

面向信息科学的 离散数学

杨小帆 杨棹星◇编著



科学出版社

非外借

面向信息科学的离散数学

杨小帆 杨橹星 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从信息科学的角度讲解离散数学,在保持数学体系完整性和数学内容严谨性的同时,用生动活泼的语言介绍离散数学四大分支(数理逻辑、集合论、抽象代数、图论)的发展史及其与信息科学的紧密联系,用深入浅出的语言介绍离散数学的核心思想、基本概念和主要结论,同时介绍一些著名科学家的逸闻趣事,其目的是帮助读者在学习离散数学知识的同时了解其在信息科学中的应用,提高自身的科学素养和人文素养。

本书可作为信息科学技术相关专业的本科生的教科书,也可以作为研究信息科学技术的高层次人才的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

面向信息科学的离散数学 / 杨小帆, 杨橹星编著. — 北京: 科学出版社, 2018.11

ISBN 978-7-03-059652-9

I. ①面… II. ①杨… ②杨… III. ①信息学-关系-离散数学 IV. ①G201②O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 265884 号

责任编辑: 罗 莉 陈 杰 / 责任校对: 江 茂

责任印制: 罗 科 / 封面设计: 墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年11月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018年11月第一次印刷 印张: 12.75

字数: 300千字

定价: 49.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

作者简介

| 杨小帆 |

重庆大学大数据与软件学院教授、博士生导师，教育部新世纪优秀人才。1985 年在四川大学数学系获理学学士学位，1988 年在重庆大学应用数学系获理学硕士学位，1994 年在重庆大学计算机系获工学博士学位，1998~1999 年访问英国雷丁大学，多次访问香港浸会大学和澳门大学。主持国家级项目 3 项、省部级项目 5 项。发表 SCI 论文 156 篇，2014~2017 年连续 4 年入选 Elsevier 中国高被引学者榜单(数学类)，有 8 篇论文入选 ESI 高被引论文。研究方向包括：网络空间安全，网络传播与控制，网络容错与故障诊断。

| 杨鲁星 |

2012 年 6 月在重庆大学数学与统计学院获得理学学士学位，2014 年 10 月至 2015 年 10 月访问英国帝国理工大学智能网络与系统实验室(联合培养博士生)，2015 年 12 月在重庆大学计算机学院获得工学博士学位，2016 年 3 月至 2017 年 9 月在荷兰代尔夫特理工大学电气工程、数学与计算机学院担任博士后研究员，2018 年 2 月至今在澳大利亚迪肯大学信息技术学院担任博士后研究员。2017 年获得重庆市优秀博士学位论文。发表 SCI 论文 35 篇，有 6 篇论文入选 ESI 高被引论文。研究方向包括：网络空间安全，网络传播与控制。

前言

人类于 1969 年从工业时代进入了信息时代。在信息社会里,信息量、信息传播速度、信息处理速度以及信息应用程度都以几何级数的方式在增长,信息对整个社会的影响逐步提高到了—种绝对重要的地位,对经济和社会发展产生了巨大而深刻的影响,从根本上改变了人们的生活方式、行为方式和价值观念。

信息科学与技术是支撑整个信息社会向前发展的关键核心科学技术。信息科学是研究信息运动规律和应用方法的科学,是由系统论、信息论、控制论、计算机理论、人工智能理论相互渗透、相互结合而形成的一门新兴综合性科学。信息技术是管理和处理信息所采用的各种技术的总称,主要包括传感技术、计算机与智能技术、通信技术和控制技术。进入 21 世纪以来,信息科学技术呈现快速发展趋势,移动互联网、大数据、云计算、物联网以及人工智能技术相继出现,极大地提高了人们的工作、学习效率和生活质量。

在信息时代,社会急需大量的信息领域专业人才。在进入大学时选择与信息科学技术相关的专业,大学毕业后从事与信息科学技术相关的工作,这已经成为许多青少年的梦想。为了实现这个梦想,就必须勤学苦练,全面提高自身的能力。

离散数学是一门专门研究离散对象的数学。我们知道,信息科学的主要研究对象是信息和网络。—方面,任何信息都被表示为离散的符号串,信息存储、信息处理和信息传输最终归结为离散符号串的存储、处理和传输。另—方面,网络是由有限个顶点和有限条边组成的,具有离散的结构。因此,离散数学是信息科学的数学基础。大学中与信息科学技术相关的专业都要开设离散数学这门基础课,其目的是为进一步学习信息科学技术打下坚实的数学基础。为了成为—名优秀的信息科学技术工作者,就必须认真学习离散数学。

信息领域从业者必须具备以下四种能力:①逻辑思维能力。从对信息科学问题的研究,到大型复杂信息系统的设计,处处都需要用到严谨、强大的逻辑思维能力。②集合思维能力。信息系统正变得越来越复杂,只有从整体的、联系的角度看待系统,才能准确地理解自然界中的复杂系统,设计出结构复杂、功能多样的信息系统。③抽象运算能力。我们身处人工智能时代,需要从海量数据中提取出有价值的结论。随着信息技术的进步,数据的种类正变得越来越—多,数据的结构正变得越来越复杂,只有具备从抽象角度看待数据、处理数据的能力,才能成为人工智能时代的栋梁之材。④网络思维能力。网络是数据传输的载体。随着互联网、移动互联网以及物联网的普及,网络所起的作用越来越大,需要通过网络传输的数据量也越来越—大。为了充分发挥网络的作用,就必须具有网络思维能力,通过对网络结构和性质的分析,设计性能优异的通信协议。

离散数学由四个部分组成,即数理逻辑、集合论、抽象代数和图论。学习离散数学的目的是培养具备上述四种能力的综合性人才。为了进一步学习各种先进的信息科学技术,

必须在离散数学上下苦功夫。

本书作者长期从事离散数学课程的教学工作，以及与信息科学相关的科研工作。在多年的工作当中，我们深切地感受到现有离散数学教材普遍存在两个不足之处：一是缺乏对抽象内容的直观解释，使读者难以理解抽象数学概念和数学定理的本质；二是没有介绍离散数学与信息科学的关系。我们撰写本书的目的，是希望实现两个目标：一是用通俗的语言和生动的图片来阐释抽象的概念和定理，使学生产生浓厚的学习兴趣；二是将离散数学在信息科学技术中的应用贯穿于整个教学过程，使学生了解学习的重要性。

本书的写作得到了重庆大学学校领导和重庆大学大数据与软件学院领导的大力支持和关怀，以及作者的众多同事、朋友、学生及家人的全力支持，同时本书的编辑出版工作得到了科学出版社的大力支持，在此一并致谢。

由于作者水平有限，本书必定存在许多不当之处，敬请广大读者批评指正。

目 录

第1章 数理逻辑	1
1.1 逻辑学概论	1
1.1.1 逻辑思维的基本规律	1
1.1.2 命题、推理和论证	4
1.1.3 逻辑学的历史	6
习题	6
1.2 形式命题(1)	8
1.2.1 简单命题	8
1.2.2 复合命题与连接词	8
习题	12
1.3 命题公式	12
1.3.1 命题变元	13
1.3.2 命题公式的定义	13
1.3.3 永真式与永假式	16
习题	18
1.4 形式推理(1)	19
1.4.1 推理规则	19
1.4.2 对偶性	22
1.4.3 推理(1)	23
习题	28
1.5 命题范式	29
1.5.1 主析取范式	29
1.5.2 主合取范式	33
习题	36
1.6 形式命题(2)	37
1.6.1 谓词	38
1.6.2 命题函数	39
1.6.3 量词	40
习题	41
1.7 形式推理(2)	42
1.7.1 谓词公式	42
1.7.2 推理规则	43

1.7.3 推理(2)	47
习题	48
本章小结	48
第2章 集合论	50
2.1 集合概论	50
2.1.1 集合及其表示	50
2.1.2 子集	53
2.1.3 幂集	54
习题	54
2.2 集合演算	54
2.2.1 集合运算	55
2.2.2 笛卡儿积	57
2.2.3 集合划分	59
习题	60
2.3 函数	61
2.3.1 函数的定义	61
2.3.2 单射、满射和双射	63
2.3.3 函数的复合	64
2.3.4 函数的逆	65
习题	67
2.4 集合的大小	67
2.4.1 数与计数	67
2.4.2 集合的势	68
2.5 二元关系	72
2.5.1 二元关系的定义	72
2.5.2 几种典型的二元关系	75
2.5.3 二元关系的复合	76
2.5.4 二元关系的逆	77
习题	77
2.6 等价关系与商集	78
2.6.1 等价关系	78
2.6.2 商集	80
习题	81
2.7 偏序关系	81
2.7.1 偏序关系的定义	81
2.7.2 哈斯图	83
2.7.3 极性元	85
2.7.4 偏序子集	86
习题	88

本章小结	88
第3章 抽象代数	89
3.1 代数学概论	89
3.1.1 初等代数简介	89
3.1.2 高等代数简介	89
3.1.3 抽象代数简介	90
3.1.4 代数学与信息科学	90
3.2 群	93
3.2.1 代数系统	94
3.2.2 半群	95
3.2.3 独异点	96
3.2.4 群的定义	97
3.2.5 交换群	101
习题	102
3.3 子群与陪集	103
3.3.1 子群	104
3.3.2 陪集	109
3.3.3 拉格朗日定理	112
习题	114
3.4 群的同构	115
3.4.1 群同构的定义	115
3.4.2 循环群	118
3.4.3 变换群	120
习题	122
3.5 置换群	122
习题	131
3.6 正规子群与商群	132
3.6.1 正规子群	132
3.6.2 商群	134
3.6.3 群的同态	136
习题	138
3.7 群的直积	139
习题	141
3.8 环	141
3.8.1 环的定义	142
3.8.2 子环	145
3.8.3 整环、除环和域	146
习题	149
3.9 理想与商环	149

3.9.1 理想	149
3.9.2 商环	153
习题	155
本章小结	155
第4章 图论	157
4.1 图论概论	157
4.1.1 网络与图	157
4.1.2 图论的历史	158
4.1.3 图论与信息科学	160
4.2 图	162
4.2.1 有向图	163
4.2.2 无向图	165
4.2.3 子图	168
4.2.4 图的同构	168
4.2.5 图的表示	169
习题	171
4.3 图的连通性	172
4.3.1 连通图	172
4.3.2 图的连通度	173
习题	178
4.4 树	178
4.4.1 树的定义	178
4.4.2 树的特征	180
4.4.3 图的生成树	182
习题	183
4.5 平面图	183
4.5.1 平面图及其嵌入	183
4.5.2 欧拉公式	185
习题	186
4.6 图的遍历	186
4.6.1 欧拉图	186
4.6.2 哈密尔顿图	187
习题	190
本章小结	191
参考文献	193

第1章 数理逻辑

逻辑思维(又称抽象思维)是人运用概念、判断和推理反映事物本质与规律的认识过程(图 1.1),它是人类特有的能力,是人类文明延绵不绝、科学技术持续进步的原动力。具备较强的逻辑思维能力是学习科技知识、进行科学研究、从事技术开发的先决条件。逻辑思维在信息科学技术领域显得尤为重要,只有具备强大的逻辑思维能力,才能胜任该领域的研究工作,才能胜任大型复杂软件的编写与调试工作。

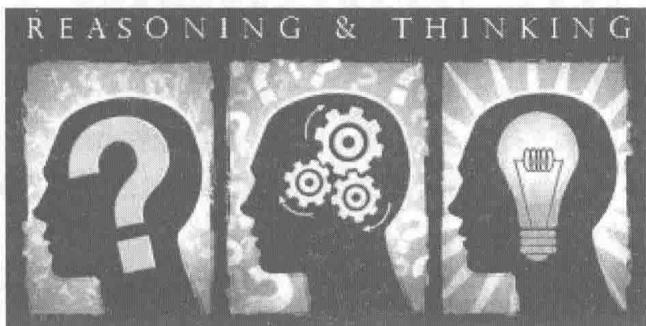


图 1.1 逻辑思维

1.1 逻辑学概论

逻辑思维是有规律的,逻辑学是专门研究逻辑思维规律性的学科。本节简述逻辑学的基本内容和发展历史。

1.1.1 逻辑思维的基本规律

逻辑思维的作用,就是根据一定的前提,通过合理的推导,得到一定的结论。

例 1.1 苏格拉底是柏拉图的导师,柏拉图是亚里士多德的导师,因此,苏格拉底是亚里士多德的师爷。

分析: 苏格拉底、柏拉图和亚里士多德是人类文明史上著名的哲学家,有着师徒传承关系。这是一个逻辑思维过程,其作用就是根据“苏格拉底是柏拉图的导师”和“柏拉图是亚里士多德的导师”这两个前提,得到“苏格拉底是亚里士多德的师爷”这个结论。

例 1.2 子非鱼，安知鱼之乐？

分析：这是惠子对庄子说的一句话。其意思是：“你不是鱼，所以你不知道鱼的快乐”。这是一个逻辑思维过程，其作用就是根据“你不是鱼”这个前提，导出“你不知道鱼的快乐”这个结论。

逻辑学之父亚里士多德总结出了逻辑思维的四条基本规律(表 1.1)。

表 1.1 逻辑思维的四条基本规律

同一律	矛盾律	排中律	充足理由律
在逻辑思维过程中，概念和论题都必须保持不变，不能混淆或者偷换概念，也不能转移或者偷换论题	在逻辑思维过程中，两个相互矛盾的命题不能同时为真，即必然有一个为假	在逻辑思维过程中，一个命题与其负命题不可能同时为假，即必然有一个为真	在逻辑思维过程中，要想证明一个观点，就必须提供充足的理由

下面来看看不满足这些基本规律的实例。

例 1.3 有个小伙子上了火车，一看座无虚席，就厚着脸皮硬往一位老大爷身边挤座。老大爷不高兴了，说：“小伙子，别硬坐了，座位已经满了。”小伙子嬉皮笑脸地说：“老大爷，没办法，我买的就是硬坐票。”

分析：这个小伙子在说话时故意把“硬座”变换成“硬坐”，这是偷换概念，违背了同一律。

例 1.4 楚国有个卖兵器的人在街上叫卖(图 1.2)。他说：“我的矛是最锋利的，能刺穿任何东西。”他又说：“我的盾是最坚固的，不能被任何东西刺穿。”这时，人群中有人问道：“如果用你的矛去戳你的盾，会怎么样呢？”楚人听后哑口无言。



图 1.2 自相矛盾

分析：假设楚人说的两句话都是真的，就可以做以下推理：一方面，因为“楚人的矛能刺穿任何东西”，所以“楚人的矛能刺穿楚人的盾”；另一方面，因为“楚人的盾不能被任何东西刺穿”，所以“楚人的矛不能刺穿楚人的盾”。这样一来，就得到了两个相互矛盾的结论，根据矛盾律，这两个结论不可能同时为真，因此，楚人的话至少有一句是假的。

例 1.5 有人说：“‘华盛顿是第一任美国总统’的说法是不对的，‘华盛顿不是第一任美国总统’的说法也是不对的。”

分析：“华盛顿是第一任美国总统”和“华盛顿不是第一任美国总统”互为负命题。根据排中律，这两个命题必须有一个是真的。根据历史知识，第一个命题是真的。这个人的说法违背了排中律。

例 1.6 南宋初年，宰相秦桧诬陷抗金名将岳飞谋反。虽然秦桧用尽一切卑鄙手段，捏造罪名刑讯逼供，但连一件像样的罪证也找不到。然而秦桧在宋高宗赵构的支持下，仍然把岳飞问成死罪。抗金名将韩世忠感到不平，就去质问秦桧：“你们说岳飞造反，有什么确凿证据？”秦桧不敢明确回答，只好含糊其词地说：“这样的证据‘莫须有’。”韩世忠听了以后气愤地说：“只凭‘莫须有’这三个字，怎么能使天下人心服！”岳飞最后惨死于风波亭(图 1.3)。



图 1.3 风波亭

分析：秦桧采用的是“有罪推定”原则，先假定“岳飞有罪”，如果找不到岳飞无罪的确凿证据，就不能否认这个假设，因此岳飞有罪。这样的思维方式违背了充足理由律，不能令人信服。在我国以前的司法实践中，常采用“有罪推定”原则，造成了许多冤假错案。我国的现代法律则采用更为合理的“无罪推定”原则，先假定“嫌疑人无罪”，如果找不到嫌疑人有罪的确凿证据，就认为嫌疑人无罪。疑罪从无是司法实践的巨大进步，可以最大限度地减少冤假错案。按照无罪推定原则，岳飞是无罪的。

1.1.2 命题、推理和论证

从结构来看，逻辑思维是由命题和推理两部分组成的。

命题是在思维过程中有确定真假值的陈述句，它是逻辑思维的基本单元。在例 1.5 中，“华盛顿是第一任美国总统”和“华盛顿不是第一任美国总统”都是陈述句，前者是真的，后者是假的，因此都是命题。如果一个命题为真，就用符号“1”表示；如果一个命题为假，就用符号“0”表示。

疑问句、祈使句和感叹句等非陈述句虽然可以出现在思维过程中，但要么可以被直接去掉，要么可以被改写为陈述句，而不会影响思维本身。

例 1.7 现象会受到因素什么样的影响呢？如果因素对现象有影响，并且因素对现象的影响不是负面的，那么因素对现象的影响就必然是正面的。

分析：可以将上述思维过程改写为“如果因素对现象有影响，并且因素对现象的影响不是负面的，那么因素对现象的影响就是正面的。”由此可见，“现象会受到因素什么样的影响呢？”这个疑问句不会影响思维本身，可以被去掉。但疑问句具有重要的辅助作用，有助于提出问题，聚焦问题。

在逻辑思维过程中，所涉及的所有陈述句都必须有确定的真假值，虽然思维者并不一定知道它究竟是真是假。

例 1.8 上帝存在。

分析：上帝要么存在要么不存在，不可能既存在又不存在，因此这句话要么真要么假，有确定的真值。人类到目前为止，既没有找到上帝存在的确凿证据，也没有找到上帝不存在的确凿证据，因此并不知道这句话究竟是真是假，虽然如此，这并不妨碍这句话成为命题。现代科学认为，“上帝存在或者不存在”只是一个信仰问题，而不是一个科学问题。

有一类天生违背排中律的陈述句，既不真也不假，被称为悖论。悖论不能作为逻辑思维的前提，否则得到的结论就靠不住。不过在正常的逻辑思维中，所遇到的陈述句基本上都不是悖论，所以不用过分担心悖论。

推理是假设一个或者多个命题(前提)为真，推出另一个命题(结论)为真的思维形式。

例 1.9 因为 $x=1$ ，所以 $\ln x=0$ 。

分析：这是从前提“ $x=1$ ”为真，推出结论“ $\ln x=0$ ”为真的推理。

例 1.10 荷兰在西欧，阿姆斯特丹是荷兰的首都，所以阿姆斯特丹在西欧。

分析：这是从前提“荷兰在西欧”和“阿姆斯特丹是荷兰的首都”为真，推出结论“阿

姆斯特丹在西欧”为真的推理。

可以将推理分为以下两类。

(1) 演绎推理：如果前提为真，结论就一定为真的推理。

(2) 归纳推理：即使前提为真，结论也不一定为真的推理。

例 1.11 任何人都会死。苏格拉底是人，所以苏格拉底会死。

分析：这是演绎推理，因为从“任何人都会死”和“苏格拉底是人”这两个前提为真，一定能够保证“苏格拉底会死”这个结论为真。

例 1.12 有些人会死。苏格拉底是人，所以苏格拉底会死。

分析：这是归纳推理，因为从“有些人会死”和“苏格拉底是人”这两个前提为真，不能保证“苏格拉底会死”这个结论为真。

从功能角度来看，逻辑思维就是用某些理由(论据，前提)去支持或反驳某个观点(论点，结论)的过程，因此也被称为论证。可以将论证分为以下两类。

(1) 有效论证：如果论据为真，就能保证论点为真的论证。

(2) 无效论证：即使论据为真，也不能保证论点为真的论证。无效论证有时也被称为归纳论证。

例 1.13 最早的采用图形用户界面的计算机是苹果公司开发的，因而不是 IBM 公司开发的。

分析：这个论证的论点是“最早的采用图形用户界面的计算机不是 IBM 公司开发的”，论据是“最早的采用图形用户界面的计算机是苹果公司开发的”，从论据到论点只做了一步推理。

例 1.14 因为 $x = y$ ， $y = z$ ，所以 $x = z$ ；又因为 $z = w$ ，所以 $x = w$ 。

分析：这个论证的结论是“ $x = w$ ”，前提是“ $x = y$ ”、“ $y = z$ ”和“ $z = w$ ”，从前提到结论做了两步推理，第一步推理是从前提“ $x = y$ ”和“ $y = z$ ”推得了中间结论“ $x = z$ ”，第二步推理是从中间结论“ $x = z$ ”和前提“ $z = w$ ”推得了论点“ $x = w$ ”。这个论证在复数范围内是有效的。

例 1.15 因为 $x \neq y$ ， $y \neq z$ ，所以 $x \neq z$ 。

分析：这个论证在复数范围内是无效的。

在数学领域，每个定理都要求已知条件(论据)成立能够保证结论(论点)成立，只有通过有效论证才能证明定理。因此，基于演绎推理的有效论证是建立数学大厦的主要工具。

例 1.16 如果 10^{100} 个个体中的某 100 个个体都具有某种属性, 则所有个体都具有这种属性。

分析: 这个论证是归纳论证, 因为样本没有穷尽总体中的所有个体, 即使 $a=b$ 对所有样本都为真, 也不能保证 $a=b$ 对总体中所有个体都为真。尽管如此, 如果所选取的样本具有代表性, 结论还是相当可靠的。

以物理学、化学、生物学等为代表的实验科学的主要研究方法, 就是透过对个别情况的实验研究, 通过归纳找到一般性规律。由于实验的数量有限, 不可能穷尽所有情况, 所发现的规律不能够保证对所有情况都成立, 因此这些规律只能被称为定律, 不能被称为定理。随着科学技术的不断进步, 需要对某些定律进行修改, 建立新的定律。

随着物联网时代和大数据时代的来临, 能够获得的样本数据越来越多, 结论变得越来越可靠, 量变最终导致了质变, 人工智能先后在语音识别、图像识别、自然语言理解、语音合成、智能博弈、自动回答问题、自动决策等领域取得了突破性进展, 成功超越了人类, 迎来了机器智能时代。

1.1.3 逻辑学的历史

历史上, 逻辑学经历了三个发展阶段: 古典逻辑、布尔代数和数理逻辑。

第一阶段: 古典逻辑。古希腊哲学家亚里士多德发现了逻辑思维的四条基本规律, 提出了著名的三段论规则, 奠定了古典逻辑的基础。由于许多推理规则不能用三段论来表达, 古典逻辑的适用范围是比较狭窄的。

第二阶段: 布尔代数。德国哲学家莱布尼茨设想将思维约化为符号演算。英国数学家布尔建立了布尔代数, 在一定程度上将思维约化为代数运算, 初步实现了莱布尼茨的设想。布尔代数只能模拟比较简单的逻辑思维。

第三阶段: 数理逻辑。德国数学家弗雷格建立了数理逻辑, 比较成功地将思维约化为逻辑运算, 较好地实现了莱布尼茨的梦想。数理逻辑的宗旨是用数学方法研究逻辑思维的规律。数理逻辑在计算机科学技术领域有着广泛的应用, 从硬件设计、软件设计、软件正确性证明直至人工智能, 处处都离不开数理逻辑。

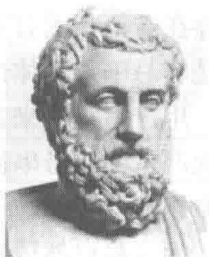
习题

1. 逻辑学是什么?
2. 什么是命题?
3. 什么是演绎推理? 什么是归纳推理?
4. 什么是有效论证? 什么是无效论证。
5. 数理逻辑的宗旨是什么?

名人轶事

亚里士多德

亚里士多德(Aristotle, 公元前 384~前 322), 古希腊伟大的哲学家、科学家和教育家。他是柏拉图的学生, 亚历山大的老师。他对许多学科都做出了贡献。他的写作涉及伦理学、形而上学、心理学、经济学、神学、政治学、修辞学、自然科学、教育学、诗歌、风俗, 以及雅典法律。亚里士多德的著作构建了西方哲学的第一个广泛系统, 包含道德、美学、逻辑和科学、政治和玄学。



亚里士多德

莱布尼茨

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716), 德国哲学家、数学家, 历史上少见的通才。他和牛顿先后独立发明了微积分, 他所使用的微积分符号被广泛采用。他被公认为是 17 世纪最伟大的理性主义哲学家之一。他在哲学方面的工作预见了现代逻辑学和分析哲学的诞生。莱布尼茨在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作。



莱布尼茨

布尔

乔治·布尔(George Boole, 1815~1864), 英国数学家。布尔家境贫寒, 一边养家一边奋斗, 于 1835 年开办了自己的学校。1849 年, 布尔受邀担任爱尔兰科克女王学院的数学教授。1854 年, 布尔出版了《思维规律的研究》, 书中介绍了布尔代数。1857 年, 布尔当选为伦敦皇家学会会员, 不久荣获该会的皇家奖章。由于布尔在符号逻辑运算领域的卓越贡献, 很多计算机语言将逻辑运算称为布尔运算, 将计算结果称为布尔值。



布尔

弗雷格

弗里德里希·路德维希·戈特洛布·弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848~1925), 德国数学家、逻辑学家和哲学家, 他是数理逻辑和分析哲学的奠基人。



弗雷格