国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

高等数学

(上)

GAODENG SHUXUE

主 编 张雪霞

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

高等数学

（上）

主　编　张雪霞
副主编　何小娟　王欣洁
　　　　王银珠　朱　烽
　　　　赵文彬

“北邮智信”APP使用说明
请使用微信扫一扫

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合编者多年的教学经验及教改成果编写而成的．本书分上、下两册．主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程．本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用．每章配有习题，书末附有习题参考答案，便于学生学习．

本书是基于“互联网＋”的立体化创新型教材，借助 APP 平台，提供每章重点和难点的微课、疑难解析，课程纲要等内容，方便教与学．本书可作为高等学校理工科各专业的高等数学教材，也可作为相关教师和工程技术人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上/张雪霞主编．--北京：北京邮电大学出版社，2018．8
ISBN 978－7－5635－5481－2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 141891 号

书　　名	高等数学(上)
主　　编	张雪霞
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	18.5
字　　数	472 千字
版　　次	2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5635－5481－2　　　　定价：48.00 元

前　言

高等数学是高等学校理、工科专业的一门重要基础课程，它不仅为后继专业课程提供必不可少的数学基础知识及常用的数学方法，而且对培养学生的创新思维能力和解决实际问题的能力起着非常重要的作用.

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，参考近年来硕士研究生入学考试数学考试大纲和教学研究改革成果，结合我国中学教育课程改革的实际情况，由具有多年教学实践经验的教师编写而成. 本书立足于普通高等学校理、工科专业的需要，合理安排教学内容，对基本概念的叙述清晰准确；对定理的证明简明易懂，对难度较大的理论问题不过分强调论证的严密性，有的仅给出结论而不加证明；对例题的选配力求典型多样，层次分明，注意解题方法的总结；强调基本运算能力的培养和理论的实际应用；注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养. 加强了从实际问题的引入和从几何方面的分析，增加了不少应用案例，以提高学生的综合分析能力和创新能力.

本书由张雪霞教授主编，何小娟、王欣洁、王银珠、朱烽、赵文彬为副主编. 其中黄丽老师编写第一章，王银珠老师编写第二章，崔学英老师编写第三章，何小娟老师编写第四章，王欣洁老师编写第五章和上册附录，郑宇佳老师编写第六章，赵文彬老师编写第七章，张雪霞老师编写第八章，智红英老师编写第九章，申理精老师编写第十章，李银花老师编写第十一章，朱烽老师编写第十二章和下册附录，张雪霞老师负责全书的修改和统稿工作.

借本书出版之际，向关心和支持本书编写工作的太原科技大学数学系全体同仁表示衷心的感谢！由于编者水平所限，书中有不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

目　　录

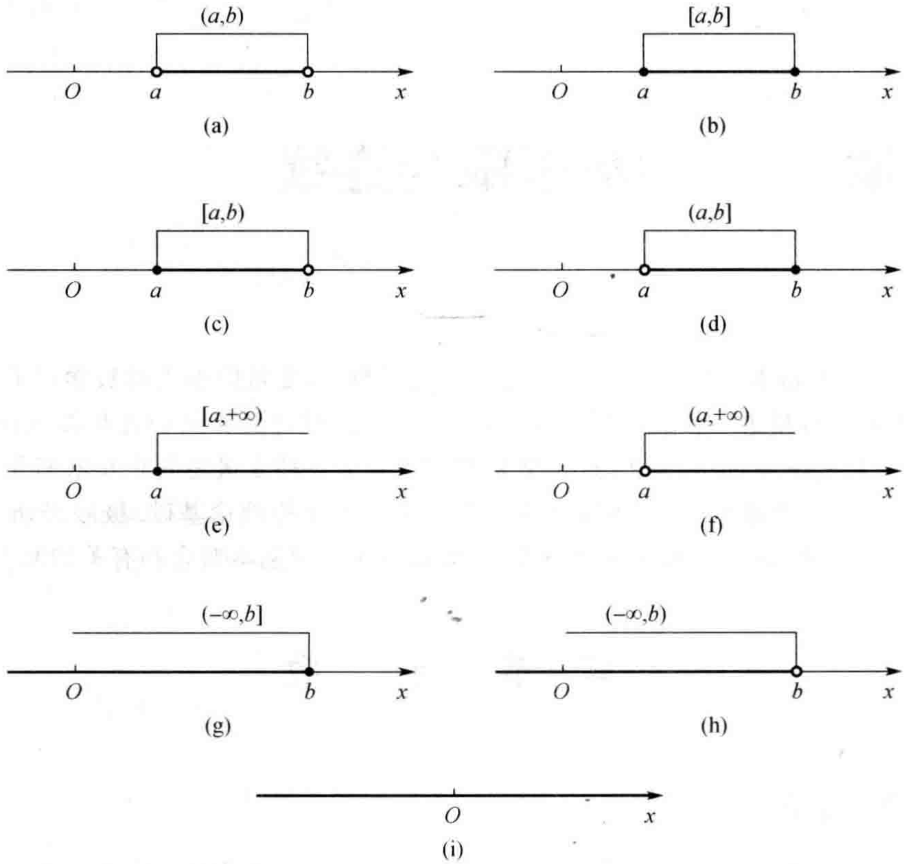


图 1.1

(4) **无限区间**:$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$,如图 1.1(e) 所示;

$(a,+\infty)=\{x \mid x > a\}$,如图 1.1(f) 所示;

$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$,如图 1.1(g) 所示;

$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}$,如图 1.1(h) 所示;

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,其中 $\mathbf{R}$ 为实数集,如图 1.1(i) 所示.

这里要注意符号“$-\infty$”“$+\infty$”只是表示无限性的一种记号,它们都不是某个确定的数,因此它们不能参与数的运算.

在本教材中,当不需要辨明所用区间是否包含端点、是有限还是无限时,常将其简称为“区间”,并常用 I 表示.

下面给出邻域的概念. 称数集

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta, x \in \mathbf{R}\}$$

为点 x_0 的 δ **邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$,称 x_0 为邻域的**中心**,δ 为邻域的**半径**.

由邻域的定义可知

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

表示分别以 $x_0-\delta$,$x_0+\delta$ 为左、右端点,区间长度为 2δ 的开区间.

有时,在不要求说明邻域半径时,也可以简单记作 $U(x_0)$.

在 $U(x_0,\delta)$ 中去掉中心点 x_0,即

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, x \in \mathbf{R}\},$$

则称其为点 x_0 的**去心 δ 邻域**，记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$. 显然去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$ 是两个开区间$(x_0-\delta,x_0)$与$(x_0,x_0+\delta)$ 的并集，即$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$. 通常也把开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的**左 δ 邻域**，区间$(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**右 δ 邻域**.

三、函数概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在自然现象或工程技术问题中，往往同时有几个变量变化着，它们彼此之间并不是孤立的，而是相互联系、相互依赖，并且遵循一定的规律变化着.

例如，当圆的半径固定为 r 时，那么该圆的面积 A 与半径 r 之间的相依关系由公式

$$A=\pi r^2$$

确定.

例如，在自由落体运动中，假定开始下落的时刻为 $t=0$，则物体下落时间 t 与落下的距离 s 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中 g 为重力加速度.

上述两个例子表明：在某一特定的过程中，变量之间不仅是相互依赖的，而且存在确定的对应关系. 我们将这种变量之间的对应关系抽象化，就得到了函数的概念.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，变量 y 按照一定对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，或称 f 为定义在 D 上的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，也记作 D_f.

当 $x_0\in D$ 时，称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，与 x_0 所对应的值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，即 $y_0=f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 的函数值全体组成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

注 (1) 一般函数 $y=f(x)$ 的定义域就是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合. 又称为函数的**自然定义域**. 例如，$y=\sqrt{1-x}$ 的定义域为$(-\infty,1]$，而 $y=\ln(1+x)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$. 但在实际问题中，除了考虑使函数表达式有意义外，还应考虑函数的实际意义. 例如，圆的面积 A 是圆的半径 r 的函数：$A=\pi r^2$，由于圆的半径应该大于 0，所以定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，则称该函数为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 若无特别声明，本教材中的函数均指单值函数.

(3) 函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同. 例如，$y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 是两个不相同的函数.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用其他字母表示，如 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等. 在同一问题中涉及几个不同函数时，需用不同记号表示不同的函数.

在平面直角坐标系中，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**图形**. 一元函数的图形通常是平面内的一条曲线. 图形是函数的直观几何表示,对理解函数的性质十分有用.

函数的常用表示法如下。

(1) **表格法**:将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图形法**:在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **解析法**:(公式法) 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法. 根据函数解析表达式的不同,函数也可分为显函数、隐函数.

① **显函数**:函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如,$y = x + 3$.

② **隐函数**:函数的自变量与因变量的对应关系由方程来确定. 例如,$x^2 + y^2 = 1$.

函数的表示法以解析法为主,并辅以图形法. 下面介绍一种实际中经常用到的函数.

分段函数:在自变量的不同变化范围中,对应法则至少用两个不同解析式来表示的函数. 分段函数一般属于显函数,下面给出几个分段函数的例子.

例 1 函数

$$y = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = [0, +\infty)$,如图 1.2 所示,称为**绝对值函数**.

例 2 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$,如图 1.3 所示.

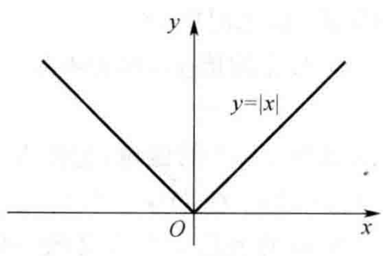


图 1.2

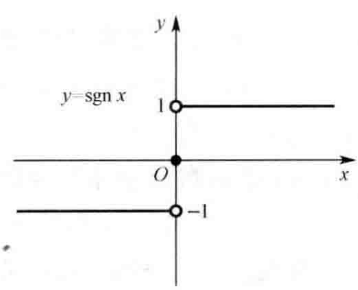


图 1.3

容易验证:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|,$$

其中 $|x|$ 表示 x 的绝对值,而 $\operatorname{sgn} x$ 表示 x 的符号,故 $\operatorname{sgn} x$ 称为**符号函数**.

例 3 取整函数

$$y = [x],$$

其中,记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,例如,

$$[2] = 2, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [-0.3] = -1, \quad [-\pi] = -4.$$

易见,取整函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = \mathbf{Z}$(整数集),如图 1.4 所示.

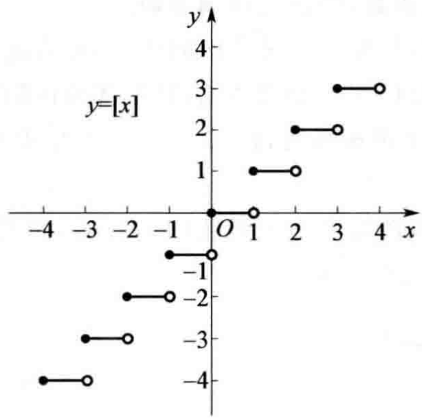


图 1.4

例 4 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,1\}$,该函数没有直观的图形表示.

四、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,若存在一个正数 M,使得对于任一 $x \in X$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称函数 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称函数 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

若有不等式 $|f(x)| \leqslant M$,即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$,这时称 M 为 $f(x)$ 的一个**上界**,$-M$ 为 $f(x)$ 的一个**下界**. 显然函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界也有下界.

例如,函数 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任一 $x \in (-\infty,+\infty)$,恒有 $|\cos x| \leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$ 内是有界的,因为对任一 $x \in [1,+\infty)$,都有 $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$,从而 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$;但函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 内无界,事实上,对于任意给定 $M>0$,存在 $x_0=\dfrac{1}{M+1} \in (0,1)$,使得 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right| = M+1 > M$. 因此函数是否有界,不仅与函数有关,而且还与讨论的区间有关.

直观地说,函数在某个区间内有界,是指存在与 x 轴平行的两条直线可以把函数在该区间内的图形完全夹住.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是**单调递增(递减)函数**. 特别地,若恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是**严格单调递增(递减)函数**.

单调递增函数与单调递减函数,统称为**单调函数**.

注 函数 $f(x)$ 是否单调,是相对于某个区间而言的.有时一个函数在其整个定义域上不是单调的,而在定义域中的部分区间上是单调的,这些部分区间称为该函数的**单调区间**.例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上是单调递减的,在$[0,+\infty)$上是单调递增的,在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

直观地说,单调递增的函数图形是沿 x 轴正向上升的,如图 1.5 所示;单调递减的函数图形是沿 x 轴正向下降的,如图 1.6 所示.

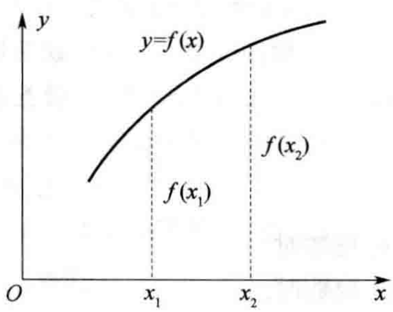


图 1.5

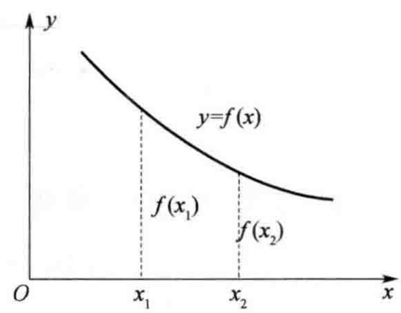


图 1.6

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x)\quad (f(-x)=-f(x))$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上为**偶(奇)函数**.

例如,$x^{2n}(n\in\mathbf{N})$,$\cos x$,$|x|$,e^{x^2},$e^{|x|}$,… 是常见的偶函数;$x^{2n+1}(n\in\mathbf{N})$,$\sin x$,$\tan x$,$\arcsin x$,$\arctan x$,$\frac{1}{x}$,… 是常见的奇函数;$x+x^2$ 既非奇函数,又非偶函数;$y=0$ 既是奇函数,又是偶函数.

奇偶函数的运算性质如下:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数,偶函数的代数和仍为偶函数;

(2) 偶数个奇(偶)函数之积为偶函数,奇数个奇函数之积为奇函数;

(3) 一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数.

例 5 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

在直角坐标系中,偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1.7 所示;而奇函数的图形关于原点对称,如图 1.8 所示.

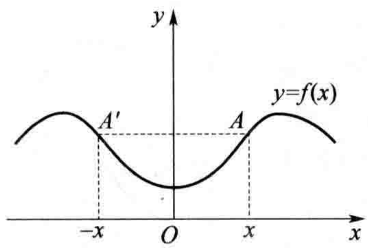


图 1.7

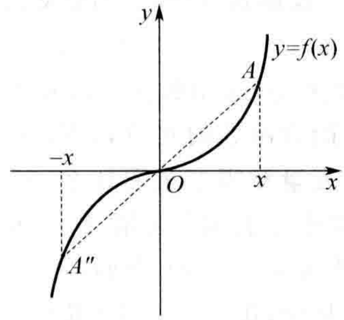


图 1.8

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个正数 T,使得对于任一 $x\in D$,都有 $x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期. 例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 的周期为 2π;$\tan x$,$\cot x$,$|\sin x|$,$|\cos x|$ 的周期为 π;也有函数没有最小正周期,如狄利克雷函数.

周期函数的特点是其图形为一条周期性重复的曲线,只要作出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形,就可通过平移得到整个函数的图形.

周期函数的运算性质如下:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)(a\neq 0)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x)$,$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期也为 T;

(3) 若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 T_1,T_2($T_1\neq T_2$)为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

五、反函数

反函数与反三角函数

函数关系的实质是从数量关系上来描述客观事物的运动变化过程中变量之间的相互依赖、相互制约的关系. 但在研究问题的过程中,哪个量是自变量,哪个量是因变量(函数)是由具体问题来确定的.

例如,在商品销售时,已知某种商品的价格 P 和销量 x,销售收入为 y,当销量已知而要求销售收入时,可根据关系式

$$y=Px$$

确定. 这时,函数关系中 y 是 x 的函数;反过来,如果已知销售收入,要求相应的销售量,则可从 $y=Px$ 得到关系式

$$x=\frac{y}{P}.$$

这时,x 是 y 的函数. 通常称 $x=\dfrac{y}{P}$ 是函数 $y=Px$ 的反函数,也称 $x=\dfrac{y}{P}$ 和 $y=Px$ 互为反函数. 因此有必要引入反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,如果对于任一 $y\in W$,都有唯一确定的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,则称 x 也是 y 的函数,记为 f^{-1},即 $x=f^{-1}(y)$,这个新函数称为函

数$y=f(x)$的**反函数**. 反函数的定义域为W,值域为D. 相应于反函数,将函数$y=f(x)$称为**直接函数**.

从图形上看,直接函数$y=f(x)$与其反函数$x=f^{-1}(y)$为同一图形. 因为函数的实质是变量的对应关系,只要对应关系不变,自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 由于人们习惯用x表示自变量,用y表示因变量,因此,常将反函数改写为$y=f^{-1}(x)$. 此时,称$y=f^{-1}(x)$与$y=f(x)$**互为反函数**. 显然,在同一坐标平面内,$y=f^{-1}(x)$的图形和$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称,如图 1.9 所示.

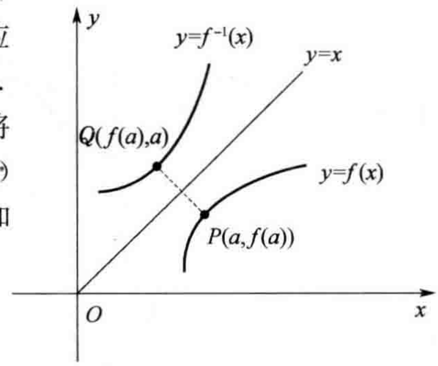


图 1.9

求反函数的步骤:

(1) 将x从方程$y=f(x)$中解出;

(2) 把所得表达式中的x与y互换,即得所求函数的反函数$f^{-1}(x)$.

下面给出**反函数存在定理**:

定理 若函数在定义域中严格单调递增(减),则它的反函数必定存在,且其反函数也是严格单调递增(减)的.

例 6 求下列函数的反函数:

(1)$y=\dfrac{x+1}{2x+1}$; (2)$y=e^{2x+1}$.

解 (1) 由$y=\dfrac{x+1}{2x+1}$,得

$$x=\frac{y-1}{1-2y}.$$

互换变量的记号,即得所求反函数为

$$y=\frac{x-1}{1-2x}.$$

(2) 由$y=e^{2x+1}$,得

$$\ln y=2x+1,$$

即

$$x=\frac{1}{2}(\ln y-1).$$

互换变量的记号,即得所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}(\ln x-1).$$

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域,并用区间表示:

(1)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (2)$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}+\arcsin\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(4) $y=\begin{cases}3^x, & -1\leqslant x<0,\\ 5, & 0\leqslant x<1,\\ x+2, & 1\leqslant x<3.\end{cases}$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；　　(3) $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(-2)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，证明：$f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=2\sin 3x\ \left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

6. 某商场以每件 a 元的价格出售某种商品，若顾客一次购买 50 件以上，则超出 50 件的商品以每件 $0.8a$ 元的优惠价出售. 试将一次性成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数.

7. 证明：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界也有下界.

第二节　初等函数

一、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 基本初等函数是最常见、最基本、最简单的一类函数. 它们是研究各类函数的基础. 为了便于以后的学习，下面对这几类函数作一些简单介绍.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^\mu$（μ 为实数）的定义域与 μ 有关，所有的幂函数都在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且图形通过点 $(1,1)$. 当 $\mu=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时，对应的函数是最常用的幂函数（见图 1.10）.

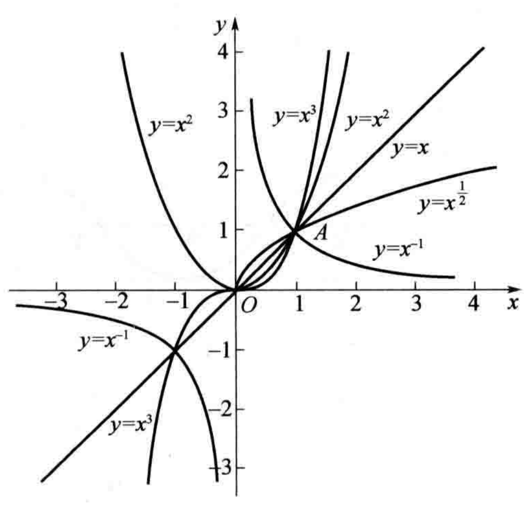


图 1.10

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，且图形通过点

(0,1),当 $a>1$ 时,函数单调递增;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减(见图 1.11).指数函数最为常用的是以 $e=2.718\ 281\ 8\cdots$ 为底数的指数函数 $y=e^x$.

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且图形通过点(1,0).当 $a>1$ 时,函数单调递增;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减(见图 1.12).对数函数与指数函数互为反函数.当 $a=e$ 时,对数函数记为$y=\ln x$,读作自然对数函数.

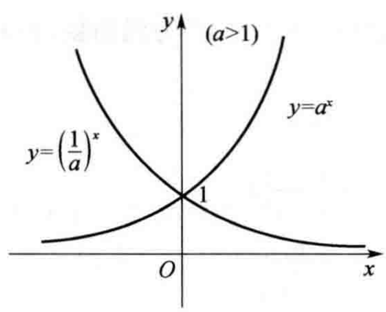


图 1.11

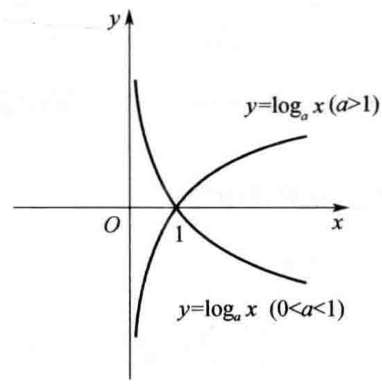


图 1.12

4. 三角函数

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$(见图 1.13 ~ 图 1.16),$y=\sec x, y=\csc x$,它们均为周期函数,在其定义域内,$\sin x$ 和 $\cos x$ 均有界,其余三角函数均无界,$\sin x, \tan x, \cot x, \csc x$ 均为奇函数,$\cos x, \sec x$ 均为偶函数.

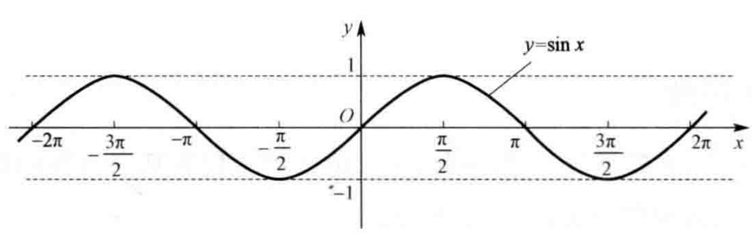


图 1.13

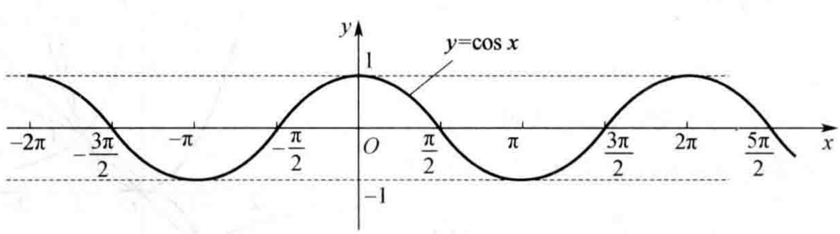


图 1.14

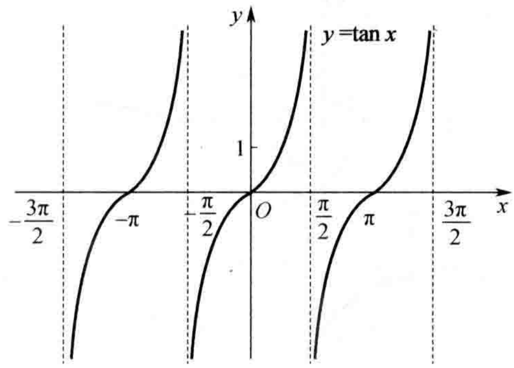


图 1.15

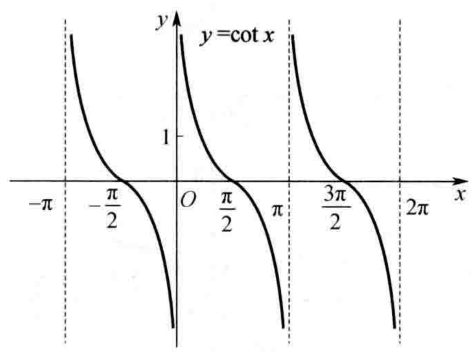


图 1.16

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**. 由于三角函数都是周期函数,故反三角函数都是多值函数. 我们按照下列区间取其一个单值分支,称为主值区间.

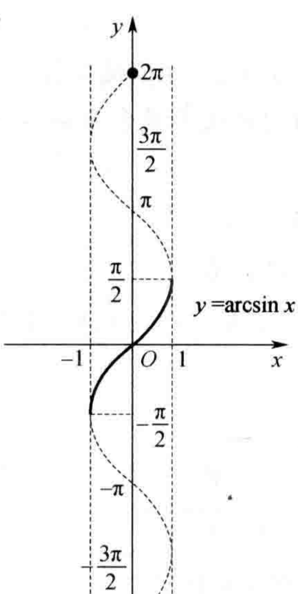
$$y = \arcsin x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$y = \arccos x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi;$$

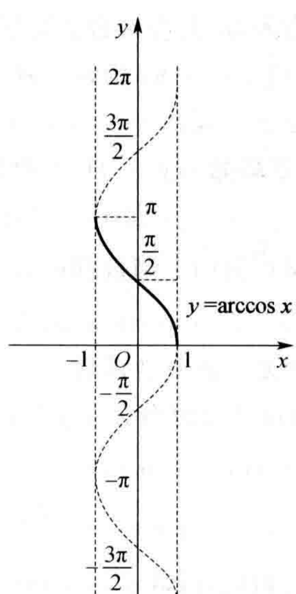
$$y = \arctan x, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \text{arccot}\, x, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad 0 < y < \pi.$$

其中 $\arcsin x$, $\arctan x$ 均是单调递增的, $\arccos x$, $\text{arccot}\, x$ 均是单调递减的,且均为有界函数(见图 1.17).



(a)



(b)

反三角函数

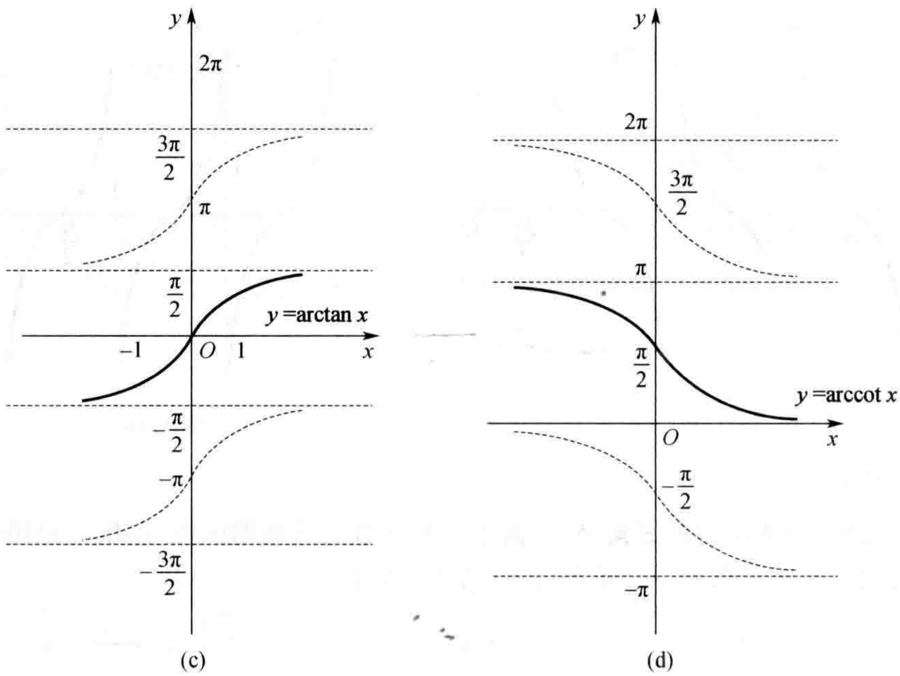


图 1.17

二、复合函数

在实际问题中,会遇到许多比较复杂的函数,它们大多由以上几类基本初等函数经过一些简单运算组成.例如,线性函数 $y = 3x - 8$ 是由幂函数经过乘法、加减法等运算组成.又如,在简谐振动 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 中,它是由线性函数和三角函数"叠置"而成的.通常称这种"叠置"而成的函数为复合函数.复合函数的数学表述如下:

定义 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,若函数 $u = \varphi(x)$ 值域为 R_φ,且 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$,则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中称 $u = \varphi(x)$ 为**中间变量**(或称**内层函数**),$y = f(u)$ 为**外层函数**.

例如,由函数 $y = \sqrt{u}$,$u = 1 - x^2$ 构成的复合函数是 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

注 (1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如,$y = \sqrt{u - 2}$,$u = \sin x$.因为 $D_f = [2, +\infty)$,$R_\varphi = [-1, 1]$,从而 $D_f \cap R_\varphi = \varnothing$,故这两个函数不能复合成复合函数.

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.

例 1 设 $y = f(u) = \arctan u$,$u = \varphi(v) = \sqrt{v}$,$v = \psi(x) = 1 + x^2$,求 $f\{\varphi[\psi(x)]\}$.

解 $f\{\varphi[\psi(x)]\} = \arctan u = \arctan \sqrt{v} = \arctan \sqrt{1 + x^2}$.

与函数的复合相反,函数 $y = \arctan \sqrt{1 + x^2}$ 可看成由函数

$$y = f(u) = \arctan u, \quad u = \varphi(v) = \sqrt{v}, \quad v = \psi(x) = 1 + x^2$$

复合得到,中间变量 u,v 都是简单的函数.这种找出中间变量的过程,称为**复合函数分解**.

复合函数的分解原则:从最外层函数起,逐层向内进行,直到分解为自变量的基本初等函数或者多项式函数为止.

例 2 将函数 $y = \sqrt{\ln \sin^2 x}$ 分解成基本初等函数.