

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

 世界名校名家基础教育系列
Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

高等数学教程 第3版

下册

范周田 张汉林 编著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

每个二维码都是通向
微积分的一扇门

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
世界名校名家基础教育系列

高等数学教程

下 册

第 3 版

范周田 张汉林 编著



机械工业出版社

本书在编写过程中取国内外优秀教材之长，在透彻研究的基础上，以尽可能简单的方式呈现微积分知识。

网络（手机）支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等移动学习功能。

本套教材分为上、下册，并有《高等数学教程例题与习题集》与之配套。本书是下册，内容包括：常微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分。

本书各节末均配有分层习题，各章末配有综合习题。书后的附录对若干重点问题进行了细致的分析。

本书适合作为高等院校理工科类各专业学生的教材，也可作为自学、考研的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程. 下册/范周田, 张汉林编著. —3 版. —北京: 机械工业出版社, 2017. 12

“十三五”国家重点出版物出版规划项目. 世界名校名家基础教育系列

ISBN 978-7-111-58498-8

I. ①高… II. ①范… ②张… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 280792 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 汤 嘉

责任校对：刘 岚 封面设计：鞠 杨

责任印制：孙 炜

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2018 年 1 月第 3 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 19.5 印张 · 364 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58498-8

定价：49.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88379833

机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649

机工官博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面防伪标均为盗版

金书网：www.golden-book.com

序

《高等数学教程》(上、下册)是北京工业大学数理学院的范周田、张汉林等多位教师经过数年总结探索,结合自身教学实践而编写的公共数学教材,在概念和方法上都很有创新.

高等数学是几乎所有大学生的必上之课,恐怕也是最重要的一门基础课.现在的高等数学教材种类繁多,内容大同小异,那么选什么教材就变得尤为关键,而本套教材确实是一套内容翔实、易教易学的高等数学教材.

本套教材从无到有,由浅入深,抓住了微积分的牛鼻子,从无穷小入手,进而引入极限的一般概念,循序渐进地将学生引入微积分的殿堂.书中有很多评注和要点总结,这是学生最希望看到的.

值得一提的是,在第1章中引入无穷小时,书中话语通俗易懂、平易直观,摆脱了以往教材生硬、古板、上来就是 ε - δ 语言的讲法,而是一语中的,抓住了“无穷小”的本质.生动之后又将其数学化,老师易教,学生也易学.将复杂的内容,抓住实质讲得明白,使学生觉得自然亲切,真正是以一个例子说清了最不易说清楚而又不得不说的无穷小问题.

微积分的教学改革既举足轻重,又颇具难度.本套教材对微积分的教学改革是一个很大的推动.应该说,微积分的教学改革是一场攻坚战,我们仍需努力,将它进行到底!

中国科学院 院士

林 群

2011年2月23日于北京



第3版前言

除了本身的知识外，高等数学（微积分）还是学习解决问题的思想方法的一门课程。尽管有些人可能在毕业之后不再直接用到微积分，但是他们仍然可以从微积分的学习中受益，因为他们在此过程中所获得的能力，包括严密的逻辑思维能力、对问题的分析和判断能力，不仅可以用于专业，而且可以用在生活中的方方面面。编写本书是期望读者能够更顺利地完成微积分的学习。

在内容方面，本书延续了第1版逻辑简约、语言科学、平易的优点，汲取了国内外优秀教材的众家之长，秉承透彻研究、简单呈现的原则，对微积分内容及叙述方式做了进一步的梳理；以微积分中的数学思想为主线，对一些重点或难点知识进行了优化，降低了教与学的难度，有利于学习者理解、掌握数学的思维方式，并将之应用于解决实际问题。

在形式方面，本书是融合式教学的一种载体，是传统微积分教材与现代网络教育技术结合的有机体。教材配有与之对应的网络教学资源，包括视频、音频或文本等，支持重点知识解析、图形演示、精选例题讲解、习题答案或提示、扩展阅读、讨论和节点检测等。共享的网络资源定位准确，并在不断地更新和完善。

本书的编写得到了众多的帮助与支持，特别在此表示感谢！

感谢北京工业大学副校长吴斌教授、教务处长郭福教授。

感谢北京工业大学高等数学课程组全体同事及北京服装学院的同仁们。

对关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢！

由于编者水平和时间有限，对书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编 者

2017 秋于北京工业大学



第1版前言

高等数学(微积分)是大学各理工科专业最重要的公共基础课程,具有周期长、课时多、内容多、难点多等特点.一套好的教材应该用科学、平易的语言阐明微积分的主要内容,并且应该易教易学.

为了实现这一目标,我们长期致力于高等数学教材的建设工作,先后有范周田、张汉林、平艳茹、杨晓华、丁津、唐兢、王术、田鑫、张方、李贵斌、胡京兴、徐大川等十余位教师参与其中.

在教材的写作过程中,我们有幸得到了林群院士的指导.林群院士指出:“擒贼先擒王,无穷小就是微积分的王.抓住了无穷小就可以学会微积分.”同时,我们学习了张景中院士的教育数学理论,即要“通过对数学本身的研究来化解数学的难点”,知识的结构与表达要做到“逻辑结构尽可能简单,概念引入要平易直观,要建立有力而通用的解题工具”.《高等数学教程》的写作充分借鉴了这些思想和理论.

《高等数学教程》具有以下特点:

1. 化解障碍,平易衔接.极限理论是微积分理论的重要基础,也是微积分入门的主要障碍.我们首先从自变量的变化趋势出发,直观地介绍了三个基本的无穷小,然后用极限的 ε - δ 定义证明了无穷小的比较定理.以此为基础,我们从正面诠释极限理论,避开了极限定义中“颠倒因果关系”造成的学习困难.这样既能表达极限 ε - δ 语言的意境和作用,又和初学者已有的知识水平和思维习惯相适应,在一定程度上降低了极限理论的学习难度.

2. 重点突出,难点分散.例如,中值定理是导数应用的理论基础,也是一元微积分教学的重点和难点,我们从便于学习者加深理解并掌握的角度对其进行了重新设计.每一节都只有一个重点或难点,从定理证明、思想方法、应用等多侧面由易到难进行介绍.

3. 对重点概念或定理的表述更加科学,更加平易直观,例如,函数、不定积分和曲率等概念的表述,以及复合函数的导数公式、积分换元法、牛顿-莱布尼兹公式的证明等.

4. 突出数学的思想方法,用数学思想解决实际问题.例如,教材中借助求解常微分方程过程中经常使用的变量替换的思想,简化了二阶常系数线性微分方程的求解过程.又如,对坐标的曲面积分是为解决物理中的场论问题产生的,我们从物理问题出发建立对坐标的曲面积分的概念,并从概念中产生了计算



方法.

《高等数学教程》整套教材的写作得到了韩云瑞教授、李心灿教授、郭镜明教授等多位专家的热心支持与无私帮助,其中韩云瑞教授认真审阅了本书的全部书稿,李心灿教授审阅了部分书稿,并提出了许多宝贵意见.专家们广博深厚的知识、严谨治学的风范以及乐于助人的美德深刻地影响了我们.正是在他们的帮助和鼓励下本书才得以顺利完成,在此向他们表示崇高的敬意!

在《高等数学教程》成书之际,诚挚感谢林群院士和张景中院士!

感谢我校蒋毅坚副校长、教务处及数理学院的相关领导长期以来对我们的关心和支持!

对我们的同事,关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢!

由于编者水平和时间有限,书中难免有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编 者



目 录

序

第3版前言

第1版前言

第7章 常微分方程	1
7.1 常微分方程的基本概念	1
习题 7.1	4
7.2 一阶微分方程	6
7.2.1 可分离变量的微分方程	6
7.2.2 齐次微分方程	10
7.2.3 一阶线性微分方程	13
*7.2.4 伯努利方程	15
习题 7.2	16
7.3 可降阶的高阶微分方程	18
7.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	18
7.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	19
7.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	20
习题 7.3	23
7.4 高阶线性微分方程	24
7.4.1 函数的线性相关与线性无关	24
7.4.2 线性微分方程解的结构	25
*7.4.3 线性微分方程解的存在唯一性	27
习题 7.4	28
7.5 常系数齐次线性微分方程	29
7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程	29
7.5.2 n 阶常系数齐次线性微分方程	33
习题 7.5	34
7.6 常系数非齐次线性微分方程	35
7.6.1 二阶常系数非齐次线性微分方程	35



*7.6.2 欧拉方程	43
习题 7.6	44
综合习题 7	44
第 8 章 无穷级数	46
8.1 常数项级数的概念和性质	46
8.1.1 常数项级数的概念	46
8.1.2 收敛级数的基本性质	49
习题 8.1	51
8.2 常数项级数的审敛法	52
8.2.1 级数收敛的必要条件	52
8.2.2 正项级数及其审敛法	53
8.2.3 交错级数	59
8.2.4 绝对收敛与条件收敛	61
习题 8.2	64
8.3 幂级数	66
8.3.1 函数项级数的概念	66
8.3.2 幂级数及其收敛性	67
8.3.3 幂级数的性质及幂级数的和函数	72
习题 8.3	76
8.4 泰勒级数	77
8.4.1 泰勒级数的概念	77
8.4.2 函数展开为幂级数	78
8.4.3 幂级数的应用	84
习题 8.4	86
8.5 傅里叶级数	88
8.5.1 三角函数系	88
8.5.2 周期为 2π 的函数的傅里叶级数	90
8.5.3 函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数	93
8.5.4 函数在 $[0, \pi]$ 上的正弦级数或余弦级数	95
8.5.5 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数	98
*8.5.6 傅里叶级数的复数形式	99
习题 8.5	101
综合习题 8	101



第9章 空间解析几何与向量代数	104
9.1 空间向量及其运算	104
习题 9.1	109
9.2 空间平面和直线方程	110
9.2.1 空间平面方程	110
9.2.2 空间直线方程	114
习题 9.2	116
9.3 空间曲面和曲线	117
习题 9.3	124
第10章 多元函数微分学及其应用	125
10.1 多元函数的极限与连续	125
10.1.1 n 维空间	125
10.1.2 多元函数的极限	127
10.1.3 多元函数的连续性	129
习题 10.1	129
10.2 偏导数	131
10.2.1 偏导数的概念及其计算	131
10.2.2 偏导数的几何意义	133
10.2.3 高阶偏导数	135
习题 10.2	137
10.3 全微分及其应用	139
习题 10.3	143
10.4 多元复合函数的求导法则	144
习题 10.4	148
10.5 隐函数及其求导法	151
习题 10.5	156
10.6 多元微分在几何上的应用	158
10.6.1 空间曲线的切线与法平面	158
10.6.2 空间曲面的切平面与法线	159
习题 10.6	162
10.7 多元函数的极值	164
10.7.1 无条件极值	164
10.7.2 条件极值 拉格朗日乘数法	169



习题 10.7	173
10.8 方向导数与梯度	174
10.8.1 方向导数	174
10.8.2 梯度	177
习题 10.8	180
综合习题 10	181
第 11 章 重积分	183
11.1 二重积分的概念与性质	183
11.1.1 二重积分的概念	183
11.1.2 二重积分的性质	185
习题 11.1	187
11.2 二重积分的计算	188
11.2.1 直角坐标系下二重积分的计算	188
11.2.2 极坐标系下二重积分的计算	193
11.2.3 对称性与二重积分	196
* 11.2.4 二重积分的变量替换	199
习题 11.2	203
11.3 三重积分	206
11.3.1 三重积分的概念	206
11.3.2 空间直角坐标系下三重积分的计算	207
* 11.3.3 利用球坐标系计算三重积分	212
习题 11.3	214
11.4 重积分的应用	217
11.4.1 几何应用	217
11.4.2 物理应用	220
习题 11.4	227
综合习题 11	228
第 12 章 曲线积分与曲面积分	230
12.1 第一型曲线积分	230
12.1.1 第一型曲线积分的概念和性质	230
12.1.2 第一型曲线积分的计算	232
习题 12.1	236
12.2 第二型曲线积分	238



12.2.1 第二型曲线积分的概念与性质	238
12.2.2 第二型曲线积分的计算	239
习题 12.2	243
12.3 格林公式及其应用	245
12.3.1 格林公式	245
12.3.2 平面上的曲线积分与路径无关的条件	251
12.3.3 全微分方程	254
习题 12.3	257
12.4 第一型曲面积分	259
12.4.1 第一型曲面积分的概念与性质	259
12.4.2 第一型曲面积分的计算	260
习题 12.4	264
12.5 第二型曲面积分	265
12.5.1 双侧曲面及其法向量	265
12.5.2 第二型曲面积分的概念	266
习题 12.5	273
12.6 高斯公式 通量与散度	274
12.6.1 高斯公式	274
12.6.2 通量与散度	278
习题 12.6	280
12.7 斯托克斯公式 环流量与旋度	281
12.7.1 斯托克斯公式	281
12.7.2 环流量与旋度	284
习题 12.7	285
综合习题 12	286
附录 研究与参考	289
A. 关于常微分方程的注记	289
B. 关于多元函数极值的充分条件	292
参考文献	297



第 7 章

常微分方程

确定变量之间的函数关系，既是用数学解决实际问题的关键之处也是最困难之处。在某些情况下，通过对实际问题的抽象和简化，可以建立未知函数与其导数的关系式，即微分方程。这样的微分方程就是问题的数学模型。

本章我们介绍几类微分方程的求解方法。

7.1 常微分方程的基本概念

常微分方程是指含有一元未知函数的导数（或微分）的方程，微分方程中出现的最高阶导数的阶数 n 称为该微分方程的阶，此时也称该方程为 n 阶常微分方程。例如

$$y'' + xy' + x^2y = 0$$

是二阶常微分方程。

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

其中 $y^{(n)}$ 必须出现。

使微分方程成为恒等式的函数称为微分方程的解，即如果

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$



则 $y = \varphi(x)$ 就是微分方程 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的解. 解的图形叫作微分方程的积分曲线.

以后我们讨论的微分方程都是可以把最高阶导数解出来的, 即

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

例 7.1 人口增长的微分方程模型.

2004 年初, 世界人口总量约为 64 亿. 据说, 到 2020 年世界总人口将达到 79 亿. 这个结果是怎么预测出来的?

在数学上是这样处理这个问题的: 用 $y = f(t)$ 表示世界人口在 2004 年后时刻 t 的总量 (时间单位是年). $y = f(t)$ 是一个未知函数, 取值是整数, 当有人出生或死亡时, $y = f(t)$ 的值是跳跃的. 然而, 相对于巨大的人口总量来说, 这种跳跃幅度如此之小, 以至于我们可以把 $y = f(t)$ 看作一个可导函数.

一个看似合理的假设是: 在一个很小的时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内, 人口总量的变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 与人口总量 y 成比例, 即

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

其中, Δy 是在 $[t, t + \Delta t]$ 期间出生人口数减死亡人口数. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

这就是人口增长的一个微分方程模型, 其中 k 为比例参数, 当 $k > 0$ 时, 人口总量增加; 当 $k < 0$ 时, 人口总量减少.

容易验证, $y = Ce^{kt}$ 满足微分方程 $\frac{dy}{dt} = ky$, 因而它是微分方程 $\frac{dy}{dt} = ky$ 的解, 其中 C 为任意常数.

这个微分方程模型被称作**指数模型**. 自然界中的许多量的变化都与自身的大小成一定的比率, 如细菌的繁殖、放射性物质的质量、按复利计算的投资收益等, 这些问题都适合于指数模型.

由条件, $y(0) = 64$, 代入 $y = Ce^{kt}$ 得 $y = 64e^{kt}$. 世界人口的历史数据表明, $k \approx 0.0132$, 即 $y = 64e^{0.0132t}$. 当 $t = 16$ 时,

$$y(16) = 64e^{0.0132 \times 16} \approx 79$$

即 2020 年世界总人口约为 79 亿.

注 按照指数模型, 随着时间的增加, 人口增长速度将越来越快. 实际上, 受空间和资源等限制, 世界人口总量不可能无限制地增长, 必然有一个上限. 于是世界人口增长的微分方程模型被修正为

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$



其中 L 就是世界人口总量的上限. 当 y 远远小于 L 时, y 近似指数增长, y 越接近 L , 其增长的速度越慢. 这个微分方程模型称为逻辑斯谛 (Logistic) 模型.

例 7.2 设 $k \neq 0$ 为常数, 验证 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2 是任意常数) 是二阶微分方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt\end{aligned}$$

将 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 和 x 代入原方程, 得

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = 0$$

故

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

是原方程的解.

方程的解 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 中包含两个任意常数 C_1 和 C_2 . C_1 和 C_2 在解中的作用不能相互替代, 我们称之为独立的任意常数.

如果微分方程的解中包含有独立的任意常数, 且独立的任意常数的个数等于该微分方程的阶数, 则这种解就是微分方程的通解.

例如, $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 就是二阶微分方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的通解; $y = Ce^{kt}$

是微分方程 $\frac{dy}{dt} = ky$ 的通解.

例 7.3 验证 $y = \sin(x + C)$ (C 为任意常数) 是微分方程

$$y^2 + y'^2 = 1$$

的通解.

解 把 $y = \sin(x + C)$, $y' = \cos(x + C)$ 代入方程, 得恒等式

$$\sin^2(x + C) + \cos^2(x + C) \equiv 1$$

所以, $y = \sin(x + C)$ (C 为任意常数) 是微分方程 $y^2 + y'^2 = 1$ 的解.

又因为 $y = \sin(x + C)$ 中含有一个任意常数, 而 $y^2 + y'^2 = 1$ 是一阶微分方程, 所以, $y = \sin(x + C)$ (C 为任意常数) 是微分方程 $y^2 + y'^2 = 1$ 的通解.

注 微分方程的通解不一定能包含所有的解, 例如, $y \equiv 1$ 是微分方程的一个解, 但它并不在通解 $y = \sin(x + C)$ 当中.



微分方程不含任意常数的解称为方程的特解. 例如, $x = \sin kt$ 和 $x = \cos kt$ 都是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 的特解.

在许多情况下, 我们关心微分方程在满足一定条件的解, 这样的条件称为初始条件. 带有初始条件的微分方程问题称为初值问题或定解问题.

例 7.1 中的微分方程模型可以改写为 $\frac{dy}{dt} = 0.0132y$, $y(0) = 64$.

常微分方程分为线性微分方程和非线性微分方程. 在 n 阶微分方程中形如 $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ 的微分方程称为线性微分方程, 其中 $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_1(x), a_0(x)$ 和 $b(x)$ 为已知函数, 其他的都是非线性微分方程.

例如, $\frac{dy}{dt} = kt$, $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 都是线性微分方程, 而 $y^2 + y'^2 = 1$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$ 都是非线性微分方程.

例 7.4 试指出下列微分方程的阶数, 并说明它们是线性的还是非线性的?

$$(1) x(y')^2 - 2yy' + x = 0$$

$$(2) x^2y'' - xy' + y = 0$$

$$(3) xy''' + 2y'' + x^2y = 0$$

$$(4) (7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$$

$$(5) L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$(6) \frac{dp}{d\theta} + p = \sin^2\theta$$

解 (1), (4), (6) 为一阶微分方程; (2), (5) 为二阶微分方程; (3) 为三阶微分方程. 其中 (2), (3), (5), (6) 是线性微分方程, (1), (4) 是非线性微分方程.

习题 7.1

A 组

1. 指出下列方程的阶数, 并指出哪些方程是线性微分方程:

$$(1) x(y')^3 - 2yy' + xy'' = 0$$

$$(2) xy''' - x^2y' + y = 0$$

$$(3) xy'' - 3y' + (\sin x)y = 0$$

$$(4) (5x - 4y)dx + (x + y)dy = 0$$

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

$$(1) xy' = 2y, y = 5x^2$$

$$(2) y'' + y = 0, y = 3\sin x - 4\cos x$$

$$(3) y'' - 2y' + y = 0, y = x^2e^x$$



$$(4) y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = 0, y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$$

3. 已知曲线在点 (x, y) 处的切线的斜率为 $2x^2$, 建立该曲线所满足的微分方程.

4. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 p 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 与温度的平方成反比.

B 组

1. 已知曲线上的点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且 PQ 被 y 轴平分, 建立曲线所满足的微分方程.

2. 求曲线族 $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ (C_1, C_2 是任意常数) 所满足的微分方程.

3. 如果 $f(x)$ 是可微函数, 且满足

$$2 \int_0^x f(t) dt + f(x) = x^3$$

试求 $f(x)$ 所满足的微分方程.

4. 设连续函数 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程.

