普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（机械类）

◆ 陈 博 主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

二五”规划教材

高等数学

（机械类）

陈　博　主　编
陈　舒　副主编
王振家　苟书丰　参　编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是根据高等职业教育的教育教学特点，在认真总结多年高职高专数学教改经验的基础上编写而成的。全书共6章，内容包括函数极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、常微分方程、空间解析几何与向量代数。编写中以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点，以传授数学知识并兼顾学生思维培养为原则。

本书可作为高等职技术院校、高等专科学校、成人高等学校中机械类、汽车类各专业的教材，也可作为工程技术人员的数学参考书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：机械类/陈博主编. —北京：电子工业出版社，2013.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-20842-3

I. ①高… II. ①陈… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145178 号

策划编辑：王羽佳
责任编辑：郝黎明　　　　文字编辑：裴　杰
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：12　字数：299.5 千字
印　　次：2013 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

随着社会和经济发展对技术应用型人才的迫切需求,高职高专院校教育教学改革正在蓬勃开展，对课程内容体系和教学模式的改革与探索也在不断深入。本书是根据高等职业教育的教育教学特点，在认真总结多年高职高专数学教改经验的基础上编写而成。编写中以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点，以传授数学知识并兼顾学生数学思维培养为原则。本书适合机械类、汽车类各专业学习使用。

本书主要内容包括：函数极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，常微分方程，空间解析几何与向量代数。

本书主要特点是：

1. 在保持数学学科知识体系完整性的基础上，尽量降低难度。

2. 教材编写本着突出重点，分散难点，注重几何直观的解释，重点培养学生的应用能力。

3. 在每章后面归纳出“本章小结”，目的是使学生对知识的掌握系统化。每章后还有“拓展空间”，目的是使学生了解数学知识的背景及应用，激发学生学习数学的积极性。

4. 习题配置上体现由浅入深，章末配有本章复习题，同时还编写了全部习题的习题答案，供教师及学生参考。

本书由辽宁机电职业技术学院陈博担任主编，陈舒担任副主编，王振家、荀书丰参编。其中陈舒编写了第 1～3 章；王振家、荀书丰编写了第 5 章；陈博编写了第 4 章、第 6 章及习题解答。全书由陈博统稿，辽宁机电职业技术学院王德才教授审稿。

在本书编写过程中,得到了电子工业出版社的热情关怀和指导,参阅了有关的文献和教材,在此一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2013 年 6 月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 1 章　函数极限与连续

高等数学与中学所学过的初等数学是有很大区别的，初等数学研究的对象基本上是不变的量（常量），而高等数学研究的对象是变化的量（变量）. 函数是客观世界中变量与变量之间相互联系的一种数学抽象，它是高等数学研究的基本对象，而极限是贯穿高等数学始终的一个最重要的基本概念. 高等数学中其他的一些重要概念，如微分、积分等，都是用极限来定义的. 本章我们将从复习函数的概念及性质入手，补充介绍复合函数、分段函数的概念. 通过讨论数列极限，引出函数极限的概念及求极限的方法，并在此基础上讨论函数的连续性.

1.1　函　　数

某地日平均气温统计如图 1-1 所示. 从图中可以看出随着时间变化，气温也随之变化. 很明显此例中的两个变量存在某种对应关系. 数学是一门研究数量关系的科学，为此我们引入重要概念“函数”.

1.1.1　函数关系

定义 1.1　若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)\,,\quad x\in D$$

其中，x 称为**自变量**，x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**. y 称为**因变量**，当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 所对应的 y 的数值，记作 y_0、$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值. 全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

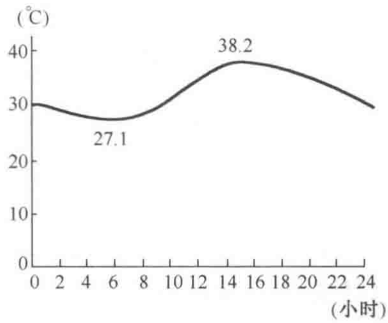

图 1-1

当函数 $y=f(x)$ 的自变量 $x=x_0$ 时，若函数值 $f(x_0)$ 存在，我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的每一点都有定义，那么我们称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 有定义.

由定义 1.1 可知函数的定义域和对应规则是确定函数关系的两个要素. 下面我们就这方面的问题再深入研究几个例子.

【例 1】　$y=\sqrt{-2x^2-1}$ 是否构成函数?

解: 对任何实数 x，都没有按给定规则与之对应的 y 值. 函数定义域不能是空集，因此，此例不是函数.

【例 2】　$x>y$ 是否构成函数?

解：按这个规则，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应．而函数定义中的对应规则要求对每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应．因此不符合函数定义，所以此例也不是函数．

如果两个函数的定义域和对应规则都相同，我们称这两个函数是**相同的函数**．

【例 3】　研究 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数．

解：$y=x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数；$y=\frac{x^2}{x}$，当 $x=0$ 时没有确定的 y 值与之对应，因此它不是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数．但对 $y=\frac{x^2}{x}$ 来说，当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，每一个 x 值都有一个确定的 y 值与之对应，是符合函数定义的，所以 $y=\frac{x^2}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的函数．因此 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是两个不同的函数，如图 1-2 与图 1-3 所示．

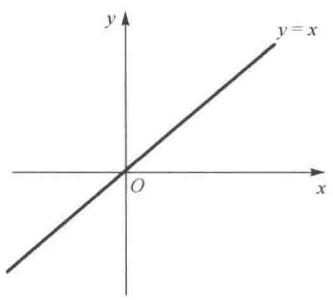

图 1-2

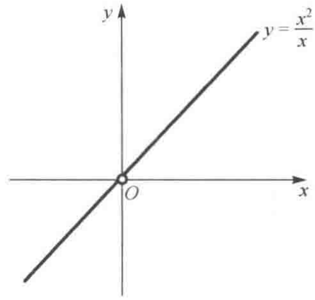

图 1-3

【例 4】　研究 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数．

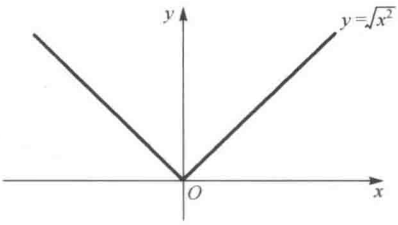

图 1-4

解：$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数，但是其对应规则不同．函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x$；当 $x<0$ 时，$y=-x$．因此二者是定义域相同而对应规则不同的两个不同的函数，如图 1-2 与图 1-4 所示．

由这些例子可以看出，研究一个函数，必须知道自变量与因变量的对应规则以及函数定义域，否则就不能确定一个函数．

函数表示经常用表格法、图形法和解析法，下面各举一个例子．

【例 5】　国内生产总值（单位：亿元）

表 1-1

年份	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
生产总值	34560. 5	4670. 0	57494. 9	66850. 5	73142. 7	76967. 1	80422. 8	89404. 0

表 1-1 以列表法给出了国内生产总值与年份之间的函数关系．

【例 6】　历年出生率统计图

图 1-5 以图形法给出出生率与时间之间的函数关系．

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

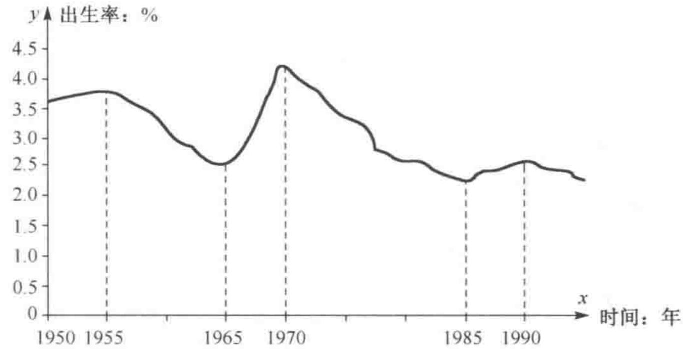

图 1-5

【例 7】　$E = m \cdot c^2$，E 表示能量，m 代表质量，而 c 则表示光速.

这是爱因斯坦著名的质能方程式，这个解析式揭示了质量和能量的函数关系.

1.1.2　函数记号

y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$．f 表示 y 与 x 的对应规则. 如果在同一问题中，出现对应规则不同的函数，则对应规则需用不同的字母表示，如 ϕ，g，F 等，这时函数表示为 $y = \phi(x)$，$y = g(x)$，$y = F(x)$ 等. 有时也用 $y = y(x)$ 表示 y 是 x 的函数. 此时，等号左边的 y 表示因变量，右边的 y 表示对应规则.

给定 $y = f(x)$，$x \in D$，是一个定义在 D 上的函数关系，f 表示 y 与 x 的对应规则，对于任意一个 $x \in D$，可以根据规则 f 求出与它对应的因变量 y 的值.

例如，x 表示正方形的边长，y 表示正方形的面积，那么 $y = f(x) = x^2$ 就是正方形面积与边长的函数关系. 这个函数关系中的对应规则 f 是"因变量 y 对应自变量 x 的平方"，即正方形面积 y 对应边长 x 的平方. 给定一个边长 x 的值，例如 $x = 10$，根据规则 f 可以求出面积的值 $y = 10^2 = 100$.

如果将函数 $f(x)$ 中的 x 改换成一个常数值，例如 x_0，即可以根据规则 f 算出函数值 $f(x_0)$. 假如 x 不是改换成一个常数值，而是换成一个 x 的函数，例如 $\varphi(x)$，将会出现什么情况呢?

如果我们将前面的函数关系 $y = f(x) = x^2$ 中的 x 改为 $2x$，那么就产生了一个新的函数 $y = (2x)^2$，这里 y 是 $2x$ 的函数，其对应规则是 y 对应 $2x$ 的平方，而 $2x$ 又是 x 的函数，其对应规则是 $2x$ 对应 x 的 2 倍，我们把这样形成的新函数关系记作 $y = f(2x)$，即 $y = f(2x) = (2x)^2$.

一般地，把函数 $y = f(x)$ 中的 x 改换成一个常数值 x_0，$f(x_0)$ 就是当 $x = x_0$ 时，$y = f(x)$ 的函数值；但如果把函数 $y = f(x)$ 中的 x 改换成 x 的一个函数，例如 $\varphi(x)$（假设 $\varphi(x)$ 的取值在原来函数 $f(x)$ 的定义域内），就形成了一个新的函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，称为复合函数（后文有专门介绍）.

【例 8】　已知 $f(x) = x^2 - 1$，$\varphi(x) = \sin x$，求 $f(0)$，$f(a)$（a 为常数），$f(x+1)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$（$x \neq 0$），$f[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$.

解：$f(0) = 0^2 - 1 = -1$，$f(a) = a^2 - 1$，$f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$，$f(-x) = (-x)^2 - 1 =$

x^2-1，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1(x\neq 0)$，$f[f(x)]=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$，$f[\varphi(x)]=(\sin x)^2-1=\sin^2 x-1=-\cos^2 x$，$\varphi[f(x)]=\sin(x^2-1)$，$\varphi[\varphi(x)]=\sin(\sin x)$.

【例 9】 已知 $f(x-1)=x(x-1)$，求 $f(x)$.

解：设 $x-1=t$，则有

$$f(t)=(t+1)(t+1-1)=t(t+1)$$

因为函数关系只与其定义域及对应规则有关，至于自变量、因变量用什么字母表示，不影响函数关系，故将上式中的 t 换成 x，可得

$$f(x)=x(x+1)$$

1.1.3 函数定义域

确定一个函数的两要素是定义域与对应规则. 对表格法和图形法所表示的函数，其定义域与对应规则均一目了然，但对公式法表达的函数，习惯上往往只给出对应规则而未指明其定义域，这时定义域是指有唯一确定实数值的因变量与之对应的自变量的全体数值所构成的集合. 如函数有实际意义，则按其实际意义确定其定义域.

通常求函数的定义域应注意以下几点：

（1）当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）分式函数的分母不能为零；

（3）偶次根式的被开方式必须大于等于零；

（4）对数函数的真数必须大于零；

（5）反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$；

（6）如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

【例 10】 求下列函数的定义域

（1）$f(x)=\dfrac{1}{5x^2+2x}$；（2）$f(x)=\sqrt{x+3}+\ln(x-2)$；（3）$y=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$

解：（1）在分式 $\dfrac{1}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq 0$，即函数定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

（2）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得 $x>2$，即函数定义域为 $(2,+\infty)$.

（3）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}4x-3>0\\-1\leqslant 2x-1\leqslant 1\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得 $\dfrac{3}{4}<x\leqslant 1$，即函数定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},1\right]$.

1.1.4 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量不同的值，其对应规则不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**“分段函数”**. 分段函数的表达式虽然用几个式子表达，但它表示的是一个函数而不是几个函数.

【例 11】 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

定义域 $(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-6 所示.

【例 12】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

定义域 $(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-7 所示.

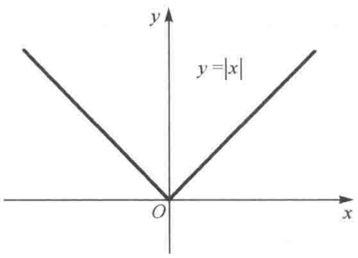

图 1-6

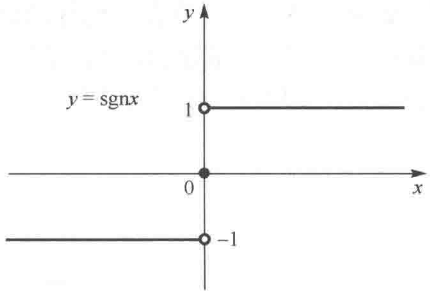

图 1-7

【例 13】 取整函数

$$y=[x]$$

记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如，$[-3.6]=-4$，$[-0.2]=-1$，$[0.3]=0$，$[2.4]=2$. 取整函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-8 所示.

【例 14】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & -2\leqslant x<0\\ 2^x-1 & 0\leqslant x<2\end{cases}$，求其定义域，及 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(x+1)$.

解：从函数对应规则中看，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，每一个 x 值都有一个确定的 y 值与之对应，所以函数的定义域为 $[-2,2]$. 函数图形如图 1-9 所示.

因为 $-2\leqslant\dfrac{1}{2}<0$，所以 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$. 因为 $0\leqslant 1<2$，所以 $f(1)=2^1-1=1$.

$f(x+1)=\begin{cases}(x+1)+1 & -2\leqslant x+1<0\\ 2^{x+1}-1 & 0\leqslant x+1<2\end{cases}$，即 $f(x+1)=\begin{cases}x+2 & -3\leqslant x<-1\\ 2^{x+1}-1 & -1\leqslant x<1\end{cases}$.

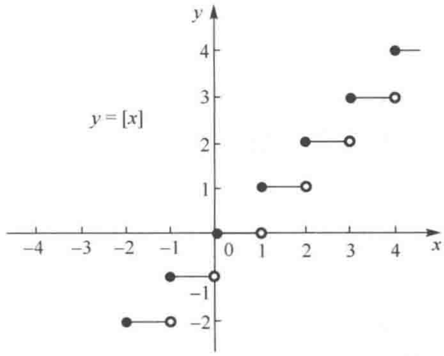

图 1-8

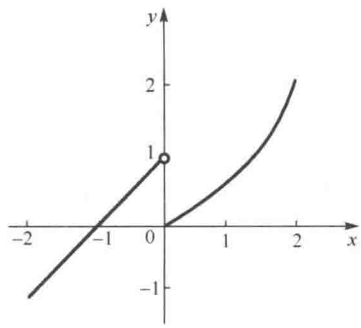

图 1-9

1.1.5 函数的几种简单性质

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义.

1. 有界性

如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**，如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

如图 1-10 所示，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$和$y=M$ 两条直线之间.

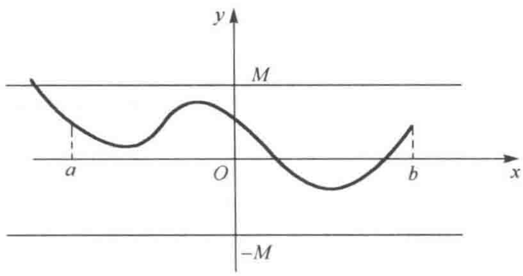

图 1-10

对函数的有界性，要注意以下两点：

（1）当一个函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界时，正数 M 的取值不是唯一的. 例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，有 $|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|\leqslant 2$ 总是成立的，实际上 M 也可以取任何大于 1 的数.

（2）有界性是依赖于区间的. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，但在区间$(0, 1)$内则无界.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，区间 I 称为**单调增区间**；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，区间 I 称为**单调减区间**. 单调增区间或单调减区间统称为**单调区间**.

严格单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向上升的，如图 1-11 所示；单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向下降的，如图 1-12 所示.

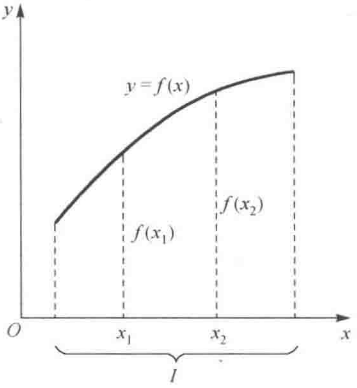

图 1-11

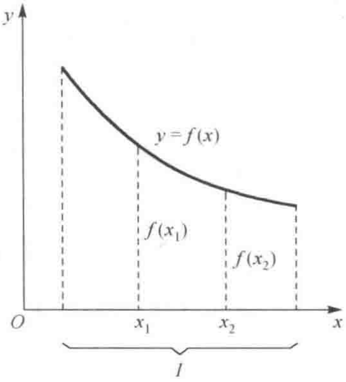

图 1-12

【例 15】　判断 $y=\sqrt{x}$ 的单调性.

解：函数定义域为 $[0,+\infty)$. 在 $[0,+\infty)$ 内，对于任意的 x_1,x_2，若 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$. 因此 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加.

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，如图 1-13 所示；奇函数的图像是关于原点对称的，如图 1-14 所示.

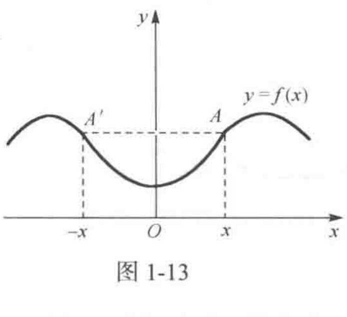

图 1-13

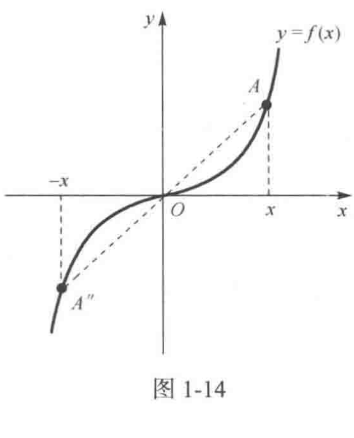

图 1-14

【例 16】　判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=x^3$；（2）$f(x)=3x^4-5x^2+7$；　（3）$f(x)=2x^2+\sin x$.

解：（1）因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3$ 为奇函数.

（2）因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 为偶函数.

（3）因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，同样也可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

4．周期性

若存在不为零的常数 T，使得对任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数的**基本周期**，简称**周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期函数，周期为 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期为 π.

【例 17】 设函数 $f(x)$ 是以 T（$T>0$）为周期的周期函数，证明 $f(ax)$（$a>0$）是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明： $f[a(x+\frac{T}{a})]=f(ax+T)$. 因为 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以有 $f(ax+T)=f(ax)$

因此
$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$$

即 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

所以有 $\sin kx$，$\cos kx$ 以 $\frac{2\pi}{|k|}$ 为周期；$\tan kx$，$\cot kx$ 以 $\frac{\pi}{|k|}$ 为周期.

1.1.6 反函数与复合函数

1．反函数

某种商品的单价为 P，销售量为 x，则销售总收益 y 是 x 的函数：$y=Px$. 这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知销售总收益 y，反过来求销售量 x，则有 $x=\frac{y}{P}$. 这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面两个式子是同一关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应规则不同，它们是两个不同的函数，我们称后一函数 $x=\frac{y}{P}$ 是前一函数 $y=Px$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，$x\in D$，其值域为 Z. 如果对于 Z 中每一个值 y，都有唯一一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则得到一个定义在 Z 上的以 y 为自变量的、x 为因变量的新函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作
$$x=f^{-1}(y)$$

当然，我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，也就是说，它们互为反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量、y 为因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com