说, 尽管具有一些这方面的知识也不无好处, 但有时 (比如习惯于从双有理的视角来考虑问题的话) 对于领会这里将要探讨的理论和方法来说或许是有害的. 不过反过来, 我们要假设读者对于下面一些主题有足够的了解:

a) *交换代数*, 比如 N. Bourbaki 所著《数学原理》丛书的某些卷本 (以及 Samuel-Zariski [13] 和 Samuel [11], [12] 中的一些内容).

b) *同调代数*, 这方面的内容可参考 Cartan-Eilenberg [2](标记为 (M)) 和 Godement [4](标记为 (G)), 以及 A. Grothendieck [6](标记为 (T)).

c) *层的理论*, 主要参考书是 (G) 和 (T). 正是借助这个理论, 我们才得以用 "几何化" 的语言来表达交换代数中的一些重要概念, 并把它们 "整体化".

d) 最后, 读者需要对*函子式语言*相当熟悉, 我们的讨论将严重依赖这种语言, 读者可以参考 (M), (G) 特别是 (T). 本书作者将在另外一篇文章中详细探讨函子理论的基本原理和主要结果.

***

在一篇简短的引言中, 我们没有办法对代数几何学中的 "概形论" 视角做出一个完整的概括, 也没有办法详细论证采取这种视角的必要性, 特别是在结构层中系统地引入幂零元的必要性 (正是因为这个缘故, 有理映射的概念才不得不退居次要的位置, 更为恰当的概念则是 "态射"). 第一章的主要任务是系统地介绍 "概形" 的语言,

并希望也能同时说明它的必要性. 对于第一章中所出现的若干概念, 我们不打算在这里给出 "直观" 的解释. 读者如果需要了解其背景的话, 可以参考 A. Grothendieck 于 1958 年在 Edinburgh 国际数学家大会上的报告 [7] 及其文章 [8]. 另外 J.-P. Serre 的工作 [14] (标记为 (FAC)) 可以看作是代数几何学从经典视角转向概形论视角的一个中间环节, 阅读他的文章可以为阅读我们的《代数几何学原理》打下良好的基础.

***

下面是一个非正式的目录, 列出了本书将要讨论的各个主题, 后面的章节以后会有变化:

第一章 — 概形语言.

第二章 — 几类态射的一些基本的整体性质.

第三章 — 代数凝聚层的上同调及其应用.

第四章 — 态射的局部性质.

第五章 — 构造概形的一些基本手段.

第六章 — 下降理论. 构造概形的一般方法.

第七章 — 群概形、主纤维化空间.

第八章 — 纤维化空间的微分性质.

第九章 — 基本群.

第十章 — 留数与对偶.

第十一章 — 相交理论、Chern 示性类、Riemann-Roch 定理.

第十二章 — Abel 概形和 Picard 概形.

第十三章 — Weil 上同调.

原则上所有的章节都是开放的, 以后随时会追加新的内容. 为了减少出版上的麻烦, 追加的内容将出现在其他分册里. 如果有些小节在文章交印时还没有写好, 那么虽然在概述中仍然会提到它们, 但完整的内容将会出现在后面的分册里. 为了方便读者, 我们在 "第零章" 里包含了关于交换代数、同调代数和层理论的许多预备知识, 它们都是正文所需要的. 这些结果基本上都是熟知的, 但是有时可能没办法找到适当的参考文献. 建议读者在正文需要它们而自己又不十分熟悉的时候再去查阅. 我们觉得对于初学者来说, 这是熟悉交换代数和同调代数的一个好方法, 因为如果不了解其应用的话, 单纯学习这些理论将是非常枯燥乏味和令人疲倦的.

***

我们没办法给这本书所提到的诸多概念和结果提供一个历史回顾或综述. 参考文献也只包含了一些对于理解正文来说特别有用的资料, 我们也只对那些最重要的结果给出了来源. 至少从形式上来说, 这本书所要处理的很多主题都是非常新的, 这

也解释了为什么这本书很少引用 19 世纪和 20 世纪初那些代数几何学之父们的工作 (我们只是听人说过, 却未曾拜读) 的原因. 然而有必要列举一下对作者有最直接的影响并且对概形理论的形成有重要贡献的一些著作. 首先是 J.-P. Serre 的奠基性工作 (FAC), 与 A. Weil 艰深的古典教科书 *Foundations of algebraic geometry* [18] 相比, 这篇文章更适合于引领初学者 (包括本书的作者之一) 进入代数几何的领域. 该文第一次表明, 在研究 "抽象" 代数多样体时, 我们完全可以使用 "Zariski 拓扑" 来建立它们的代数拓扑理论, 特别是上同调的理论. 进而, 这篇文章里所给出的代数多样体的定义可以非常自然地扩展为概形的定义①. Serre 自己就曾指出, 仿射多样体的上同调理论可以毫不困难地推广到任何交换环 (不仅仅是域上的仿射代数) 上. 本书的第一、二章和第三章前两节本质上就是要把 (FAC) 和 Serre 另一篇文章 [15] 的主要结果搬到这种一般框架之下. 我们也从 C. Chevalley 的 "代数几何讨论班" [1] 上获益良多, 特别是他的 "可构集" 概念在概形理论中是非常有用的 (参考第四章). 我们也借用了他从维数的角度来考察态射的方法 (第四章), 这个方法几乎可以不加改变地应用到概形上. 另外值得一提的是, Chevalley 引入的 "局部环的概形" 这个概念提供了古典代数几何的一个自然的拓展 (尽管不如我们这里的概形概念更具普遍性和灵活性), 第一章 §8 讨论了这个概念与我们的概形概念之间的关系. M. Nagata 在他的系列文章 [9] 中也提出过类似的理论, 他还给出了很多与 Dedekind 环上的代数几何有关的结果②.

***

最后, 不用说一本关于代数几何的书 (尤其是一本讨论基础的书) 必然要受到像 O. Zariski 和 A. Weil 这样一些数学大家的影响. 特别地, Zariski [20] 中的形式全纯函数理论可以借助上同调方法来进行改写, 再加上第三章 §4 和 §5 中的存在性定理 (并结合第六章的下降技术), 就构成了这部书的主要工具之一, 而且在我们看来, 它也是代数几何中最有力的工具之一.

这个技术的使用方法可以简单描述如下 (典型的例子是第九章将要研究的基本群). 对于代数多样体 (更一般地, 概形) 之间的一个紧合态射 (见第二章) $f: X \to Y$ 来说, 我们想要了解它在某一点 $y \in Y$ 邻近的性质, 以期解决一个与 y 的邻近处有关的问题 P, 则可以采取以下几个步骤:

1° 可以假设 Y 是仿射的, 如此一来 X 是定义在 Y 的仿射环 A 上的一个概形,

①Serre 告诉我们, 利用环层来定义多样体结构的想法来源于 H. Cartan, 他在这个想法的基础上发展了他的解析空间理论. 很明显, 在 "解析几何" (与 "代数几何" 一样) 中也可以允许幂零元出现在解析空间的局部环中. H. Grauert [5] 已经开始了这方面的工作(推广了 H. Cartan 和 J.-P. Serre 的定义), 也许不久以后就会建立起更为系统的解析几何理论. 本书的概念和方法显然对解析几何仍有一定的意义, 不过需要克服一些技术上的困难. 可以预见, 由于方法上的简单, 代数几何将成为今后发展解析空间理论时的一个范本.

②和我们的视角比较接近的工作还有 E. Kähler 的工作 [22] 和 Chow-Igusa 的文章 [3], 他们使用 Nagata-Chevalley 的体系证明了 (FAC) 中的某些结果, 还给出了一个 Künneth 公式.

甚至可以把 A 换成 y 处的局部环. 这个步骤通常是很容易的 (见第五章), 于是问题归结到了 A 是局部环的情形.

2° 考察 A 是 *Artin* 局部环的情形. 为了使问题在 A 不是整环时仍有意义, 有时需要把问题 P 稍微改写一下, 这个阶段可以使我们对问题的 "无穷小" 性质有更多的了解.

3° 借助形式概形的理论 (见第三章, §3, 4 和 5) 我们可以从 Artin 环过渡到完备局部环上.

4° 最后, 若 A 是任意的局部环, 则可以使用 X 上的某些适当概形的 "多相截面" 来逼近给定的 "形式" 截面 (见第四章), 然后由 X 在 A 的完备化环上的基变换概形上的已知结果出发, 就可以推出 X 在 A 的较为简单的 (比如非分歧的) 有限扩张上的基变换概形上的相应结果.

这个简单的描述表明, 系统地考察 Artin 环 A 上的概形是很重要的.Serre 在建立局部类域论时所采用的视角以及 Greenberg 最近的工作都显示, 从这样一个概形 X 出发应该可以函子性地构造出一个定义在 A 的剩余类域 $\boldsymbol{k}$ (假设它是完满域) 上的概形 X', 其维数 (在恰当的条件下) 等于 $n\dim X$, 其中 n 是 A 的长度.

至于 A. Weil 的影响, 我们只需指出, 正是为了发展出一套系统的工具来给出 "Weil 上同调" 的定义, 并且最终证明他在 Diophantus 几何上的著名猜想的需要, 推动作者们写出了这部书, 另外的一个写作动机则是为了给代数几何中的常用概念和方法找到一个自然的理论框架, 使作者们获得一个理解它们的途径.

***

最后, 我们觉得有必要预先告诉读者, 在熟悉概形的语言并且了解到那些直观的几何构造都能够 (以本质上唯一的方式) 翻译成这种语言之前, 无疑会有许多困难需要克服 (对作者来说也是如此). 和数学中的许多理论一样, 最初的几何直观与表述这种理论所需要的普遍且精确的语言之间的距离变得越来越遥远. 在这种情况下, 我们需要克服的心理上的困难主要在于, 必须把集合范畴中的那些熟知的概念 (比如 Descartes 积、群法则、环法则、模法则、纤维丛、齐性主丛等) 移植到各种各样的范畴和对象上 (比如概形范畴, 或一个给定概形上的概形范畴). 对于以数学为职业的人来说, 今后想要避开这种抽象化的努力将是很困难的, 不过, 和我们的前辈接受 "集合论" 的过程相比, 这可能也不算什么.

***

引用时的标号采用自然排序法, 比如在 **III**, 4.9.3 中, **III** 表示章, 4 表示节, 9 表示小节. 对于同一章内部的引用, 我们省略章号.

目录