非线性系统的动力学行为及其数值分析

Dynamical Behaviors and Numerical Analysis of Nonlinear System

王贺元　编著

科学出版社

非线性系统的动力学行为及其数值分析

Dynamical Behaviors and Numerical Analysis of Nonlinear System

王贺元　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了非线性系统的动力学行为及其数值分析问题，综述了非线性系统的分岔与混沌的发展历史和研究方法，包含了作者近年来在这一领域取得的一些研究成果。包括五方面内容：非线性系统的分岔和混沌行为简述及其相关研究方法概述；微分方程稳定性与定性理论；分歧及其数值计算方法简介；非线性系统的混沌行为分析；无穷维混沌系统的低模分析及其数值仿真问题。

本书可供理工科院校的数学、物理等相关专业的教师、研究生和高年级本科生使用，也可供流体力学、航空航天、大气物理等相关专业科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统的动力学行为及其数值分析/王贺元编著. —北京：科学出版社，2018.6
ISBN 978-7-03-057973-7
Ⅰ.①非… Ⅱ.①王… Ⅲ.①非线性系统(自动化)–动力学分析 Ⅳ.①O655.9
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 131404 号

责任编辑：刘信力／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 6 月第一次印刷 印张：12 3/4
字数：244 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

对非线性系统动力学行为的探索，自 19 世纪 80 年代初开始，已经经历了一个多世纪，至今仍方兴未艾。其研究汇聚了世界上一大批优秀学者，发表了数以千计的科学论著，吸引了各领域的众多科技工作者和青年学生。迄今为止，国内已出版多部非线性动力学方面的教材和专著，但基于以下几点考虑，我们还是决定把这本《非线性系统的动力学行为及其数值分析》奉献给读者。第一，大千世界是非线性的，非线性系统普遍存在于自然界和人类社会的各个领域，非线性系统的研究无论是对现代科学技术还是对社会经济系统都有重大的理论价值和实践意义。为了使初学者对非线性系统有较全面的了解，不至于在茫茫文献中迷失方向，编写一本虽不是专著，但也不是普通科普读物的非线性系统方面的书籍是非常必要的。第二，非线性系统分歧与混沌现象的研究领域之深广，攻关气势之磅礴，震撼着整个学术界。研究生的相关专业甚至本科的相关专业都已开设了相关的必修和选修课，编写合适的教材和教学参考书是当务之急，本书是这方面工作的探索和尝试。第三，无穷维系统的动力学行为是人们目前普遍关注的焦点和难点，其理论和数值分析极具挑战性，本书借鉴协同学役使原理以及无穷维动力系统惯性流形的思想，在约化无穷为有限方面作了一些探索和尝试。

本书具有以下特点：第一，介绍非线性动力学的主干，精练而不失全面；第二，作为教材或教学参考书，由浅入深，易读而不失严密；第三，既不限于论述某一方面的专门研究成果，也非一般非线性动力学资料的汇编，而是在精选资料的基础上，根据作者的理解和研究重新编排组合，构建一个比较科学的非线性动力学的知识体系，体现出“组合即创新”的原则；第四，对协同学与非线性动力学之间的关系、无穷维非线性动力系统等的最新进展作了较详细的阐述，对分数阶、时滞和复杂网络系统等目前人们普遍关注的热点问题也作了简单的介绍，将读者直接引向学科发展的前沿；第五，数值仿真与分析典型非线性系统的动力学行为是本书的亮点。

本书内容如下：第 1 章是绪论，对非线性科学理论与描述混沌现象的方法进行了简单的综述，简单介绍了探讨混沌的几种方法与描述非线性系统混沌行为的几个指标等，介绍了混沌学研究的意义；第 2 章介绍了微分方程稳定性与定性理论，包括解的存在唯一性定理、解的稳定性、定性理论简介、线性稳定性分析和中心流形定理、混沌系统吸引子的存在性和全局稳定性分析等内容；第 3 章介绍了非线性系统的分歧及其研究方法与数值计算方法等内容；第 4 章是非线性系统的

混沌行为分析，介绍了协同学与维数约化方法、典型的混沌案例分析、混沌的内在规律、洛伦兹 (Lorenz) 系统等几个典型的混沌系统截取过程及混沌行为分析等内容；第 5 章是两个无穷维混沌系统的低模分析及其数值仿真，包括库埃特–泰勒 (Couette-Taylor) 流三模系统的混沌行为及其数值仿真和不可压缩磁流体动力学类洛伦兹系统的动力学行为及其数值仿真，并给出了非线性系统的数值仿真算法与 MATLAB 程序，这一章内容是作者近年来承担国家自然科学基金等各类科研项目的部分研究成果，在此感谢国家自然科学基金 (11572146)、辽宁省教育厅科研基金 (L2013248) 和锦州市科技专项基金 (13A1D32) 的资助。

由于学识和水平所限，不当和错误之处在所难免，敬请同行专家批评指正。

王贺元

2017 年 6 月

目　录

第1章 绪 论

1.1 非线性科学理论与描述混沌现象的方法概述

1. 动力学系统

非线性动力系统包括代数的、常微和偏微的或者它们耦合的非线性系统，即使是简单的，也具有极为复杂的动力学行为。非线性动力学成为物理学、力学和数学等学科中研究的主流之一。1923 年，泰勒 (G. I. Taylor) 从实验和理论上，分析了两个同心无限长的、以不同的角速度旋转的圆柱体之间的粘性流体流动稳定性问题。当雷诺 (Reynolds) 数较低时，流动是定常的层流，称为库埃特 (Couette) 流；当雷诺数增长到一定的数值时，库埃特流变为不稳定，出现了有旋涡的流动，形成了绕轴旋转的环形涡流；再增加雷诺数，轴对称的涡流也变得不稳定，出现了一个地平经度的行进波，这种可以观察到的分歧现象，引起了很多数学家和物理学家的极大兴趣。1963 年，气象学家洛伦兹 (E. N. Lorenz) 在数值实验中发现混沌现象；1971 年，茹厄勒 (D. Ruelle) 和塔肯斯 (F. Takens) 对耗散动力系统引出了奇怪吸引子概念，建议用于描述湍流发生的新机制，随后，梅 (R. May) 指出，生态学中一些非常简单的动力学数学模型，具有极为复杂的动力学行为；1975 年，李天岩 (Li) 和约克 (Yorke) 在一篇《周期 3 意味着混沌》的论文中，正式提出混沌这个概念；随后，费根鲍姆 (M. J. Feigenbaum) 和 Coullet 独立地发现了倍周期分歧现象中标度性和普适常数，揭示了混沌现象中也存在确定性规律；这些研究方向迅速融成一片，引起了众多物理学家和数学工作者的关注。

应该说，促进这一研究热潮的基本动力之一，是寄希望于打开湍流研究的新门户。一百多年以来，湍流运动规律的研究一直没有取得根本性的突破，至今仍是物理学领域内最为困难的一个基础理论问题。由于它具有广泛而重要的应用价值，是自然界的所有非线性现象中一个典型代表，且 20 世纪 60 年代以后，在非线性科学中相继发现了孤立子、拟序结构、确定性混沌、奇怪吸引子以及分形结构等等基本规律，这极大地刺激了湍流的研究。科学家们逐渐认识到分歧、分形和混沌的研究最终将为了解湍流运动的本质和产生机理敞开大门。1983 年，瑞典诺贝尔奖学术委员会和美国科学、工程和公共政策委员会都对湍流和混沌现象之间的关系作过深入细致的探讨并广泛征求意见，给出了比较乐观的估计。低维动力学研究取得显著成就的同时，无限维动力学长时间行为研究也方兴未艾，尤其是对纳维–斯托

克斯 (Navier-Stokes) 方程、Kuramoto-Sivashinsky 方程、Cahn-Hilliard 方程、金茨堡–朗道 (Ginzburg-Landau) 方程、非线性薛定谔 (Schrödinger) 方程、非线性反应扩散方程等吸引子及其分维数的估计的研究，以及由此引出的惯性流形、近似惯性流形等新概念和建立此基础上的新算法的研究等。

真实动力系统几乎总是含有各种各样的非线性因素，诸如机械系统中的间隙、干摩擦，结构系统中的材料弹塑性和黏弹性、构件大变形，控制系统中的元器件饱和特性、控制策略非线性等。通常在某些情况下，线性系统模型可提供对真实系统动力学行为的很好的逼近。然而，这种线性逼近在许多情况下并非总是可靠的，被忽略的非线性因素有时候会在分析和计算中引起无法接受的误差，使理论结果与实际情况有着“失之毫厘，谬以千里”之别。特别是对于系统的长时间历程动力学问题，即使略去很微弱的非线性因素，也常常会在分析和计算中出现本质性的错误。

非线性动力学理论的研究和发展已经经历了一个多世纪，为了使非线性动力学理论在“十三五”期间得到更好的发展，非常有必要回顾一下非线性动力学研究和发展的历史。非线性动力学理论的发展大致经历了 3 个阶段：第 1 阶段是从 1881 年到 1920 年前后，第 2 阶段从 20 世纪 20 年代到 70 年代，第 3 阶段从 20 世纪 70 年代至今。第 1 阶段主要是定性理论的发展，其主要的标志性成果有法国科学家庞加莱 (Poincaré) 1881~1886 年间发表的系列论文《微分方程定义的积分曲线》，俄罗斯科学家李雅普诺夫 (Lyapunov) 1882~1892 年间完成的博士论文《运动稳定性理论》以及美国科学家伯克霍夫 (Birkhoff) 在 1927 年出版的著作《动力系统》。第 2 阶段主要是非线性系统动力学问题的定量方法研究的发展，代表人物有俄罗斯科学家克雷洛夫 (Krylov) 和包戈留包夫 (Bogliubov)，乌克兰科学家特罗波尔斯基 (Mitrpolsky)，美国科学家奈弗 (Nayfeh) 等。在这个阶段，克雷洛夫和包戈留包夫二人提出并系统地发展了平均法。在平均法的基础上，Krylov, Bogliubov 和 Mitrpolsky 三人发展了三级数法，也简称为 KBM 方法。奈弗系统地发展和总结了多尺度方法。许多科学家利用这些方法解决了大量的动力学和工程学中的问题。在这个阶段中抽象提炼出的著名非线性系统如 Duffing 方程、Van der Pol 方程以及马蒂厄 (Mathieu) 方程等，至今仍被人们用以研究非线性系统动力学现象的本质特征。从 20 世纪 60 年代开始，原来独立发展的分岔理论汇入非线性动力学研究的主流当中，混沌现象的发展更为非线性动力学的研究注入活力，分岔、混沌的研究成为非线性动力学理论新的研究热点。俄罗斯科学家阿诺德 (Arnold) 和美国科学家斯梅尔 (Smale) 等数学家和力学家相继对非线性系统的分岔理论和混沌动力学进行了基奠性和深入的研究，洛伦兹、上田 (Ueda) 和费根鲍姆等科学家则在数值模拟中获得了重要发现。他们的杰出贡献使非线性动力学从 20 世纪 70 年代起成为一门重要的前沿科学。

近 40 年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大发展。随着非线性动力学理论和相关科学的发展，人们基于非线性动力学的观点以及现代数学和计算机等工具，对工程科学等领域中的非线性系统建立动力学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略。一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌和分形等复杂非线性现象具有正确的认识和理解。

随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学理论正从低维向高维发展，非线性动力学理论和方法所能处理的问题规模和难度不断提高，已逐步接近实际系统。在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题采取绕道而行的现象已经发生了变化。人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学特性的影响，使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求，而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类。

非线性动力学理论在高科技领域和工程实际问题中的应用，已经引起了各领域科学家们的广泛关注，并使这门学科有了强大的生命力。在工程系统中，有许多动力学问题都是非线性的，它们的数学模型和运动方程可以用非线性动力系统来描述，在工程问题中的应用实例有：(1) 柔性机器人和弹性机构中的非线性振动问题；(2) 机械柔性结构的非线性振动问题；(3) 航天飞机和空间站中柔性机械臂、卫星天线和太阳能列阵的非线性振动问题；(4) 航天器的混沌姿态运动；(5) 系绳卫星的非线性振动与控制问题；(6) 内燃机中曲轴系统的非线性扭转振动、气门机构的非线性振动和离心摆式减振器的非线性振动问题；(7) 带有裂纹的大型转子和大型发电机组的非线性振动问题和网络智能监测诊断问题；(8) 金属切削机床的非线性颤振和控制问题；(9) 振动机械中的非线性动力学问题；(10) 滑动轴承中的油膜涡动问题；(11) 齿轮传动和黏弹性带传动中的非线性振动问题；(12) 高速机车行驶稳定性和蛇行问题；(13) 流固耦合机械系统和流体诱发的机械结构的非线性振动问题；(14) 大型船舶在横浪或纵向波作用下的横摇运动、操纵稳定性和倾覆机理问题；(15) 车辆半主动悬架系统的时滞非线性动力学问题；(16) 悬索结构以及悬索和梁结构之间相互耦合的非线性动力学问题；(17) 天空安全工程问题等。由此可见，研究非线性动力学理论和方法对于解决工程系统中的实际动力学问题具有重要的意义。非线性动力学的研究进展将会对工程系统的研究、设计和使用产生深远的影响。

2. 线性系统和非线性系统

自然科学和技术的发展，正在使传统学科的划分和研究方法发生深刻的变化。学科之间的互相渗透以及传统学科与日新月异的新技术的结合，促进了大批综合性边缘学科的孕育和发展。这种发展的一个重要特征是“非线性”，以研究各门学

科中非线性问题的共性特征和运动规律以及解决方法为目的的非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。非线性科学的发展从根本上影响和改变着整个科学体系。目前，人们已经认识到，正是非线性创造了我们五彩缤纷的世界。

当代科学技术发展的重要特征之一，是在几乎所有的领域中都发现了非线性现象。非线性科学主要研究各门学科中有关非线性的共性问题，特别是那些无法通过线性模型稍加修正就可以解决的问题，以及它自身理论发展所需要的概念和方法。换言之，非线性科学揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法。非线性动力系统按其特性可分为两大类。其一是耗散系统，其解在相空间内的相体积在时间演化过程中收缩到 0，收缩到低维空间，这种系统存在吸引子，相空间中所有运动轨道最终都要被吸引到这种吸引子上；相反，另一类是保守系统，其解在相空间中始终保持体积不变，这种系统不存在吸引子。

我们在前面多次提到“非线性”。这是混沌理论中一个非常重要的概念。郝柏林说，“现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。‘数、理、化、天、地、生’这些纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为‘非’字当头，即出现了以‘非’字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中非线性科学占有极其重要的位置。”非线性科学如此重要，那么什么是非线性呢？这正是我们首先要弄清的问题。

从数学上说，动力学系统按变量之间的关系划分为线性和非线性两类。线性和非线性用于区分函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 的依赖关系。函数

$$y=ax+b \tag{1.1}$$

对自变量 x 的依赖关系是一次多项式，在 x-y 平面中的图像是一条直线，就说 y 对 x 是线性关系。其他高于一次的多项式函数关系都是非线性的。最简单的非线性函数是抛物线：

$$y=ax^2+bx+c \tag{1.2}$$

在上述两式中，a,b,c 是参数。

线性与非线性的区别。

首先，线性是简单的比例问题，而非线性是对这种简单关系的偏离。当 $b=0$ 时式 (1.1) 表示的是“水涨船高”的正比例关系。对线性关系的小小局部偏离并不导致抛物线，而是更接近一条三次曲线。在传统的数理科学中，早已发展出许多计入小小修正的微扰方法，其并不属于非线性科学的范畴。非线性科学是处理对线性实质有较大影响的偏离问题。人们发现，在非线性方程中，一个变量的微小变化对其他变量有成比例的，甚至灾难性的影响。一个动力学系统各要素之间的相关性可

以在很大数值范围内保持相对不变，但在某些临界点处会出现突变，刻画系统的方程会出现一种新的性态。

其次，线性关系是组成部分互不相干、各自独立地起作用，而非线性是它们之间的相互作用。因此，线性系统满足叠加原理，整体等于部分之和；而非线性的相互作用使得整体不再简单地等于局部之和，可能出现不同于线性叠加的增益或亏损。

最后，线性关系保持信号的频率成分不变，而非线性使频率结构发生变化。这一点对理解混沌动力学有极重要的意义。

在线性系统中，输出信号的频率与输入信号的成分相同。如果输出信号中有和频、差频或倍频，就表明是非线性系统。但这不一定是非线性科学的研究对象。如果当非线性越过一定阈值，输出信号冒出某种分频成分，这就不再是一个平常的非线性系统了。

近代科学是从研究线性系统开始的。数学家总是先研究线性代数、线性微分方程、线性算子理论，线性规划等；物理学家也首先考虑无摩擦的理想摆，无粘滞性的理想流体，无摩擦又不散热的卡诺循环，无其他天体的二体问题等等。经典科学实质上是线性科学。线性科学在理论和实践上都已取得十分辉煌的成就，许多令人注目的重大理论和技术创造都是线性科学对人类的贡献。

然而，今天的科学家认识到，现实世界实际上是非线性的。在天体动力学中，三体运动方程是非线性的，庞加莱正是在这里与混沌不期而遇。在一般力学中，考虑流体粘滞作用时，由牛顿第二定律得到的流体运动方程，叫纳维–斯托克斯方程，方程中的平流项都是非线性的，它们反映通过风的输运造成的物理量的不均匀性。在简单的单摆运动中，线性理论也不一定管用。单摆的等时性并非严格的定律，而是小摆幅下的近似。如果对摆幅不加限制，它的运动就是非线性的，有着意想不到的复杂性。

在电磁学中，欧姆定律说的是，流经电路的电流等于外加电压除以电路的电阻。这是线性关系：根据欧姆定律，如果加上两个电压，从而把两条电路叠加，则对应的电流也加在一起，给出组合电路中的电流。但在晶体管中，线性叠加原理不再成立，即它们不遵从欧姆定律。

在化学反应中

$$\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}t}=-kC_AC_B$$

式中，C_A, C_B 分别是两种参加反应的反应物的浓度。化学反应的速率与两种反应物的浓度乘积有关，因而方程右端 $-kC_AC_B$ 为非线性项。反映种群演化的逻辑斯谛 (Logistic) 方程也是一个非线性方程。

德国物理学家海森堡 (W. K. Heisenberg) 在 1966 年的一次演讲中说，“实际上

理论物理学中的每个问题都是非线性数学方程刻画的，量子理论也许除外，但量子理论最终是线性的还是非线性的理论，还是一个颇有争议的问题。因此，理论物理学的绝大部分要归为非线性问题。"

线性关系简单，线性方程可以解析求解。而非线性方程一般地无解析解。例如，纳维–斯托克斯方程是流体力学的典型方程，是一个非线性方程。要求解这样的方程是很困难的。美国数学家冯 · 诺伊曼 (J. von Neumann) 在讲到求解纳维–斯托克斯方程时说，"在一切方面方程的性质都同时变化着，方程的阶和次都在变化着。因此，出现令人头痛的数字困难就在意料之中。"

过去，科学家常常在忽略非线性因素的前提下建立系统模型，能够建立线性模型被看作科学研究获得成功的标志。如果在建模过程中，非线性因素排除不掉，也要对非线性模型作线性化处理。这种方法用得很广，对于讨论非线性问题也很重要。这可能是摄动理论的主要任务。摄动理论的目的就在于，使运动方程变得简单、可解。这种科学思想和方法论就是科学研究的线性观。

当科学以简单的动力学系统为研究对象时，线性观是十分有效的。然而，当科学以复杂系统为对象时，线性观的缺陷日益暴露出来。在讨论天体力学的三体问题和行星系统更复杂的问题时，人们总是用摄动理论。采用摄动理论在有限的时间 (如几千年) 内可以相当容易地导出行星的运动轨道。但是，当时间继续流逝，摄动不再是很小的，就可能存在一个很大的效应，以致不可能说清楚行星的轨道是不是同周期的。更为严重的是，线性观掩盖了世界的非线性本质，扭曲了科学研究的目标、重点和方法，成为科学进一步发展的障碍。梅说，"这样发展出来的数学直觉，不能正确地把学生武装起来，使之能面对最简单的离散非线性系统所表现出来的稀奇古怪的行为。"

为了解决非线性问题，数学家首先研究出一些数学理论和方法。这是从卡瓦列夫斯卡娅开始的，庞加莱、伯克霍夫、李雅普诺夫、斯梅尔也都做出了贡献，创立了非线性数学。它提供了洞悉现实世界本质的手段。

20 世纪 70 年代，科学家用计算机和非线性数学，发现了确定性系统中的混沌行为，这极大地激发了人们探索自然界和人类社会中存在的各种复杂性问题的热情，同时深深地改变了人们观察周围世界的观点和方法。现在人们终于明白了，非线性不是罕见的例外，而是普遍存在的现象，线性问题才是稀少的；非线性特征不是可有可无的支流或细枝末节，而是世界的基本特征和本质，线性系统只不过是一部分非线性系统的理想化；非线性是现实世界无限多样的复杂性的根源，而线性世界是抽象的、简单的、单调的。近三四十年，在各种不同领域中展开的非线性问题研究所取得的成果，显示了非线性理论的必要性和深刻性，并且一定会导致哲学的深刻变革。

混沌研究更否定了非线性问题没有普遍原理的说法。过去，人们曾以为非线性问题个性极强，每一具体问题要求发明特殊的算法和运用新颖的技巧。事实上，数

学和力学都有一些可精确求解的非线性方程，物理学中也解出少数并非平常的模型。这时，人们还不可能看见它们之间内在的联系，不可能认识到它们的共性。近四五十年，由于近似计算方法的进展，更由于计算机的发展，使得求解非线性方程的数值变得容易、快捷。于是，人们能发现不同领域非线性问题的共性。

混沌的研究表明，分岔、突变、对初始条件的敏感依赖性、长期行为的不可预见性、奇怪吸引子等都是非线性系统的共同性质，分数维数、李雅普诺夫指数、费根鲍姆常数等是定量地刻画非线性系统的普适概念。非线性系统既有普遍成立的规律，又有普遍适用的方法，于是可建立系统的理论体系，这就是非线性科学。

线性系统满足叠加原理，整体等于部分之和。数学的发展早已为线性系统的研究提供了包括线性代数、线性微分方程、傅里叶分析、线性算子理论和随机过程的线性理论在内的强有力的解析方法，因此没有必要形成“线性科学”这样一门独立的学科。

正如非线性科学不满足叠加原理一样，非线性科学并不是非线性数学、非线性物理、非线性力学等分支学科的总和。人们已经发现，自然科学的各个不同领域的非线性系统有着共同的概念，即非线性系统具有超越不同学科领域的共同性质。非线性科学只考虑不同学科中非线性的共性问题，特别是那些无法通过线性化解决的问题，再加上它自身理论发展所需要的概念和方法。

非线性科学已经大大改变了人们观察世界的方法和思维方式。这几十年来的研究已经使人们认识到，人类正处在变革的、演化的、复杂化的时代，探索复杂性已成为许多科学家的共同愿望。

世界是非线性的，线性只能近似地描述世界，非线性才能刻画世界的本来面目。普利高津 (I. Prigogine) 指出：“线性律与非线性律的一个明显区别就是叠加性质有效还是无效：在一个线性系统里两个不同因素的组合作用只是每个因素单独作用的简单叠加。但在非线性系统中，一个微小的因素能导致用它的幅值无法衡量的戏剧效果。”

线性微分方程有一套普适理论 (常微分方程等课程)，而对非线性微分方程没有普适理论可以运用，但人们构建了研究非线性微分方程的一些普适方法，探讨非线性系统的共性。由于线性系统与非线性系统有着本质的区别，线性系统满足叠加原理，而非线性系统不满足叠加原理，所以无法化“整”为“零”，而且非线性系统对初值极为敏感，因此，非线性问题的研究是极其困难的。过去通常采用的奇点附近线性化的方法，或者针对具体的非线性方程来寻求个别的解析处理方法。直到目前，对于非线性问题仍然没有系统的处理方法，更多的是集中于典型范例的研究和作某些定量分析。

非线性科学研究的内容有主要以下几个方面：非线性映射的宏观特性、混沌与分形、动力学系统的时间反演问题、自组织与耗散结构、随机非线性微分方程、湍

流、神经网络系统、孤立子与拟序结构、复杂性探索等。一般认为，混沌、分形和孤立子是非线性科学的主题，而且它们三者是彼此联系的。当一个系统或事物里有可调的恒定参量时，参量的不同会引起系统长期动态发生根本性的变化，这是分岔理论所关心的问题；当参量的变化跨越某些临界点时，系统将发生根本性的转变。例如，孤立波失稳、分形结构的改变、混沌过程变成周期振荡等等。如果在一个系统或事物的演化中，从时间过程看有混沌，而在空间分布上又有变化的分形图形，就应把时空联系起来研究其动力学行为。

由于非线性系统对初值的极度敏感性，使得在处理非线性问题时不能得心应手地使用一些已经非常成熟的数学方法，如线性叠加、微扰、摄动、无穷小分析等。非线性系统往往错综复杂，对其进一步研究呼唤着新的方法和思维方式。应运而生的系统论、信息论、耗散结构、协同学、混沌理论、分形几何学、孤立子理论等已成为研究非线性科学的有力武器。混沌理论作为其中的一种，可谓一枝独秀，已渐渐成为非线性科学的主要研究手段。混沌科学使人们原来限于简单系统的观念发生了革命性转变，使人们更清楚地认识了简单与复杂、确定与随机的内在联系。因此，科学家将以混沌理论为核心的非线性科学誉为 20 世纪继相对论与量子力学之后的第三次科学革命。

3. 保守系统和耗散系统

从数学角度，可以把动力学系统分为线性和非线性的；而从物理学角度，则可以把它分为保守的和耗散的。如果系统不存在摩擦、黏滞等因素，运动过程中能量守恒，这类系统称为保守系统；如果系统有着摩擦、黏滞性的扩散或热传导性质或过程，在运动过程中消耗能量，系统的能量不能保持恒定不变，这样的系统称为耗散系统。

任何一个实际系统，当运动时间足够长时，耗散效应是不可忽略的。任何一个宏观系统实际上都是耗散系统。因此，对耗散系统的混沌的研究有重要的实际意义。由于耗散系统的相体积在运动过程中不断收缩，不同初始条件会趋于同一结果或少数几个结果，且耗散系统的混沌与保守系统的混沌的根本区别在于有无吸引子。因此，对耗散系统混沌的研究可归结为对吸引子的研究，对奇怪吸引子的研究。

哈密顿 (Hamilton) 系统是一类保守系统。保守系统又可分为可积系统和不可积系统。不可积系统意味着存在混沌运动。不可积系统比可积系统多得多，而可积系统是非常稀少的。这就又从物理学角度说明了混沌的普遍性。

对不可积系统的研究，导致了 KAM 定理。这是 19 世纪以来，对不可积系统的研究所获得最重大理论成果，解决了牛顿力学中长期悬而未决的一些问题，并且直接促进了 20 世纪 80 年代关于保守系统混沌的研究，具有重要的理论意义。如

果说耗散系统的混沌研究有重要的实际意义的话，那么保守系统的混沌研究就有着基本的理论意义。

4. 高维 (无穷维) 非线性系统

在实际工程系统中，有许多问题的数学模型和动力学方程都可用高维非线性系统来描述，例如黏弹性传动带由于在运动过程中可以忽略弯曲刚度，因此其动力学模型可以简化成为具有黏弹性特性的轴向运动弦线，内燃机曲轴、机器人柔性机械臂等可以简化成悬臂梁，还有广泛应用在航空航天工程领域的薄板和薄壳结构，由流体诱发的输流管的非线性振动问题，在机械、航空等领域广泛应用的主动电磁轴承等。如何研究由这些工程实际问题所建立的无限维或高维非线性动力学方程是工程科学领域中非常重要的研究课题。对于高维非线性动力系统来说，其研究难度比低维非线性动力系统要大得多，不仅有理论方法上的困难，而且还有空间几何描述和数值计算方面的困难。对于高维非线性系统和无限维非线性系统来说，从理论上讲，都可用中心流形理论和惯性流形理论对高维非线性系统和无限维非线性系统进行降维处理，使系统的维数有所降低，但是降维后系统的维数仍然很高，并且高维非线性系统中的稳定流形和不稳定流形的空间几何结构难于直观的构造和描述，其后续研究仍然非常困难。因此发展能够处理高维非线性动力学系统的理论研究方法是非常重要和迫切的。高维非线性系统的复杂动力学、全局分岔和混沌动力学，是目前国际上非线性动力学领域的前沿课题，受到科学家们的广泛关注。大部分工程实际问题都可用高维非线性系统来描述，并且大多数都是高维扰动哈密顿系统。然而目前研究高维非线性系统的复杂动力学、全局分岔和混沌动力学的方法还不是很多，国内外均处于发展阶段。尽管对于高维非线性系统已有一些理论研究方法和结果，但由于高维非线性系统的复杂性和多样性，现有的数学成果还远不能满足工程实际问题的需要，而且研究高维非线性系统动力学的很多数学理论和方法高度抽象，目前阶段尚难于在工程实际问题中进行大规模应用。因此，结合工程实际中有典型意义的高维非线性动力学模型，在理论方面发展相应的适用研究方法，对于解决工程实际问题来说是至关重要的。目前对于高维非线性系统复杂动力学、全局分岔和多脉冲混沌动力学的研究主要是以理论分析和数值模拟为主，尽管在数值模拟中发现了大量的各种分岔与混沌现象，但对于产生这些复杂现象的非线性本质及其物理意义还缺乏实验方面和工程上的合理解释。尽管研究高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学具有很大的挑战性和困难，但是近几十年来，国内外的学者还是取得了一些研究成果。

斑图和湍流等问题的研究涉及动力系统随时间的演化和空间结构的性质，无疑反映了非线性科学当前研究的主流方向。从理论本质来看，与无穷维动力系统问题有关。在近年来建立无穷维动力系统框架之前，人们在解决实践问题时已经用到