高等学校教材 30

微分方程

DIFFERENTIAL EQUATIONS

主编 王晶囡

副主编 牛犇 杨占文 郭宇潇

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

微分方程

DIFFERENTIAL EQUATIONS

主编 王晶囡
副主编 牛犇 杨占文 郭宇潇

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书结合理工科专业的特点，介绍了微分方程与非线性动力系统分支理论的基本知识、基础理论、主要方法及相关应用，有利于学习者较快进入微分方程动力学方向课题的研究. 本书的内容包括微分方程简介、一阶微分方程的基本解法、一阶微分方程解的存在唯一性定理、高阶微分方程、微分方程组、稳定性与极限环、偏微分方程、非线性动力系统、时滞微分方程、Matlab 求解微分方程与绘图、重要术语的汉英对照及习题答案与提示等方面的内容.

本书前七章可作为高等院校理工科专业本科教材，后两章内容可作为微分方程与动力系统方向理工科的研究生教材. 另外，本书还可作为一般自然科学和工程技术领域中的研究者与技术人员的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

微分方程/王晶囡等主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 5

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7331 - 7

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①微分方程　Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 073835 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm × 1092mm　1/16　印张 30　字数 539 千字
版　　次　2018 年 5 月第 1 版　2018 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 7331 - 7
定　　价　88.00 元

前　言

微分方程是数学专业、信息与计算科学专业、统计专业以及工程力学等一些理工科相关专业的本科必修(或通识)的基础课程. 通过微分方程的学习,学生可以从实际数据与信息中归纳问题,寻找途径,建立数学模型,培养学生数学语言表述及应用数学思维的能力,也为他们以后继续学习数学建模、数值分析、偏微分方程数值解、理论力学、电路分析以及计算机编程等课程打下基础.

本书根据作者多年教学实践经验,参考了大量的优秀教材及少量的著作与科研论文,按照高等理工科院校《微分方程》及《非线性动力系统分支理论》教学大纲编写而成. 考虑到微分方程的课程特点,编写本书时,注重以下几点:

1. 应用一些简例引出概念、公式和解题方法,告诉初学者学习每类方程的目的与意义,并以微分方程类型(或方程的特点)所对应解法作为每一小节的标题,意在强调读者在求解微分方程时要注意根据方程的类型与特点去寻找适当的解法. 有的章节中选择了典型例子进行综合练习,有的章节给出一题多解,借以提高学生解题的技能.

2. 每类方程都给出了理论的实例化,即在生活中都可以找到实际的数学模型. 意在培养学生在应用中理解案例所涉及的微分方程解法与相应的动力学知识.

3. 对于一阶微分方程解的存在唯一性定理中的条件、结论与证明方法进行了细致的讨论与分析,强调了其中所包含的数学思想和方法. 因篇幅有限,对不能给出定理证明的内容,本书指出了参考文献. 本书配有经典的习题与应用.

4. 在附录中,以例题的形式介绍了利用 Matlab 求解方程的方法,将一些抽象的解函数利用数值仿真展示了解曲线的相图,还介绍了微分方程中一些重要术语的汉英对照,为读者进一步学习与研究微分方程奠定了基础.

全书以微分方程简介、一阶微分方程的基本解法、一阶微分方程解的存在唯一性定理、高阶微分方程、微分方程组、稳定性与极限环、偏微分方程、非线性动力系统、时滞微分方程这九章内容为主体,附录介绍了 Matlab 求解微分方程与绘图,重要术语的汉英对照,最后还有习题答案与提示等方面的内容 . 前五章适合作为

40～48 学时常微分方程的教学内容，前七章适合作为 54～72 学时微分方程的教学内容，第八章和第九章适合作为 54 学时非线性动力系统分支理论研究生的教学内容. 另外，本书后附有参考文献，希望能为读者找寻感兴趣的内容进入更深层次学习而提供一定的方向性的指引与帮助.

在本书的 5.6 节生物模型应用中，介绍到了非线性的一些理论知识，之所以将其安排在第五章中，一方面是让读者看到非线性问题的研究初步是先化成线性问题去寻找思路和理论方法，再进行拓展；另一方面是想让读者认识到在分析与解决实际问题中，仅仅学习线性理论是不够的，不能全面彻底地解决问题，所以还需要进一步学习非线性微分系统与时滞微分系统等理论知识. 从本书的功能来看，不但给研究生学生提供了教学参考以及承上启下的知识体系，而且可以为本科学生的进一步学习指出了研究方向.

全书由王晶囡组织编写，负责通稿，并由哈尔滨工业大学（威海）数学系副教授牛犇、哈尔滨工业大学数学系杨占文讲师与哈尔滨工业大学（威海）数学系郭宇潇讲师共同完成了编写工作，其中王晶囡主要负责编写第二章、第四章及第八章（不包含 8.3 与 8.4 节），牛犇负责编写第八章中的 8.3 与 8.4 节、第九章及附录 I，杨占文负责编写第五章和第六章，郭宇潇负责编写第一章、第三章、第七章、附录 II 及习题答案与提示.

在本书的编写过程中得到了哈尔滨理工大学高教所、教务处与理学院，哈尔滨工业大学（威海）理学院和教务处以及哈尔滨工业大学理学院和教务处的大力支持，感谢哈尔滨理工大学数学系在读研究生逯兰芬与杨德中等学生为本书的校对工作提供的帮助. 本书得到黑龙江省高等教学改革项目（SJGY20170563）、哈尔滨理工大学教育教学改革项目（120160004，320150023，220160017，320160036）部分资助. 作者在此一并表示感谢！

但限于作者水平，书中谬误之处仍然难免，敬请读者提出来批评指正.

编　者
2018 年 2 月
于哈尔滨理工大学理学院应用数学系

目　录

第一章　微分方程简介

微分方程已有悠久的历史，而且继续保持着进一步发展的活力，其主要原因是它的根源深扎在各种实际问题之中. 例如，太阳系的八大行星之一，海王星的发现是利用微分方程等数学工具先预测出方向与位置，再根据其位置发现的，曾誉为"笔尖上的行星"或"笔尖上的发现".

许多著名数学家，如伯努利(家族)、欧拉、高斯、拉格朗日和拉普拉斯等，都遵循历史传统，将数学研究与当时许多重大的实际力学问题相结合，在这些问题中通常离不开常微分方程的求解法. 19 世纪在天体力学上的主要成就应归功于拉格朗日对线性常微分方程的工作.

在 19 世纪早期，柯西给微积分学注入了严格性的要素，同时他也为微分方程的理论奠定了一个基石——解的存在唯一性定理. 到 19 世纪末期，庞加莱和李雅普诺夫分别建立了常微分方程的定性理论和稳定性理论，这些工作代表了当时非线性力学的最新方法. 20 世纪初，伯克霍夫继承并发展了庞加莱在天体力学中的分析方法，创立了拓扑动力系统和各态历经的理论，把常微分方程的研究提高到新的水平.

现如今许多物理问题与技术问题的研究，都可以划归为微分方程的求解问题. 诸如电子计算机及无线电装置的计算，弹道的计算，飞机在飞行中的稳定性研究以及化学反应过程中的稳定性研究等，都可以化为微分方程的求解问题.

§1.1　微分方程的起源与简例

1.1.1　微分方程的起源和发展

微分方程是反应客观现实世界运动过程中的量与量之间关系的有力的重要工具之一，差不多是和微积分同时先后产生的. 实际上，求一个函数的原函数($y'=f(x)$)就是一个常微分方程. 微分方程可以表述事物运动变化的规律，它的形成与发展是和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关的.

微分方程的起源可追溯到17世纪末,历史上,它的雏形的出现甚至比微积分的发明还早,伽利略研究自由落体运动、笛卡儿在光学问题中由切线性质定出镜面的形状等,实际上都需要建立和求解微分方程.三百多年前,牛顿与莱布尼兹在奠定微积分基本思想的同时,他们也正式提出了微分方程的概念.

从17世纪末到18世纪,微分方程与当时微积分和代数的发展水平相适应,其研究的中心问题是如何求出通解的表达式.苏格兰数学家纳泊尔创立对数的时候,就讨论过微分方程的近似解.牛顿也曾对一些简单的微分方程利用级数来求解微分方程,并通过求解二体运动的常微分方程证实了地球绕太阳运动轨迹的轨道是椭圆的.后来瑞士数学家雅各布·伯努利一家对分离变量法和换元法,欧拉对积分因子法和求常系数齐次线性方程的通解,达朗贝尔关于非齐次线性方程通解的叠加原理,拉格朗日由齐次线性方程通解经常数变易法得出非齐次线性方程特解,克莱洛研究了全微分方程的充要条件和奇解的概念等都是这方面的重大成就.这个时期,欧拉还第一个考虑了一般常微分方程解的存在问题,提出了现在称为“欧拉折线法”的近似方法,尽管还未到近代分析所要求的严格性,但为以后解的存在性的严格证明和数值计算提供了重要的途径.另外,德国天文台助理伽勒正是利用法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯通过对常微分方程的计算所预见的海王星存在的位置而发现了这颗行星,即海王星是唯一一个利用数学预测而非有计划的观测所发现的第一颗行星,因而被称为“笔尖上的发现”.这一发现使得数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量,现已成为研究自然的强有力的工具.也就是说到了18世纪末,微分方程已发展成为一个重要的数学分支,成为当时工程技术、物理、力学等学科的基本工具之一.

进入19世纪,人们已经越来越感到由初等函数及其积分式来表示通解的路子是很窄的,大量的微分方程无法用初等积分法求解.这时候,整个数学科学正进入一个理论上严格化的发展阶段,数学分析的严密概念建立起来了,其主要奠基人柯西,同时也对常微分方程初值问题解的存在唯一性首次给出了严格的证明,由此开创了常微分方程解析理论这一新的分支.另一方面,刘维尔在19世纪40年代证明了黎卡提方程一般不能用初等积分法解出.而斯图姆的工作提出了对解进行定性研究的最初思想.

19世纪后半叶和20世纪初,S.李运用连续群的思想,对用初等函数积分式能否表示出常微分方程通解的问题做出了总结性的工作,这一工作进一步促使常微分方程的研究重点转向了解析理论和定性理论.庞加莱的著名论文《微分方程所定义的积分曲线》和李雅普诺夫的巨著《运动稳定性的一般问题》共同奠定了定性理论的研究基础.庞加莱的方法侧重于几何、拓扑的观点,而李雅普诺夫则侧重于运用严

格的分析手法研究解的稳定性问题. 自此,20 世纪进入新的阶段,定性上升到理论,进一步发展,分为解析方法、几何方法、数值方法. 解析方法就是把微分方程的解看作依靠这个方程来定义的一种函数;几何方法(或定性方法)就是把微分方程的解看作充满平面或空间或其局部的曲线族,人们由所给方程或设法画出曲线族的大致图像,或借助于某个分析工具(如李雅普诺夫函数),研究其几何;数值方法就是求微分方程满足一定初始条件(或边界条件)的解的近似值的各种方法.

20 世纪 30 年代,定性理论中的重要研究对象——极限环(孤立周期解),在当时蓬勃发展起来的无线电技术理论中找到了它的对应物——孤立稳定的等幅振荡,使常微分方程定性理论得到了实际应用,在完善理论的同时继续深入到其他新兴技术学科的领域. 近几十年,世界科学技术进入了核能、火箭、人造卫星时代,常微分方程定性理论及方法无论在应用上,还是在理论上均不断地扩展着自身的领域,显示出前所未有的强大生命力.

1.1.2　微分方程模型简例

利用数学手段研究自然现象和社会现象,或解决工程技术问题,一般需要先对问题建立数学模型,再对它求解或寻找近似解,然后按实际的要求对所得到的理论结果做出分析和探讨. 数学模型最常见的表达方式,是包含自变量和未知函数的函数方程,在许多情形这类方程也包括未知函数的导数. 如用牛顿第二定律列出的质点运动方程,其中未知函数代表质点的坐标,该函数对自变量(时间)的一阶导数和二阶导数分别表示质点的运动速度和加速度. 而从函数的几何角度讲,将函数看成曲线,函数的导数可以描述曲线的斜率. 微分方程是数学联系实际问题的重要渠道之一,将实际问题建立成微分方程模型最初并不是数学家做的,而是由化学家、生物学家和社会学家完成的. 这需要几个步骤,如图 1.1 所示.

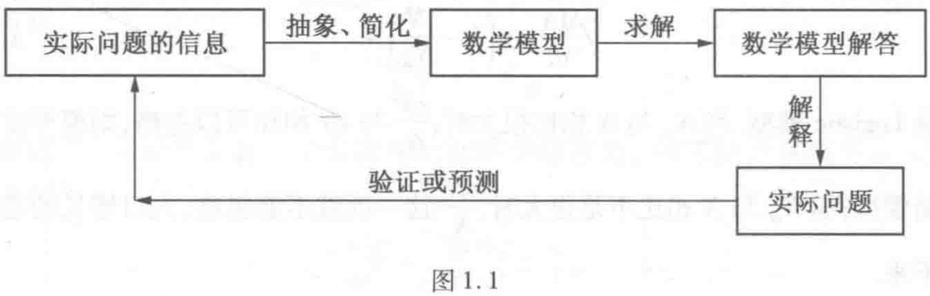

图 1.1

建立微分方程实际模型的最关键是根据实际问题所提供的条件,选择和确定模型的变量,再根据有关学科如物理、生物、化学、经济等,找到这些变量之间遵循

的规律,用微分方程将其表达出来. 其中,学会用导数和微分表示几何量和物理量是至关重要的. 在大量的实际问题中遇到稍微复杂的运动过程时,反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来,却比较容易建立这些变量的导数(或微分)之间的关系式,如在物理中变速直线运动的速度 $v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$,加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}$,电流 $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$以及几何中曲线切线的斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$等. 下面就几个具体实例来说明一下如何建立数学模型.

例 1.1 马尔萨斯(Malthus)人口增长的数学模型.

马尔萨斯是英国人口统计学家,在 1798 年提出了闻名于世的马尔萨斯人口模型,其基本假设是:在人口自然增长的过程中,净相对增长率(单位时间内人口的净增长数与人口总数之比)是常数,记此常数为 r(生命系数).

在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口数量 $N=N(t)$ 的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t \quad \left(\text{当 } \Delta t=1,\text{则 } r=\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)}\right)$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN \tag{1.1}$$

例 1.2 Logistic 人口增长的数学模型.

1838 年荷兰生物学家 Verhulst 引入常数 N_m(环境最大容纳量)表示自然资源和环境条件所容纳的最大人口数,并假设净相对增长率为 $r\left(1-\frac{N(t)}{N_m}\right)$,即净相对增长率随 $N(t)$ 的增加而减少,当 $N(t)\to N_m$ 时,净增长率$\to 0$.

按此假定,人口增长的方程应改为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N \tag{1.2}$$

这就是 Logistic 模型. 当 N_m 与 N 相比很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$与 rN 相比可以忽略,则模型变为马尔萨斯模型;但 N_m 与 N 相比不是很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$这一项就不能忽略,人口增长的速度要缓慢下来.

例 1.3 如图 1.2 所示的 R－L－C 电路包含电感 L,电阻 R,电容 C 及电源 $e(t)$. 设 L,R,C 均为常数,$e(t)$是时间 t 的已知函数. 试求当开关 K 合上后,电路中电流强度 I 与时间 t 之间的关系.

解 电路的 Kirchhoff 第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和为零.

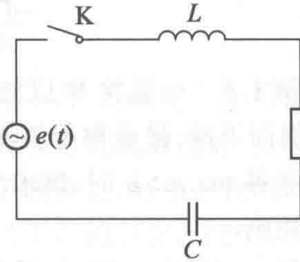

图 1.2

设当开关 K 合上后,电路中在时刻 t 的电流强度为 $I(t)$,则电流经过电感 L, 电阻 R 和电容 C 的电压降分别为 $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, RI, \dfrac{Q}{C}$,其中 Q 为电量,于是由 Kirchhoff 第二定律, 得到

$$e(t)-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-RI-\frac{Q}{C}=0$$

因为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$,于是得到

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

式(1.3)就是电流强度 I 与时间 t 所满足的数学关系式.

例 1.4 数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M. 在重力作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动,如图 1.3 所示. 试确定摆的运动方程.

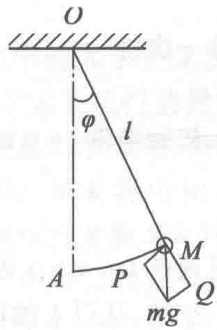

图 1.3

解 由牛顿第二定律 ,取逆时针运动方向为摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向,则由牛顿第二定律, 得到摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.4}$$

附注 1 如果研究摆的微小振动,即当 φ 比较小时,可以取 φ 的值为 $\sin\varphi$ 的近似值,将其代入式(1.4),这样就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\varphi$$

附注 2 假设摆是在一个有黏性的介质中做摆动, 如果阻力系数为 μ,则摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-\frac{g}{l}\varphi$$

附注 3 假设摆还沿着摆的运动方向受到一个外力 $F(t)$ 的作用,则摆的运动方程为