



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

HURWITZ THEOREM

Hurwitz 定理

刘培杰数学工作室 编



 哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



目
现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

HURWITZ THEOREM

Hurwitz 定理

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分十六章,分别介绍了华罗庚论 Hurwitz 定理、阶梯式学习法、一致分布数列、Roth 定理,以及 Diophantus 逼近问题、超越数论中的逼近定理等内容.本书从多个方面介绍了 Hurwitz 定理的相关理论,内容丰富,叙述详尽.

本书可供高等院校理工科师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

Hurwitz 定理/刘培杰数学工作室编.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2018.4

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-7135-1

I. ①H… II. ①刘… III. ①多项式-函数论-定理
IV. ①O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 302286 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 陈雅君 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 46.5 字数 479 千字
版 次 2018 年 4 月第 1 版 2018 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7135-1
定 价 198.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。

真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”.

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”.唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

第1章 引言	//1
1.1 从一道北京大学优秀中学生暑期 课堂文化测评试题谈起	//1
1.2 再谈一道2016年全国高中联赛 试题	//16
1.3 高手在民间	//22
第2章 华罗庚论 Hurwitz 定理	//38
2.1 从一道日本奥数题谈起	//38
2.2 渐近法与连分数	//44
第3章 人宝山不能空返	//92
3.1 简单连分数	//93
3.2 Chebyshev 定理及 Khinchin 定理	//99
第4章 阶梯式学习法	//109
4.1 自然逼近	//109
4.2 Farey 数列	//112
4.3 Hurwitz 定理	//115
4.4 Liouville 定理	//119
4.5 注记与答案	//124
第5章 推广与改进	//137
5.1 两位数论专家的推广与改进	//137
5.2 Hurwitz 定理的推广	//139
5.3 Hurwitz 定理的一个证明及其 改进	//150
5.4 无理数的 Diophantus 逼近与 Hurwitz 定理	//155

5.5	反结果	//162
第6章	将 Hurwitz 定理推广到复域	//166
6.1	魔鬼藏在细节中	//166
6.2	Ford 定理——复数的有理逼近	//169
第7章	Farey 级数研究的历史与现状	//181
7.1	Dickson 论 Farey 级数	//181
7.2	Mahler 对 Farey 级数的推广	//188
第8章	一致分布数列	//191
8.1	等分布数列问题	//191
8.2	等分布	//215
第9章	Roth 与 Roth 定理	//267
9.1	引言	//267
9.2	Roth 定理与菲尔兹奖	//272
9.3	几个重要无理数的逼近	//276
9.4	推广到复数域后	//279
9.5	分形几何学的逼近问题	//281
9.6	与逼近有关的竞赛问题	//283
9.7	几个未解决的问题	//290
9.8	Hurwitz 定理的一个简单证明	//292
第10章	普林斯顿大学数学能力测验中的 Diophantus 逼近问题	//298
10.1	小而美的普林斯顿大学数学系	//298
10.2	普林斯顿大学数学能力测验一例	//309
10.3	解 Diophantus 方程的 Diophantus 逼近方法	//333
第11章	来自爱丁堡国际会议的文献	//344
11.1	代数数的有理逼近	//344

- 第 12 章 来自波兰的报告 //356**
- 12.1 来自波兰的报告 //356
- 12.2 Algebraic Numbers and p -Adic Numbers //363
- 12.3 1918 ~ 1939 年波兰数学学派的影响概述 //372
- 12.4 波兰数学学派的兴起 //394
- 第 13 章 超越数论中的逼近定理 //412**
- 13.1 从一道上海中学生数学竞赛试题谈起 //412
- 13.2 来自俄罗斯的文献 //417
- 第 14 章 自古英雄出少年 //511**
- 14.1 2017 年高考数学天津卷压轴题的高等数学背景 //511
- 14.2 被数学抓住时都很年轻 //516
- 14.3 数学大师不只是数学家 //518
- 14.4 数学大师早年生活 //519
- 14.5 走近数学大师 //527
- 14.6 18 岁博士毕业的神童——“控制论之父”维纳 //528
- 14.7 新生代数学界最恐怖的存在 //537
- 第 15 章 向 Roth 致敬 //543**
- 15.1 Roth 定理及它的历史 //543
- 15.2 Thue 方程 //546
- 15.3 组合引理 //549
- 15.4 进一步辅助引理 //554
- 15.5 一个多项式的指数 //558
- 15.6 指数定理 //562
- 15.7 在 $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ 附近的有理点 $P(x_1, \dots, x_m)$ 的指数 //564
- 15.8 广义朗斯基行列式 //567

- 15.9 Roth 引理 //571
 - 15.10 Roth 定理证明的总结 //578
 - 15.11 Classical Metric Diophantine Approximation
Revisited //584
 - 15.12 On the Convergents to Algebraic Numbers //634
 - 15.13 On Exponential Sums with Multiplicative
Coefficients //653
 - 15.14 Approximation Exponents for Function Fields //666
- 第 16 章 其他数学分支中被冠以 Hurwitz 定理的
几例 //697**
- 16.1 关于 Dirichlet 级数的 Hurwitz 复合定理 //697
 - 16.2 Hurwitz 复合定理在 Dirichlet 级数中的推广 //705
 - 16.3 多复变情形的 Hurwitz 定理 //714
 - 16.4 区间多项式的 Routh-Hurwitz 定理及其应用 //718
 - 16.5 对 Hurwitz 定理的一个推广 //725

引言

第 1 章

1.1 从一道北京大学优秀中学生暑期课堂文化测评试题谈起

2017年8月22日,北京大学优秀中学生暑期课堂文化测评在北京大学举行,其中有一道题为:

设 ω 为整系数方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的无理根,求证:存在 $c_0 > 0$,使得任意互素

正整数 p, q ,满足 $\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_0}{q^2}$.

分析 转化为特殊情况 \sqrt{d} .

解 由已知可知

$$\omega = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

设 $d = a^2 - 4b \in \mathbf{N}_+$,则要求

$$\left| \frac{-a \pm \sqrt{d}}{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_0}{q^2}$$

故

Hurwitz 定理

$$\left| \pm\sqrt{d} - \frac{aq+2p}{q} \right| \geq \frac{2c_0}{q^2}$$

即

$$\left| \sqrt{d} \mp \frac{aq+2p}{q} \right| \geq \frac{2c_0}{q^2}$$

命题转化为:存在 $c'_0 > 0$, 对于任意 $p', q \in \mathbf{Z}, q > 0$, 都有

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p'}{q} \right| \geq \frac{c'_0}{q^2}$$

对于指定的正整数 q , 不妨设

$$\frac{p_0}{q} < \sqrt{d} < \frac{p_0+1}{q}$$

$q, p_0 \in \mathbf{N}_+$, 则

$$\frac{p_0^2}{q^2} < d < \frac{(p_0+1)^2}{q^2}$$

由 $d = \frac{dq^2}{q^2}$, 故

$$\left| d - \frac{p_0^2}{q^2} \right| \geq \frac{1}{q^2}$$

$$\left| d - \frac{(p_0+1)^2}{q^2} \right| \geq \frac{1}{q^2}$$

亦即

$$\left| \left(\sqrt{d} - \frac{p_0}{q} \right) (\sqrt{d} + \sqrt{d}) \right| > \left| \left(\sqrt{d} - \frac{p_0}{q} \right) \left(\sqrt{d} + \frac{p_0}{q} \right) \right| \geq \frac{1}{q^2}$$

整理得

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p_0}{q} \right| > \frac{1}{2q^2\sqrt{d}}$$

与此同时

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sqrt{d} - \frac{p_0 + 1}{q} \right) (\sqrt{d} + \sqrt{d} + 1) \right| \\ & > \left| \left(\sqrt{d} - \frac{p_0 + 1}{q} \right) \left(\sqrt{d} + \frac{p_0 + 1}{q} \right) \right| \geq \frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

整理得

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p_0 + 1}{q} \right| > \frac{1}{q^2(2\sqrt{d} + 1)}$$

取 $c'_0 = \frac{1}{2\sqrt{d} + 1}$ 即可. 此时对于一般的 $p', q \in \mathbf{Z}$, 有

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p'}{q} \right| \geq \min \left\{ \left| \sqrt{d} - \frac{p_0}{q} \right|, \left| \sqrt{d} - \frac{p_0 + 1}{q} \right| \right\} > \frac{c'_0}{q^2}$$

证毕.

俗话说:奇人有奇貌,数学试题也是一样,这个试题的结论在国内中学数学中非常少见,但是对于大学教师却一看便知它源于数论的一个分支——Diophantus(丢番图)逼近论中的一个典型定理,即 Hurwitz(胡尔维茨)定理. 这一点俄罗斯做得比较好,他们的中学生有许多课外读物都涉及这一结论,而且还是循序渐进的,比如在引进的俄罗斯数学家波拉索洛夫著的《代数、数论及分析习题集》中就以三个简单的题目做了导引,如下:

例 1 设 α 是无理数,证明:存在无穷多对互素的数 x, y , 使得 $\left| \frac{x}{y} - \alpha \right| < \frac{1}{y^2}$.

解 固定自然数 n . 因为数 $0, \alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$ 的分数部分位于半开区间 $[0, 1)$ 中, 所以, 其中至少有两个位

Hurwitz 定理

于同一半开区间 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ 中, $0 \leq k \leq n-1$. 这表示对于满足不等式 $0 \leq p_2 < p_1 \leq n$ 的某些整数 p_1 与 p_2 , 有

$$|p_1\alpha - [p_1\alpha] - (p_2\alpha - [p_2\alpha])| < \frac{1}{n}$$

设 $y = p_1 - p_2, x = [p_2\alpha] - [p_1\alpha]$, 则

$$|y\alpha - x| < \frac{1}{n}$$

可以认为 x 与 y 是互素的, 这是因为在以 $\gcd(x, y)$ 除以它们之后, 仍保持所要求的不等式. 同样显然有 $0 < y \leq n$, 因此

$$\left| \frac{x}{y} - \alpha \right| < \frac{1}{ny} < \frac{1}{y^2}$$

现在选一个自然数 n_1 , 使得

$$\left| \frac{x}{y} - \alpha \right| > \frac{1}{n_1}$$

上述构造方法给出一对整数 x_1, y_1 , 使得

$$\left| \frac{x_1}{y_1} - \alpha \right| < \frac{1}{n_1 y_1} < \left| \frac{x}{y} - \alpha \right|$$

这样可以得到无穷多对不同的数对 (x, y) .

例 2 设 α 是正数, 证明: 对于任何数 $C > 1$, 可以选择自然数 x 与整数 y , 使得 $x < C$, 且 $|x\alpha - y| \leq \frac{1}{C}$.

解 首先假设 C 是整数. 考虑数 1 与数 $k\alpha - [k\alpha]$, 其中 $k = 0, 1, \dots, C-1$. 这 $C+1$ 个数位于区间 $[0, 1]$ 中. 因此, 它们中某两个数的距离不大于 $\frac{1}{C}$. 如果这两个数是数 $k_1\alpha - [k_1\alpha]$ 与 $k_2\alpha - [k_2\alpha]$, 其中 $k_1 <$