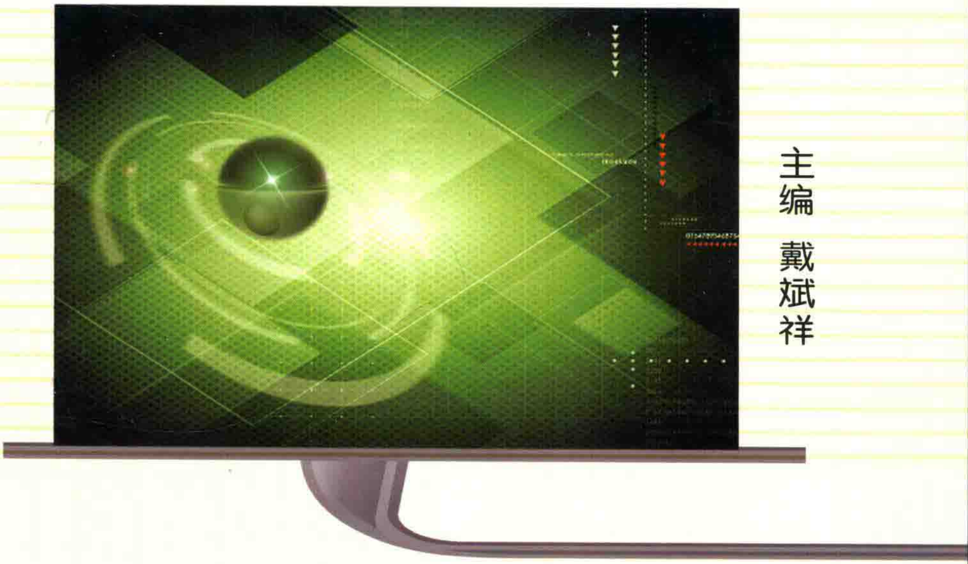
21世纪高等学校规划教材

线性代数（第2版）学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO



主编 戴斌祥

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等学校规划教材

线性代数(第2版)学习指导

主　编　戴斌祥
副主编　郭　佳　肖其珍　孙保炬

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是21世纪高等学校规划教材《线性代数》(第2版)(戴斌祥主编、北京邮电大学出版社出版)配套使用的学习指导书. 全书共分六章，内容包括n阶行列式、矩阵、n维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与二次型、线性空间与线性变换. 在总结每章的基本概念和基本理论的基础上，对一些典型例题进行了详细的解题分析，对教材中的所有习题进行了详细的解答. 同时在每章末配置了自测题，供读者进行自我训练.

全书内容简明扼要，重点突出，解题详尽，方法多样，注意解题思路的分析与知识的融会贯通. 本书可作为高等院校非数学专业学生学习《线性代数》的辅导用书或复习考研的参考用书，也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第2版)学习指导/戴斌祥主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2016.3(2016.12重印)

ISBN 978-7-5635-4352-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戴… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第097844号

书　　名	线性代数(第2版)学习指导
主　　编	戴斌祥
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	15
字　　数	326千字
版　　次	2016年3月第1版　2016年12月第2次印刷

ISBN 978-7-5635-4352-6　　定　价：29.00元

前　言

由北京邮电大学出版社出版的21世纪高等学校规划教材《线性代数》(第2版)(戴斌祥主编)目前已被全国许多高等院校作为教材使用.本书是该教材的学习和教学参考指导书,也可独立作为“线性代数”课程学习的辅导用书或复习考研的参考用书.

本书是作者在多年教学实践的基础上编著而成的,旨在帮助读者全面地、系统地掌握线性代数的基本理论、方法和技巧,同时通过对大量的典型例题的分析和习题的解答,帮助读者学习和掌握解题方法和解题技巧,以达到举一反三、触类旁通的学习效果.书中的每章末尾(除第六章外)都配备了一定量的自测题(书后附有参考答案),可供有兴趣的读者进行自我练习.事实上,我们编写这本书的目的不仅是想为在学读者提供一本学习指导书,也希望能对准备考研或参加竞赛的同学提供帮助,同时也给正在开设“线性代数”课程的老师们提供参考资料.

尽管想法很多,编者们也竭力而为之,但限于学识与经验,仍难免挂一漏万.书中的错误与失当之处也自然难免,敬请使用的读者们不吝指正,以使修改臻于完善.

本书由戴斌祥主编,郭佳、肖其珍、孙保炬作为副主编.在编写过程中得到了北京邮电大学出版社的大力支持与帮助,在此表示真诚的谢意.

编　者

目　　录

第一章　n 阶行列式

一、基本内容

§1　基本概念

定义 1　(二阶行列式) 称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式.

其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素，行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线.

定义 2　(三阶行列式)

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ 为三阶行列式.

定义 3　(排列) 由 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列). 在 n 级排列中，排列 $1\ 2\ 3\ 4\cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列起来的，我们称之为自然排列.

定义 4　(逆序) 在一个排列中，如果某个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数(或叫作数对)构成一个逆序. 一个排列中，逆序的总数称为这个排列的逆序数. 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

定义 5　(偶排列和奇排列)

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 6　(对换) 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，将某两个数 i_s 与 i_t 对调，其余的数不动，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这种对排列的变换称为对换，记为 (i_s,i_t)；将相邻两数对换，称为相邻对换(或称为邻换).

定义 7　(n 阶行列式) 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

定义 8 **(上三角行列式)**在一个行列式中,如果主对角线以下的元素全为 0,即当 $i>j$ 时,元素 $a_{ij}=0$,则称该行列式为上三角行列式.

我们有 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$

定义 9 **(下三角行列式)**在一个行列式中,如果主对角线以上的元素全为 0,即当 $i<j$ 时,元素 $a_{ij}=0$,则称该行列式为下三角行列式.

我们有 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$

定义 10 **(对角行列式)**在一个行列式中,如果主对角线以外的元素全为 0,即当 $i \neq j$ 时,元素 $a_{ij}=0$,则称该行列式为对角行列式.

我们有 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$

定义 11 **(转置行列式)**设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 n 阶行列式 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 D 的转置行列式.

定义 12　**(余子式)** 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

§2　相关理论

定理 1　任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

定理 2　由 n 个自然数 $(n>1)$ 组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个，其中奇偶排列各占一半.

定理 3　n 阶行列式的一般项可以写成 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均为 n 级排列.

行列式具有如下的性质：

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式反号.

推论 1　若行列式有两行(列)元素对应相等，则行列式为零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

推论 2　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子，可以提到行列式符号的外面.

推论 3　行列式中若有一行(列)的元素全为零，则此行列式为零.

性质 4　行列式中若有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和，则行列式等于相应的两个行列式之和.

性质 6　把行列式的某一行(列)的元素乘以数 k，加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

定理 4　在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零，那么行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}\cdot A_{ij}$.

定理5 行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

称定理5为行列式的按行(列)展开定理,也称之为拉普拉斯(Laplace)展开定理.

推论4 行列式 D 中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0.\ (i\neq j)$$

注 行列式计算的几个主要方法:

(1)对角线法,只适用于二、三阶行列式;(2) 化三角形法;(3) 按行(列)展开法;(4) 拆为行列式之和;(5) 升阶、降阶法;(6) 递推法;(7) 数学归纳法;(8) 代数余子式法.

定理6 (克拉默(Cramer)法则) 如果 $n\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么,方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

定理7 如果 $n\times n$ 线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则方程组一定有解,且解是唯一的.

定理8 如果 $n\times n$ 线性方程组无解,或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零($D=0$).

定理9 当 $n\times n$ 线性方程组右端的常数项全为0,则方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

称为齐次线性方程组;如果 $n\times n$ 齐次线性方程组的系数行列式不等于0,则齐次线性方程组只有零解.

定理10 $n\times n$ 齐次线性方程组存在非零解的充要条件是齐次线性方程组的系数行列式必为零.

注　以数 k 乘以第 i 行(列)上的元素加到第 j 行(列)对应元素上,记作 $r[j+i(k)]$($c[j+i(k)]$).

二、典型例题分析

例 1　在 5 阶行列式中,下列各项应带什么符号?

(1) $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$;　　(2) $a_{31}a_{15}a_{44}a_{22}a_{53}$.

解　(1) 对于排列 35124,3 排在首位,逆序数为 0;5 的前面没有比它大的数,逆序数为 0;1 前面有两个比它大的数,逆序数为 2;2 的前面有两个比它大的数,逆序数为 2;4 前面有一个比它大的数,逆序数为 1.因此该排列的逆序数为

$$\tau(35124)=0+0+2+2+1=5.$$

故 $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$ 前带负号.

(2) 因 $\tau(31425)=3,\tau(15423)=5$,则

$$\tau(31425)+\tau(15423)=8$$

是偶数,故 $a_{31}a_{15}a_{44}a_{22}a_{53}$ 前带正号.

例 2　已知函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

求 x^3 的系数.

解　由行列式的定义可知,$f(x)=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. 其中只有 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 一项含有 x^3 项. 而 $\tau(1234)+\tau(2134)=1$. 则$(-1)^{\tau}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$. 故 x^3 的系数为-1.

例 3　设 α,β,γ 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根,计算

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

分析　因为 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根,由根与系数的关系,有 $\alpha+\beta+\gamma=0$,而行列式中,各行(列)元素之和都等于 $\alpha+\beta+\gamma$. 因此,可将各行元素都加到第一行.

解
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3]{r[1+i(1)]} \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0.$$

例 4 计算下列行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解 直接利用化三角形行列式的方法.

$$D_4 \xlongequal{r[4+3(-1)]} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[3+2(-1)]} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[2+1(-1)]} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r[3+2(-1)]]{r[4+3(-1)]} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[4+3(-1)]} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

分析　由于行列式各行元素之和都是$x+(n-2)a$，可将第2列，…，第n列的元素都加到第1列，然后提取公因式$x+(n-2)a$.

解　
$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c[1+i(1)]} \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$
$$=[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r[i+1(-1)]}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$
$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

例6　用克拉默法则解线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=0, \\ -2x_1+x_2+2x_3+x_4=2, \\ 2x_2+x_3+3x_4=1. \end{cases}$$

解　系数行列式
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 5 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0.$$

由于
$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{r[4+1(-1)]}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\2&0&-1&2\\-2&2&2&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r[1+4(-1)]}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&0&-1&2\\-2&2&2&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&2\\2&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=5,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&1&3\\2&3&0&2\\-2&1&2&1\\0&2&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r[1+4(-1)]}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&2\\-2&1&2&1\\0&2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&2\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=9,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&3&-1&0\\-2&1&2&2\\0&2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r[1+4(-1)]}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&3&-1&0\\-2&1&2&2\\0&2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&0\\1&2&2\\2&1&1\end{vmatrix}=-3.$$

根据克拉默法则知方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=0,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{9}{10},x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{3}{10}.$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\b&a_2&b&\cdots&b\\b&b&a_3&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix},$$

其中,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均不等于 b.

分析 由于主对角线上元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 不一定相同,因此行列式每行(列)的元素之和不一定相等.但除主对角线元素外,其余的元素都是相同的.

解 $$D_n\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r[i+1(-1)]}\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\b-a_1&a_2-b&0&\cdots&0\\b-a_1&0&a_3-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b-a_1&0&0&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$$

$$=(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b)\begin{vmatrix}\frac{a_1}{a_1-b}&\frac{b}{a_2-b}&\frac{b}{a_3-b}&\cdots&\frac{b}{a_n-b}\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c[1+i(1)]}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-b}+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b}{a_i-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \dfrac{b}{a_3-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_1-b}+\sum_{i=2}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b).$$

注　D_n 经过一次行变换后变形为除第一行、第一列和主对角线上有非零元素外，其他元素均为零，这种行列式称之为箭形行列式.

例 8　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解法 1　易知 D_n 中第 n 行的元素所对应的余子式均为上(下)三角行列式，按第 n 行 (r_n) 展开有

$$D_n\xlongequal{\text{按}r_n\text{展开}}a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+a_{n-2}(-1)^{n+3}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+a_2(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}+(x+a_1)(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n+2}x\cdot(-1)^{n-2}+a_{n-2}(-1)^{n+3}x^2(-1)^{n-3}+\cdots+$$
$$a_2(-1)^{2n-1}x^{n-2}(-1)+(x+a_1)(-1)^{2n}x^{n-1}$$
$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n.$$

解法 2 将行列式按第一列展开,建立递推公式.

$$D_n \xlongequal{按c_1展开} x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=a_n+xD_{n-1}.$$

由递推公式,得

$$\begin{aligned} D_n &=a_n+xD_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2}) \\ &=a_n+a_{n-1}x+x^2D_{n-2}=a_n+a_{n-1}x+x^2(a_{n-2}+xD_{n-3}) \\ &=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+x^3D_{n-3}=\cdots \\ &=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-2}D_2. \end{aligned}$$

又
$$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=(x+a_1)x+a_2=a_2+a_1x+x^2,$$

故
$$D_n=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n.$$

解法 3

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c[1+i(x^{i-1})]} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}+x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}+x^n\right)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}+x^n\right)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n.$$

解法 4　利用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x-a_1\end{vmatrix}=x(x+a_1)+a_2=a_2+a_1x+x^2$.

假设 $n=k$ 时，有 $D_k=a_k+a_{k-1}x+\cdots+a_1x^{k-1}+x^k$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}x\begin{vmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+2}a_{k+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{vmatrix}$$

$$=xD_k+(-1)^{k+2}a_{k+1}(-1)^k$$

$$=x(a_k+a_{k-1}x+\cdots+a_1x^{k-1}+x^k)+a_{k+1}$$

$$=a_{k+1}+a_kx+\cdots+a_1x^k+x^{k+1}.$$

结论亦成立. 故 $D_n=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n$.

例 9　设行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 6 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

的第 i 行第 j 列元素的余子式和代数余子式分别为 M_{ij} 和 $A_{ij}(i,j=1,2,3,4)$，计算

(1) $3A_{14}+2A_{24}+A_{34}$；　　(2) $2M_{41}-4M_{42}+5M_{44}$.

解　(1) 由行列式的性质可知，$3A_{14}+2A_{24}+1A_{34}+0A_{44}$ 的值相当于把原行列式中第 4 列的元素分别换成 3，2，1，0 而其余元素不变所得到新的行列式按第 4 列展开的结果.