Qualitative Analysis and
Numerical Calculation of Wave Systems

波动系统的
定性分析与数值计算

姜晓丽/著

科学出版社

波动系统的定性分析与数值计算

姜晓丽　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以复杂波动系统解的判定为背景，围绕初始值，研究如何找出弱解的最佳存在条件，优化适定性的区域和门槛结果，从而形成一个行之有效的判定方案. 本书首先综述波动系统的分类、结构、研究背景和经典波动系统问题，进而详细地叙述与本书相关的初边值问题，以及本书用到的弱解理论和数值算法. 在此基础上，本书研究了位势井框架下初始条件对波动系统整体适定性的影响，同时基于有限差分法和迭代原理对其中两类波动系统进行了数值算法的探讨. 本书的研究内容对于解决物理和工程领域的实际问题，例如，光栅传感器的检测性能和桥梁的坚固度等具有重要的现实意义，同时在理论层面为复杂非线性系统的可解条件和适定性分析提供了可行方案，具有一定的科学价值.

本书可作为相关专业工程技术人员、高校学生、科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

波动系统的定性分析与数值计算/姜晓丽著. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-058352-9

Ⅰ.①波… Ⅱ. ①姜… Ⅲ.①波动方程-定性分析②波动方程-数值计算 Ⅳ.①O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 168824 号

责任编辑：张 震 姜 红／责任校对：蒋 萍

责任印制：吴兆东／封面设计：无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张：11 1/2

字数：240 000

定价：99.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

波动系统在声学、电磁学、流体力学和工程制造等领域广泛存在, 用于描述横波和纵波的振动现象. 随之产生的诸多非经典波动系统的可解性问题也对传统的可解原理和初值条件提出了挑战. 例如, 在复杂多变的桥梁颤振系统中, 会有不确定的风速、车体振动的加速度以及桥梁的振动频率等耦合因素综合作用的情况, 导致无法预估系统的识别阈值. 因此, 本书针对这些初始条件和系统自身结构等限制情况, 以复杂波动系统解的判定为背景, 围绕初始值, 研究如何找出弱解的最佳存在条件, 优化适定性的区域和门槛结果, 从而形成一个行之有效的判定方案. 第 1 章论述了波动系统初边值问题的背景、目的及意义等. 第 2 章介绍了一类具有非线性源和阻尼的基尔霍夫系统, 刻画解的不同性态; 利用变分法找到了不同能量级别下系统相应的可解性条件, 提出了可解性判定方法. 第 3 章研究了一类具有非线性源和阻尼以及黏弹性项的基尔霍夫系统; 构建了相应的位势井结构框架, 在不同能量水平下建立了解的整体存在与非存在的判定方法. 第 4 章讨论了一类高阶色散广义 Bq 系统的弱解和数值解, 得到了低能和临界情形下解的整体存在和有限时间爆破性质及门槛条件, 并构造了一种三层隐式守恒差分格式. 第 5 章针对一类弱耗散波动系统的适定性与算法进行了研究, 得到了系统在两种能量级别下可解的条件; 基于有限差分法和多重有限体积法建立了两种不同的离散格式. 本书最后给出了参考文献, 它们密切关联于本书所讨论的内容, 也可以帮助读者进一步学习更深的非线性动力系统理论及其应用与扩展.

本书在阐述前人的理论和方法方面力求分析精髓, 并直接给出新颖观点和想法. 本书的内容是作者近年来的一些研究成果. 本书在研究和形成过程中, 得到哈尔滨工程大学罗跃生教授、徐润章教授的悉心指导和帮助, 是他们将作者引入了非线性科学领域. 感谢作者现工作单位——渤海大学数理学院的支持. 本书获得国家自然科学基金青年科学基金项目 (项目编号：11101102)、辽宁省科技厅项目 (项目编号：201602009) 的资助.

由于作者水平有限, 书中难免有不足之处, 真诚欢迎读者批评指正.

姜晓丽

2017 年 12 月于锦州

目　录

第 1 章　绪　　论

本章简要介绍波动系统对应的模型和发展背景, 介绍本书的研究目的及解决的关键科学问题, 并给出解决问题的研究方案. 考虑到波动系统在工程和物理上的应用日益广泛, 本章最后将本书的研究特色与以往研究成果进行了对比讨论.

1.1　研究的问题

本书共研究四类波动系统, 两类带有非线性源及耗散项的耦合基尔霍夫波动系统, 一类具有高阶色散项的广义非线性 Boussinesq(简称 Bq) 波动系统和一类具有耗散项的非线性波动系统. 下面对这四类系统分别作简要介绍.

第 2 章研究如下一类具有非线性阻尼和非线性源的耦合基尔霍夫系统（耦合体现在基尔霍夫项上）的初边值问题, 主要关注和讨论其整体适定性问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-(a+b\|\nabla u\|^2+b\|\nabla v\|^2)\Delta u+g(u_t)=f(u),(x,t)\in \Omega\times(0,T], \\ v_{tt}-(a+b\|\nabla u\|^2+b\|\nabla v\|^2)\Delta v+g(v_t)=h(v),(x,t)\in \Omega\times(0,T], \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega, \\ v(x,0)=v_0(x),v_t(x,0)=v_1(x),x\in\Omega, \\ u(x,t)=0,v(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

式中, a,b 为基尔霍夫项的系数, $a\geqslant 0,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$;∇ 为梯度符号; Δ 为拉普拉斯算子, $\Delta=\nabla^2$; $f(u),h(v)$ 为系统的外力项; $g(s)$ 为系统的阻尼项. $f(u),h(v)$ 与 $g(s)$ 满足条件 1.1~条件 1.4.

条件 1.1　$f'(0)=h'(0)=0$.

条件 1.2　$f(u)$, $h(v)$ 是单调的且当 $u>0$, $v>0$ 时为凸函数; 当 $u<0$, $v<0$ 时为凹函数.

条件 1.3　$(p+1)F(u) \leqslant uf(u)$, $|uf(u)| \leqslant \gamma_1|F(u)|$, $(q+1)H(v) \leqslant vh(v)$, $|vh(v)| \leqslant \gamma_2|H(v)|$, 当 $n=1,2$ 时, $2<p+1 \leqslant \gamma_1<\infty$. $2<q+1 \leqslant \gamma_2<\infty$; 当 $n \geqslant 3$ 时, $2<p+1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \dfrac{2n}{n-2}$, $2<q+1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \dfrac{2n}{n-2}$, 式中, $F(u)=\displaystyle\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$, $H(v)=\displaystyle\int_0^v h(s)\mathrm{d}s$.

条件 1.4　$c_1|s|^r \leqslant |g(s)| \leqslant c_2|s|^r$, $c_1, c_2>0$, 当 $n \geqslant 3$ 时, $1 \leqslant r \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$; 当 $n=1,2$ 时, $0 \leqslant r<\infty$. $sg(s) \geqslant 0$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^1 递增函数.

第 3 章对如下具有非线性阻尼、耦合非线性源及黏弹性项的耦合基尔霍夫系统在全能级空间（由井深划分的三种初始能量水平）的整体可解性进行分析:

$$
\begin{cases}
u_{tt}-M(t)\Delta u+\displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\Delta u\mathrm{d}s+|u_t|^{p-1}u_t=f_1(u,v), \Omega\times(0,+\infty),\\
v_{tt}-M(t)\Delta v+\displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\Delta u\mathrm{d}s+|v_t|^{q-1}v_t=f_2(u,v), \Omega\times(0,+\infty),\\
u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in\Omega,\\
v(x,0)=v_0(x), v_t(x,0)=v_1(x), x\in\Omega,\\
u(x,t)=v(x,t)=0, \partial\Omega\times[0,+\infty),
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

式中, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 内有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域; $M(t)=m_0+\alpha(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2)^\gamma$, 是一个非负函数, 其中, $\alpha \geqslant 0, m_0+\alpha>0, \gamma>0$. 对于 Δu, Δv 的耦合系数 $M(s)$, 对 $s \geqslant 0$ 松弛函数 g_1 和 g_2, 非线性指标 m, p, q 及非线性源项 $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$ 分别满足条件 1.5~条件 1.8.

条件 1.5　对于非线性源项 $f_1(u,v), f_2(u,v)$ 满足

$$
\begin{cases}
f_1(u,v)=(m+1)(a|u+v|^{m-1}(u+v)+b|u|^{\frac{m-3}{2}}|v|^{\frac{m+1}{2}}u),\\
f_2(u,v)=(m+1)(a|u+v|^{m-1}(u+v)+b|v|^{\frac{m-3}{2}}|u|^{\frac{m+1}{2}}v).
\end{cases}
$$

条件 1.6　$M(s)$ 是一个 C^1 函数, 对于 $s \geqslant 0$ 满足

$$M(s)=m_0+\alpha(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2)^\gamma, m_0 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0, \gamma>0.$$

条件 1.7　非线性指标 m, p, q 满足

$$m>1, \text{若}\, n=1,2 \,\text{或}\, 1<m \leqslant 3, \text{若}\, n=3$$

和

$$p, q \geqslant 1, \text{若}\, n = 1, 2 \,\text{或}\, 1 < p, q \leqslant 5, \text{若}\, n = 3.$$

条件 1.8 对于 $s \geqslant 0$, 松弛函数 g_1, g_2 是 C^1 函数且满足

$$g_1(s) \geqslant 0, m_0 - \int_0^{\infty} g_1(s)\mathrm{d}s = l > 0,$$

$$g_2(s) \geqslant 0, m_0 - \int_0^{\infty} g_2(s)\mathrm{d}s = k > 0$$

和

$$g_1'(s) \leqslant 0, g_2'(s) \leqslant 0.$$

第 4 章研究如下一类高阶广义 Bq 系统的整体适定性问题, 利用有限差分法将系统进行离散, 经过证明得出此离散格式是守恒的, 同时具有稳定性和存在性及依范数二阶收敛等性质:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = f(u)_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3}$$

主要针对如下两类非线性源 $f(u)$ 的条件 1.9 与条件 1.10 进行讨论.

条件 1.9

$$f(u) = \pm|u|^p, p > 4 \,\text{且}\, p \neq 2k, k = 3, 4, \cdots,$$

或

$$f(u) = -|u|^{p-1}u, p > 4 \,\text{且}\, p \neq 2k+1, k = 2, 3, \cdots.$$

条件 1.10

$$f(u) = \pm u^{2k}, k = 1, 2, \cdots \,\text{或}\, f(u) = -u^{2k+1}u, k = 1, 2, \cdots.$$

第 5 章研究如下一类非线性耗散波动系统的整体适定性, 讨论在低初始能量和临界初始能量情形下系统的整体存在性、非整体存在性和衰减速率问题. 对系统 (1.4) 从两个角度利用两种方法, 分别为有限差分法和多重有限体积法进行离散, 分析得到的离散格式的存在唯一性和收敛阶, 并通过算例进行数值实验, 来佐证格式的有效性:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \gamma u_t = f(u), x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

式中, $\gamma \geqslant 0$, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域. $f(u)$ 满足条件 1.11~条件 1.13.

条件 1.11 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ 且对任意的 $u \in \mathbb{R}$, 满足条件 $u\left(uf'(u) - f(u)\right) \geqslant 0$, 当且仅当 $u = 0$ 时上述不等式取等号.

条件 1.12 存在 $a > 0$ 和 q 使得对任意的 $u \in \mathbb{R}$ 有 $|f(u)| \leqslant a|u|^q$ 成立, 且当 $n = 1, 2$ 时, 有 $1 < q < \infty$; 当 $n \geqslant 3$ 时, 有 $1 < q < \dfrac{n+2}{n-2}$.

条件 1.13 对某些 $1 < p \leqslant q$, $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 和任意 $u \in \mathbb{R}$ 有 $(p+1)F(u) \leqslant uf(u)$ 成立.

1.2 研究背景

下面对四类波动系统的发展背景分别进行说明.

系统 (1.1) 起源于对弹性弦微小幅度振动的描述, 见文献 [1]. 具体来说, 它来源于基尔霍夫链, 这种数学物理模型描述了由下述混合方程中给出的长度为 $L > 0$ 的弹性弦的偏转问题, 并由如下单个方程演化而来:

$$\rho h u_{tt} + \delta u_t = \left(p_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x\right) u_{xx} + f(u), \tag{1.5}$$

式中, $0 < x < L$, $t \geqslant 0$, $u(x,t)$ 为在 t 时刻绳上 x 点处的横向偏转; E 为 Young 系数; ρ 为密度; h 为横截面面积; L 为长度; p_0 为初始张力; δ 为阻力系数; f 为外力. 当 $p_0 = 0$ 时, 系统 (1.5) 被称为退化的无弹性的或高维泛化的基尔霍夫系统; 否则称为非退化的弹性弦模型. 系统 (1.5) 最早是由 kirchhoff[2] 于 1883 年在研究张紧的弦或板上进行微小横振动现象时提出来的, 后来此类方程便以他的名字命名. 也可以参考 Ames[3] 的介绍. 事实上, 在 n 维的一般情况下, 系统 (1.5) 又经常被描述成式 (1.6), 它是基尔霍夫系统具有代表性的形式:

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \delta u_t = f(u), \tag{1.6}$$

式中, $M(\|\nabla u\|^2) = M(r)$ 为一个非负局部利普希茨函数 $(r \geqslant 0)$, 且 $M(r) = m_0 + \alpha(a + b\|\nabla u\|^2)^\gamma$; u 为杆的横向位移; x 为振动方向的位移; t 为时间; 弦的非线性弹性和杆内的拉伸负荷分别与 b, α 和 a, m_0 有关.

既然系统 (1.1) 源于单个基尔霍夫方程, 为了能说明问题, 有必要在下面的篇幅中提及一些单个基尔霍夫方程的发展概况. 在过去很长一段时间里, 此类方程的初边值问题已被广泛研究, 并得到了许多有价值和可供参考的结果.

Greenberg 和 Hu [4] 在一维空间 $\mathbb{R}$ 中进行了基尔霍夫线性波动方程

$$u_{tt}-m\left(\|\nabla u\|^{2}\right)^{2}\Delta u=0 \tag{1.7}$$

初值问题的研究. 对于一些满足衰减条件的小初值 (u_0,u_1) 得到了整体解存在且唯一, 运用的主要方法是引进变换将解函数转换成一对未知函数. D'Ancona 和 Spagnolo[5] 将一维空间 $\mathbb{R}$ 推广为 n 维, 同时对于更一般的算子 m 用同样的方法研究了系统 (1.7) 存在整体解, 推广了文献 [4] 中的结果. 他们又在文献 [6] 中在希尔伯特空间范数的定义下证明了系统 (1.7) 在三维空间中存在唯一的整体解, 存在整体解要求的条件是初值 (u_0,u_1) 具有较小的范数 $\|\nabla u_0\|_{H^{1,2}}+\|\nabla u_1\|_{H^{1,2}}$. Rzymowski[7] 也在一维空间 $\mathbb{R}$ 中得到了系统 (1.7) 的整体解存在的结论. 与文献 [4] 不同的是此文放宽了初值的假设条件: 令 $(u_0,u_1)\in C^3(\mathbb{R})\times C^2(\mathbb{R})$, 使得 $\partial_x u_0,\partial_{xx}u_0,\partial_{xxx}u_0,u_1,\partial_x u_1,\partial_{xx}u_1\in C_0L^1(\mathbb{R})$, 并且 $\|\partial_{xx}u_0*\partial_x u_0\|_{L^1}+\|\partial_x u_0*\partial_x u_1\|_{L^1}+\|\partial_x u_1*u_1\|_{L^1}$ 充分小, 式中 $*$ 表示卷积. 对于系统 (1.7) 在有界域上的初边值问题, Racke[8] 首先证明了其整体存在性质, 此结果在文献 [9] 和文献 [10] 中得到了改进. 这两篇文献运用广义傅里叶变换得到了保证整体解存在的充分小的初值. 而在文献 [11] 中 Yamazaki 在通常的索伯列夫空间中的范数意义下证明了系统 (1.7) 在大于等于四维空间的有界域存在唯一的整体解; 同时 Yamazaki 又于文献 [12] 中考虑了三维空间的有界域的小初值整体解存在问题, 得出了与文献 [11] 类似的结论, 并对于 $L^1(\mathbb{R})$ 范数关于时间进行了逐点估计.

对于系统 (1.6) 具有线性阻尼情况, de Brito[13] 在希尔伯特空间中论证了解的存在唯一性和正则性; 同时这篇文献还研究了与上述方程对应的非线性积分–微分方程的初边值问题, 证明了古典解的存在性、唯一性和稳定性. Hosoya 和 Yamada[14] 针对具有线性弱阻尼的基尔霍夫方程的初边值问题进行了探讨, 在较小的初值条件下证明了局部解和整体解存在定理, 首次尝试讨论了此类方程的长时间行为, 得到了解的指数型衰减性质. 同类的与之平行的研究还有 Ikehata [15] 考虑了具有线性强阻尼的基尔霍夫方程的初边值问题的整体存在定理. Yamada[16] 对于拟线性耗散

波动方程的初值问题做了整体存在性的分析. Yamada 发现, 若初值 (u_0, u_1) 和非线性函数 $f(u)$ 满足 $\|u_0\| \leqslant \delta$, $\|u_1\| \leqslant \delta$ 和 $\int_0^{\infty} \|f(s)\|_1 \mathrm{d}s \leqslant \delta$, 则系统的解是整体存在的. 若保持初值的取值范围不变, 令非线性函数 $f(u) = 0$, 则解满足渐近性质 $\|u(x,t)\| = o(1)$. Nishihara[17] 也研究了类似的拟线性基尔霍夫方程的初边值问题, 运用 Galerkin 近似解方法结合能量法讨论了系统解的长时间行为. 不同于上面几篇文献的是拓宽了初值的取值范围, 不必要求初值较小, Nishihara 就外力项 f 的不同情况得到了解的指数衰减结果. 具体来说, 当 $f \equiv 0$ 时, $u(x,t) = O(\exp(-\beta t))$, 而若 f 及其导数 f' 在 $t \to +\infty$ 时满足指数型衰减, 则方程的解及导数也有指数型衰减. Matsuyama[18] 考虑了具有间断非线性项的波动方程的奇异摄动问题:

$$u_{tt} - \left(\varepsilon + \|\nabla u\|^2\right) \Delta u + \delta u_t + g(u) = 0,$$

得到了保证整体解存在的初值范围为 $\dfrac{\|\nabla u_1\|^2}{\|\nabla u_0\|^2} + \|\Delta u_0\|^2 < \dfrac{\delta^2}{4}$, 且其解 $u(t)$ 指数衰减为 $\|\nabla u(t)\| \leqslant \dfrac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$ 和 $\|u'(t)\| \leqslant \dfrac{C}{1+t}$. Nakao[19] 运用变分方法研究了具有线性阻尼的基尔霍夫方程的初边值问题, 构建了初值的无界集合证明了整体光滑解存在. Taniguchi [20] 考虑了具有耗散项的基尔霍夫方程的初边值问题:

$$u_{tt} - M(\|tu\|^2)\Delta u + \gamma_2 u_t + |u_t|^p u_t = |u|^q u$$

基于压缩映像原理, 分别建立了其解的整体存在性和指数型衰减性质即解的渐近性质. 从某种意义来讲, 对于基尔霍夫波动方程的解的适定性研究进入了一个更深的层面.

Matsuyama 和 Ikehata [21] 研究了如下具有非线性弱阻尼项和源项的基尔霍夫方程解的存在性与形态:

$$u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \Delta u + \delta |u_t|^{p-1} u_t = \mu |u|^{q-1} u,$$

在 $H^2 \times H_0^1$ 空间里给出了整体可解性和具有 $E(u_0, u_1)^{\frac{q-1}{2}} < \dfrac{1}{C}$ 形式的能量衰减结论. Benaissa 和 Messaoudi[22] 考虑了带有耗散项的 q-Laplacian 基尔霍夫方程, 在某些假设条件下, 他们证明了在低初始能量状态下该初值问题的整体解存在, 给出了此问题局部解爆破的一些充分条件, 分析了解的爆破行为. Zeng 等 [23] 探索了基

尔霍夫弱阻尼方程的初边值问题, 他们指出了满足什么样的初始条件, 会导致该问题在高初始能量下不存在整体解. 这是关于基尔霍夫方程在超临界能量情形下的第一个研究, 而关于两个方程构成的此类系统在此方面还没有任何结果.

因为本书创新点之一在于针对结构复杂的基尔霍夫系统分析高初始能量下解的定性性质, 而这源于最新研究动态带来的启发, 所以, 下面介绍这方面的一些研究成果及其研究方法, 它们为本书提供了借鉴性的思路.

目前, 一些学者正致力于研究在高初始能量水平下偏微分方程的整体适定性. 讨论系统具有任意高初始能量 $E(0) > 0$ 时解的适定性问题的思维模式是由 Gazzda 和 Weth[24] 首先提出的. 他们针对一类半线性抛物方程发现了任意大初值条件下解会发生有限时间爆破的性质. Gazzda 和 Squassina[25] 研究了半线性阻尼波动系统

$$u_{tt} - \Delta u - \omega \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2} u.$$

在强阻尼项不存在的情况下证明了若初值 $u(x,0)$ 属于不稳定集合 (位势井外空间), 且初值与能量泛函满足一个已知不等式, $u(x,0)$ 与 $u_t(x,0)$ 在某个空间中的内积大于零, 则该问题具有高初始能量的局部解会在有限时间内爆破. 文献 [26]~文献 [28] 讨论了应用此技术结合位势井凸函数方法, 讨论了几类不同的非线性发展方程定解问题的解在高初始能量下的整体适定性问题. Wang[26] 考虑了如下具有黏弹性耗散项的非线性波动方程的初边值问题:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s + u_t = |u|^{p-1} u, \tag{1.8}$$

在对记忆项 g 满足一些合适的假设条件, 且初值满足四个充分条件时, 得出了系统 (1.8) 具有任意高初始能量的局部解会在有限时间内爆破. Taskesen 等 [29] 研究了如下 Bq 方程的初值问题:

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (f(u))_{xx},$$

式中, $f(u) = \gamma |u|^p$, γ 为正数. 通过定义新的泛函, 使用位势井族理论, 给出了一些保证上述问题在高初始能量状态下整体弱解存在的充分条件. 文献 [30] 将文献 [29] 中的结果推广到无穷维. Kuter 等 [31] 研究了如下含有四阶色散项 Bq 方程的初值

问题:

$$u_{tt} - \Delta u - \beta_1 \Delta u_{tt} + \beta_2 \Delta^2 u = \Delta\beta|u|^p, \tag{1.9}$$

令 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $S = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $(Su_0, Su_1) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $a = \dfrac{(p+1)\gamma}{(p+3)\gamma+p-1}$, 假设 $E(0) > 0, K(u,0) > 0$ 证明了系统 (1.9) 在时间区间 $t \in [0,\infty)$ 上弱解 $u(x,t)$ 整体存在. 通过一系列仿真实验, 佐证了证明该问题的高初始能量整体存在性引入新泛函的必要性与有效性. Xu 和 Yang[32] 研究了如下四阶非线性耗散色散波动方程的初边值问题:

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + u_t = |u|^{p-1}, \tag{1.10}$$

通过定义新的泛函, 使用位势井理论和改进的凸函数方法, 给出了一些保证系统 (1.10) 在任意高初始能量状态下, 弱解在有限时间内爆破的充分条件. 关于复杂系统尤其是基尔霍夫系统的整体适定性在临界和超临界情形, 到目前为止还没有任何研究结果. 在工程及物理上有关此类系统的相应问题还未得到解决, 所以本书关于两类基尔霍夫系统的定性研究意义重大.

若系统 (1.1) 中的 $M(t) = 1$, 则其退化为一般的波动系统. 此类系统描述了非线性的波现象, 多见于流体力学、毛细管引力波和生物化学中. 其主要的工作成果集中在文献 [33]~文献 [55] 中. 在研究电磁场中介子的运动时, 文献 [33] 和文献 [34] 首先引入了波动系统

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + g^2 v^2 u = 0, \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + h^2 u^2 v = 0, \end{cases}$$

此类模型的物理意义是描述了标量场 u, v 的数量 m_1, m_2 之间的相互影响. 特别是它刻画了电磁场中的带电介子的运动情况. 这两篇文献给出了方程的古典解, 指出量子场算子可以用解流形的微分算子表示出来, 并在希尔伯特空间给出了合理的解释.

Jögens[35]、Medeiros 和 Menzala[36] 都研究了此类系统, 发现了有界区域内的混合系统弱解的存在性. 文献 [37] 和文献 [38] 通过使用 Galerkin 方法对上面的方程进行了推广, 研究了解的整体存在问题. 文献 [39] 借助于加权 Strichartz 估计法

在无界域上获得了哈密顿双曲系统的整体存在与不存在定理. Zhang[40] 针对低初始能量找到了耦合波动系统的整体存在与爆破的最佳条件.

Reed[41] 对于耦合波动系统

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+m_1^2u=-4\lambda(u+\alpha v)^3-2\beta uv^2,\\ v_{tt}-\Delta v+m_2^2v=-4\alpha\lambda(u+\alpha v)^3-2\beta u^2v,\end{cases}$$

得出了系统整体适定性的条件. 通过对能量等式的讨论, 得到了整体解的存在性、唯一性和爆破成立的初值条件. Wei 和 Yan[42] 用相同的方法将上述结论平行地推广到了含有 k 个变量的同类系统中.

Wang[43] 考虑了具有非负位势但不具有阻尼项的克莱因–戈尔登波动系统

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+m_1^2u+K_1(x)u=a_1|v|^{q+1}|u|^{p-1}u,\\ v_{tt}-\Delta v+m_2^2v+K_2(x)v=a_2|u|^{p+1}|v|^{q-1}v\end{cases}$$

的柯西问题, 对于低维空间 $n=2,3$ 的情况得到了系统的基态解是存在的. 同时也证明了在高初始能量的状态下满足合适的初值条件, 解不会整体存在. Komornik 和 Rao[44] 于 1997 年提出波动系统

$$\begin{cases}u_1''-\Delta u_1+\alpha(u_1-u_2)=0,\\ u_2''-\Delta u_2+\alpha(u_2-u_1)=0\end{cases}$$

的初边值问题. 此模型描述了横向自由振动的弹性连接的双膜复合系统. 式中, u_1 和 u_2 为两个振动膜偏离平衡位置的位移; 耦合项 $\alpha(u_1-u_2)$ 为耦合弹性层施加的力. 这篇文献证明了上述线性紧系统当初值满足合适条件时, 在一致的指数稳定性和非线性边界条件下解具有衰减性质. Aassila[45] 通过弱化边界条件中的耗散项, 使 $|u'|$ 趋向于无穷, 推广了上述系统的衰减结果. Rajaram 和 Najafi[46] 对具有精确边界控制并具有耦合低阶项的双线性波动系统进行了研究:

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+\alpha(u-v)+\beta(u_t-v_t)=0,\\ v_{tt}-\Delta v+\alpha(v-u)+\beta(v_t-u_t)=0,\end{cases}$$

获得了精确可控性的结论. Sun 和 Wang[47] 在对具有线性弱阻尼和非线性源项的

波动系统

$$\begin{cases}\partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 + \partial_t u_1 = |u_2|^{p_1},\\ \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 + \partial_t u_2 = |u_1|^{p_2}\end{cases}$$

的初值问题进行研究时发现, 源项的指数 p_1, p_2 和空间的维数 n 满足不同的关系, 系统的整体适定性是完全不同的. 利用文献 [47] 的思维方法, Takeda[48] 将类似的整体适定性的结果由两个变量构成的系统推广到 k 个变量组成的系统的柯西问题, 发现在小初值限制下将解的整体存在性和有限时间爆破区分开的临界指数与相应的热系统和文献 [47] 中两个变量的波动系统是完全一致的. Wu [49] 研究了如下具有线性弱阻尼的非线性波动系统的初值问题:

$$\begin{cases}u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + \gamma_1 u_t = (|u|^{2p} + |v|^{p+1}|u|^{p-1})u,\\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + \gamma_1 v_t = (|v|^{2p} + |u|^{p+1}|v|^{p-1})v.\end{cases}$$

此类非线性波动系统又称为克莱因–戈尔登系统, 描述了在相对论量子力学情况下, 寻找特定粒子在某一位置的量子幅. 这篇文献采用位势井方法结合凸函数方法, 证明了当初始能量满足 $E(0) < d$ 和 $I(u_0, v_0) < 0$ 时上述系统的解在有限时间内爆破. 2010 年 Liu[50] 也针对具有阻尼项的非线性克莱因–戈尔登系统做了讨论, 证明了该系统具有任意高初始能量的弱解的整体不存在性, 得到了局部解在有限时间内爆破的现象. 对于含有非线性弱阻尼项的波动系统

$$\begin{cases}u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1}u_t = f(u,v),\\ v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{q-1}v_t = h(u,v)\end{cases}$$

的初边值问题的整体适定性的研究, 可以参考文献 [51] 中的叙述: 假设 $r \leqslant \min\{p, q\}$ 成立, 系统即存在一个整体弱解, 而在假设 $r > \max\{p, q\}$ 和 $E(0) < 0$ 的前提下, 证明了爆破解的存在. Toundykov 等 [52] 对此结果做了进一步的推广, 利用位势井方法, 将能量初始水平值由负数拓宽至正数, 但要求其上界值不超过山值, 在此条件下获得了弱解的整体存在、一致衰减率和有限时间爆破. Wu[53] 研究了下面的非线性波动系统当 $F(u,v)$ 中的 $r = 3$ 的情况:

$$\begin{cases}u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1}u_t + m_1^2 u = F_u(u,v),\\ v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{q-1}v_t + m_2^2 v = F_v(u,v),\end{cases}$$

在指标 $p=q=1$ 、初始能量为正和负时分别估计出了爆破时间的上界, 而在负初始能量值下对于爆破时间也给出了恰当估计. 在此工作基础上, Li 等 [54] 也利用对能量水平分层次的思想讨论了高阶波动系统的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+|u_t|^{p-1}u_t=F_u(u,v), \\ v_{tt}+\Delta^2 v+|v_t|^{q-1}v_t=F_v(u,v), \end{cases}$$

式中, $F(u,v)=\alpha|u+v|^{r+1}+2\beta|uv|^{\frac{r+1}{2}}$, $r\geqslant 3$, $\alpha>1,\beta>0$. 对于 $p=q=1$ 的情况, 从初始能量 $E(0)$ 的四个范围出发, 得到了系统的爆破现象和爆破时间的长度; 对于指标 $1<p,q<r$ 的情况, 分别讨论了 $E(0)<0$ 和 $0<E(0)<d$ 时的爆破性质; 同时使用位势井理论证明了整体存在性质; 并运用 Nakao 不等式建立了能量函数的衰减估计结果. 具有线性弱阻尼和非线性弱阻尼项的波动系统

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t+|u_t|^{m-1}u_t=\operatorname{div}\left(\rho_1(|\nabla u|^2)\nabla u\right)+f_1(u,v), \\ v_{tt}+v_t+|v_t|^{r-1}v_t=\operatorname{div}\left(\rho_1(|\nabla v|^2)\nabla v\right)+f_2(u,v) \end{cases} \tag{1.11}$$

的初边值问题的处理方法可以参见以下文献的论述. 此种类型的问题多见于材料科学和物理学中. 当初值满足 $u_0(x),v_0(x)\in H_0^1(\Omega),u_1(x),v_1(x)\in L^2(\Omega)$ 时, 文献 [55] 对于系统 (1.11) 中 $\rho_1\equiv 1$ 的情况在充分小的正初始能量和 $F(u,v)=\alpha|u+v|^{p+1}+2\beta|uv|^{\frac{p+1}{2}}$ 的假设下, 分别建立了解的存在定理和爆破定理. 与文献 [51] 相比, 文献 [55] 利用基态系统和著名的过山理论指出了整体适定性间的联系, 并且解整体存在的条件可以不必像文献 [51] 中必须强调充分小的正初始能量. 更多的关于此类系统的相关结果可参见文献 [56]~文献 [58].

含有两个变量的基尔霍夫系统, 最早是由 Park 和 Bae[59] 在 1998 年提出的:

$$\begin{cases} u_{tt}-(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2)^\gamma\Delta u+\delta|u_t|^{p-1}u_t=\mu|u|^{q-1}u, \\ v_{tt}-(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2)^\gamma\Delta v+\delta|v_t|^{p-1}v_t=\mu|v|^{q-1}v. \end{cases}$$

利用近似解理论证明了上述问题弱解的存在性, 得到了弱解存在的初值条件为 $2\gamma<\min\{q-1,(4-N)q+N-2\}$, $\mu\left(C(\Omega,q+1)\right)^{q+1}\left(\dfrac{2(q+1)(\gamma+1)}{q-1-2\gamma}E(u_0,v_0)\right)^{\frac{q-1-2\gamma}{2(\gamma+1)}}<1$. 之后, Park 和 Bae 分析了弹性杆的两种情况: 一是仅受强迫力的作用, 二是外力与阻尼力共同作用. 在这两种情形下对上述系统的解进行了对比. 对比结果