国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

HURWITZ THEOREM

Hurwitz定理

刘培杰数学工作室 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家出版基金项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

HURWITZ THEOREM

Hurwitz定理

刘培杰数学工作室 编

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分十六章，分别介绍了华罗庚论 Hurwitz 定理、阶梯式学习法、一致分布数列、Roth 定理，以及 Diophantus 逼近问题、超越数论中的逼近定理等内容. 本书从多个方面介绍了 Hurwitz 定理的相关理论，内容丰富，叙述详尽.

本书可供高等院校理工科师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

Hurwitz 定理/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.4

（现代数学中的著名定理纵横谈丛书）

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7135 - 1

Ⅰ.①H… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①多项式 - 函数论 - 定理 Ⅳ.①O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 302286 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江艺德印刷有限责任公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 46.5　字数 479 千字
版　　次　2018 年 4 月第 1 版　2018 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 7135 - 1
定　　价　198.00 元

代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

引言

第1章

1.1 从一道北京大学优秀中学生暑期课堂文化测评试题谈起

2017 年 8 月 22 日，北京大学优秀中学生暑期课堂文化测评在北京大学举行，其中有一道题为：

设 ω 为整系数方程 $x^2+ax+b=0$ 的无理根，求证：存在 $c_0>0$，使得任意互素正整数 p,q，满足 $\left|\omega-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c_0}{q^2}$.

分析 转化为特殊情况$\sqrt{d}$.

解 由已知可知

$$\omega=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

设 $d=a^2-4b\in\mathbf{N}_+$，则要求

$$\left|\frac{-a\pm\sqrt{d}}{2}-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c_0}{q^2}$$

故

Hurwitz 定理

$$\left|\pm\sqrt{d}-\frac{aq+2p}{q}\right|\geqslant\frac{2c_0}{q^2}$$

即

$$\left|\sqrt{d}\mp\frac{aq+2p}{q}\right|\geqslant\frac{2c_0}{q^2}$$

命题转化为：存在 $c'_0>0$，对于任意 $p',q\in\mathbf{Z},q>0$，都有

$$\left|\sqrt{d}-\frac{p'}{q}\right|\geqslant\frac{c'_0}{q^2}$$

对于指定的正整数 q，不妨设

$$\frac{p_0}{q}<\sqrt{d}<\frac{p_0+1}{q}$$

$q,p_0\in\mathbf{N}_+$，则

$$\frac{p_0^2}{q^2}<d<\frac{(p_0+1)^2}{q^2}$$

由 $d=\frac{dq^2}{q^2}$，故

$$\left|d-\frac{p_0^2}{q^2}\right|\geqslant\frac{1}{q^2}$$

$$\left|d-\frac{(p_0+1)^2}{q^2}\right|\geqslant\frac{1}{q^2}$$

亦即

$$\left|\left(\sqrt{d}-\frac{p_0}{q}\right)(\sqrt{d}+\sqrt{d})\right|>\left|\left(\sqrt{d}-\frac{p_0}{q}\right)\left(\sqrt{d}+\frac{p_0}{q}\right)\right|\geqslant\frac{1}{q^2}$$

整理得

$$\left|\sqrt{d}-\frac{p_0}{q}\right|>\frac{1}{2q^2\sqrt{d}}$$

与此同时

$$\begin{aligned}&\left|\left(\sqrt{d}-\frac{p_0+1}{q}\right)(\sqrt{d}+\sqrt{d}+1)\right|\\>&\left|\left(\sqrt{d}-\frac{p_0+1}{q}\right)\left(\sqrt{d}+\frac{p_0+1}{q}\right)\right|\geqslant\frac{1}{q^2}\end{aligned}$$

整理得

$$\left|\sqrt{d}-\frac{p_0+1}{q}\right|>\frac{1}{q^2(2\sqrt{d}+1)}$$

取 $c'_0=\dfrac{1}{2\sqrt{d}+1}$即可. 此时对于一般的 $p',q\in\mathbf{Z}$,有

$$\left|\sqrt{d}-\frac{p'}{q}\right|\geqslant\min\left\{\left|\sqrt{d}-\frac{p_0}{q}\right|,\left|\sqrt{d}-\frac{p_0+1}{q}\right|\right\}>\frac{c'_0}{q^2}$$

证毕.

俗话说:奇人有奇貌,数学试题也是一样,这个试题的结论在国内中学数学中非常少见,但是对于大学教师却一看便知它源于数论的一个分支——Diophantus(丢番图)逼近论中的一个典型定理,即 Hurwitz(胡尔维茨)定理. 这一点俄罗斯做得比较好,他们的中学生有许多课外读物都涉及这一结论,而且还是循序渐进的,比如在引进的俄罗斯数学家波拉索洛夫著的《代数、数论及分析习题集》中就以三个简单的题目做了导引,如下:

例1 设 α 是无理数,证明:存在无穷多对互素的数 x,y,使得 $\left|\dfrac{x}{y}-\alpha\right|<\dfrac{1}{y^2}$.

解 固定自然数 n. 因为数 $0,\alpha,2\alpha,\cdots,n\alpha$ 的分数部分位于半开区间[0,1)中,所以,其中至少有两个位

于同一半开区间$\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$中,$0\leqslant k\leqslant n+1$. 这表示对于满足不等式$0\leqslant p_2<p_1\leqslant n$的某些整数$p_1$与$p_2$,有

$$|p_1\alpha-[p_1\alpha]-(p_2\alpha-[p_2\alpha])|<\frac{1}{n}$$

设$y=p_1-p_2,x=[p_2\alpha]-[p_1\alpha]$,则

$$|y\alpha-x|<\frac{1}{n}$$

可以认为x与y是互素的,这是因为在以$\gcd(x,y)$除以它们之后,仍保持所要求的不等式. 同样显然有$0<y\leqslant n$,因此

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|<\frac{1}{ny}<\frac{1}{y^2}$$

现在选一个自然数n_1,使得

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|>\frac{1}{n_1}$$

上述构造方法给出一对整数x_1,y_1,使得

$$\left|\frac{x_1}{y_1}-\alpha\right|<\frac{1}{n_1y_1}<\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|$$

这样可以得到无穷多对不同的数对(x,y).

例2 设α是正数,证明:对于任何数$C>1$,可以选择自然数x与整数y,使得$x<C$,且$|x\alpha-y|\leqslant\frac{1}{C}$.

解 首先假设C是整数. 考虑数1与数$k\alpha-[k\alpha]$,其中$k=0,1,\cdots,C-1$. 这$C+1$个数位于区间$[0,1]$中. 因此,它们中某两个数的距离不大于$\frac{1}{C}$. 如果这两个数是数$k_1\alpha-[k_1\alpha]$与$k_2\alpha-[k_2\alpha]$,其中$k_1<$