

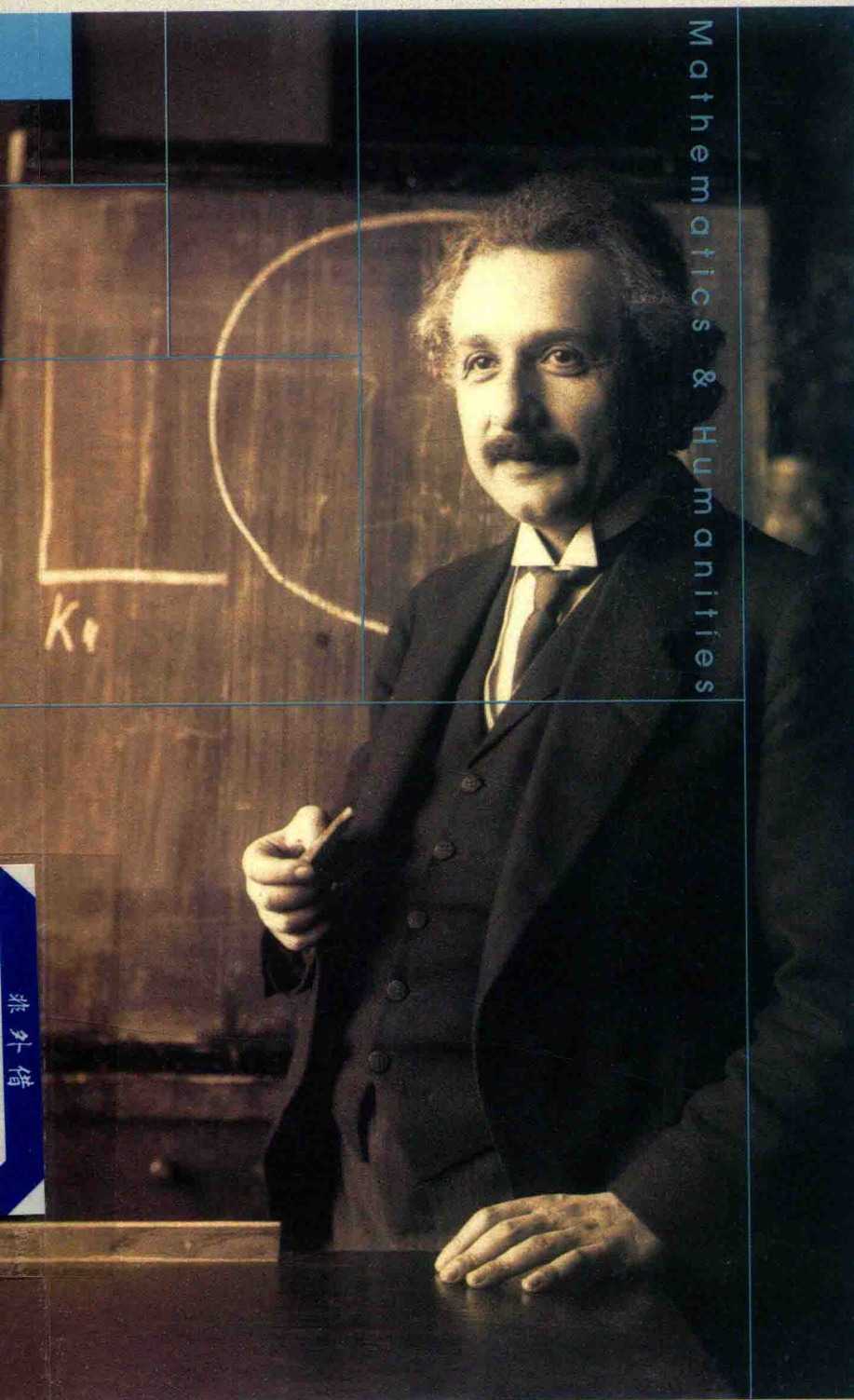
“十三五”国家重点图书

数学与人文
· 第二十五辑

百年广义相对论

主编 丘成桐 刘克峰 杨乐 季理真
副主编 刘润球

Mathematics & Humanities



非外借

高等教育出版社

数学与人文 · 第二十五辑
Mathematics & Humanities

百年广义相对论

BAINIAN GUANGYI XIANGDULUN

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真
副主编 刘润球

高等教育出版社·北京

International Press

“十三五”国家重点图书

图书在版编目 (CIP) 数据

百年广义相对论/丘成桐等主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2018. 10
(《数学与人文》丛书; 第二十五辑)
ISBN 978-7-04-050461-3

I. ①百… II. ①丘… III. ①广义相对论-普及读物
IV. ①O412. 1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 203378 号

Copyright © 2018 by
Higher Education Press Limited Company
4 Dewai Dajie, Beijing 100120, P. R. China, and
International Press
387 Somerville Ave., Somerville, MA 02143, U.S.A.

策划编辑 李华英
责任编辑 李华英 和 静
封面设计 王凌波
版式设计 于 婕
责任校对 窦丽娜
责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
印 刷 北京汇林印务有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 11.75
字 数 210 千字
版 次 2018 年 10 月第 1 版
印 次 2018 年 10 月第 1 次印刷
定 价 29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物 料 号 50461-00

内 容 简 介

《数学与人文》丛书第二十五辑将继续着力贯彻“让数学成为国人文化的一部分”的宗旨，展示数学丰富多彩的方面。

本辑让读者了解广义相对论的发展和它的科学内涵，同时也为对这个学科感兴趣的年轻学子们提供一本教科书以外的补充读物。除了丘成桐和 Roger Penrose 这两位当代广义相对论研究大家的文章，书中还收录了五篇关于广义相对论的发展和个别领域的文章；在广义相对论文章之后，张双南教授的文章可让读者领会广义相对论在未来天文学的发展中可能扮演的重要角色；最后通过胡大年教授的文章补充一些关于相对论在中国“五四时期”萌芽和起步的历史。

我们期望本丛书能受到广大学生、教师和学者的关注和欢迎，期待读者对办好本丛书提出建议，更希望丛书能成为大家的良师益友。

丛书编委会

主 编 (按姓氏笔画排序):

丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真

名誉编委 (按姓氏笔画排序):

万哲先 王 元 石钟慈 齐民友 吴文俊 张景中

编 委 (按姓氏笔画排序):

于 靖 马绍良 王仁宏 王则柯 王善平 井竹君 田 野
冯克勤 曲安京 朱熹平 刘献军 许洪伟 孙小礼 严加安
李文林 李 方 李建华 杨 静 肖 杰 吴 杰 何红建
沈一兵 张英伯 张顺燕 张海潮 张奠宙 周 坚 郑方阳
郑绍远 胡作玄 胡事民 姚恩瑜 袁向东 顾 沛 徐 浩
翁玉林 黄宣国 康明昌 蔡文端

责任编委 (按姓氏笔画排序):

王善平 李 方

丛书编辑部 (按姓氏笔画排序):

邓宇善 刘建中 张 超 赵春莉

合作单位:

中国科学院晨兴数学中心

浙江大学数学科学研究中心

丘成桐数学科学中心

《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基础理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一种很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、计算机的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 2000 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星的五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这套丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

前言

刘润球

2015 年是爱因斯坦广义相对论诞生 100 周年。在过去的一个世纪中，广义相对论从一个不为多数物理学家所理解的抽象几何引力理论蜕变成成为现代物理的支柱之一，刻画作为四种基本相互作用之一的引力作用，在现代宇宙学、高能天体物理、天体测量、大地测量及导航定位等领域中发挥着越来越广泛的重要作用。近年来，国际天文联合会（IAU）更以广义相对论为基础建立了相对论参考系系统，为高精度的空间科学、深空探测、天文观测等领域提供理论框架。

作为广义相对论发展史上一个新纪元的开始，2015 年也将被载入史册。正是在这一年，经过几代人三十多年的不懈努力所建造的美国第二代地面大型激光干涉引力波探测器 Ad-LIGO 在开机运行后不久的 9 月 14 日，就探测到了引力波信号。所捕捉到的引力波信号，来自于距离我们 410Mpc 处，质量分别为 36 倍和 29 倍太阳质量的两个黑洞并合，经过激烈的引力辐射后，形成了一个 62 倍太阳质量的黑洞。对引力波的直接探测预示着人类可以通过探测引力波来探索致密和高能天体物理过程，为人类认识宇宙结构演化、研究相对论天体物理中黑洞和其他致密天体的动力学过程及演化打开一个全新的窗口，一个全新的引力波天文学领域正在慢慢地展现在我们面前。

在牛顿建立经典力学之后的一百多年，Laplace、Poisson、Hamilton 等人为了把经典力学应用到天体运动，发展出新的力学框架，即我们今天所使用的辛几何。历史总是如此的相似，今天当我们想要把广义相对论应用到黑洞和中子星等致密星体的运动时遇到了重重困难，迫切需要发展出新的数学工具和思维，对我们来说这是一个绝佳的历史机遇。

按照《数学与人文》丛书的精神，编辑这本广义相对论文集的目的是在这个广义相对论发展的历史转折点，让更多读者了解广义相对论的发展和它的科学内涵，同时也为对这个学科感兴趣的年轻学子们提供一本教科书以外的补充读物。文集中一共收录了九篇文章。开始是丘成桐和 Roger Penrose 两位当代广义相对论研究大家的文章，在这两篇文章中展示的不仅仅是他们对广义相对论的独特理解和高瞻远瞩，还有他们的思维方式和对选择研究问题的品位和判断，非常值得年轻学子仔细阅读和学习。接着是五篇关于广义

相对论的发展和个别领域的文章，读者可以从这些文章中了解到广义相对论百年发展过程中的一些情况和个别领域的前沿知识。

把张双南教授的文章放在广义相对论文章之后，是希望读者在对广义相对论有一定的理解之后，再去领会广义相对论在未来天文学的发展中可能扮演的重要角色。凭借引力波天文学的发展，可以预见在未来几十年，广义相对论和天文学的发展会紧紧相扣。与其说张教授的文章是一篇科普文章，我更愿意把这篇文章看成是一篇天文学简史的文章，除了对历史和相对论天文学的精彩描述外，更是在敲问我国自宋代以后天文学远远落后于西方的原因，从天文学角度探讨李约瑟提出的科学史难题“尽管中国古代对人类科技发展做出了很多重要贡献，但为什么科学和工业革命没有在近代的中国发生？”，发人深省。

文集中最后一篇文章是胡大年教授撰写的，关于相对论在中国“五四时期”萌芽和起步的历史。在编辑这本文集的早期，曾经希望把一些“文革”和其他时期的历史材料也放进文集中，由于种种原因，最后只收录了胡教授的文章，希望以后有机会再把其他时期的史料收集整理出版。把这篇文章放到最后主要是考虑到篇幅较长，同时也是希望读者在理解相对论的一些知识和发展后，抚今追昔，对先辈们为这个学科在中国的发展付出的辛劳和汗水多一点认识，让我们在他们奠定的基础上往前走时，多一份敬畏和感恩的心，同时也提醒我们有责任尽自己的本分做好传承工作。

在编辑这本文集的过程中，我得到龚雪飞和邓宇善等人的大力协助，在此表示由衷的谢意！

目 录

《数学与人文》丛书序言（丘成桐）

前言（刘润球）

名家访谈录

3 几何：从黎曼、爱因斯坦到弦论（丘成桐）

12 Roger Penrose 访谈

（Andrew Hodges, Roger Penrose, 译者：黄双林）

广义相对论百年历程

35 爱因斯坦与广义相对论的创建

——纪念广义相对论发表 100 周年（赵峥）

60 爱因斯坦是正确的吗？（Nils Andersson, 译者：陈跃文）

68 引力波探测的意义、历史和未来（陈学雷）

79 爱因斯坦方程和数值相对论（曹周键）

88 引力能量和规范场论范式（陈江梅, James M. Nester）

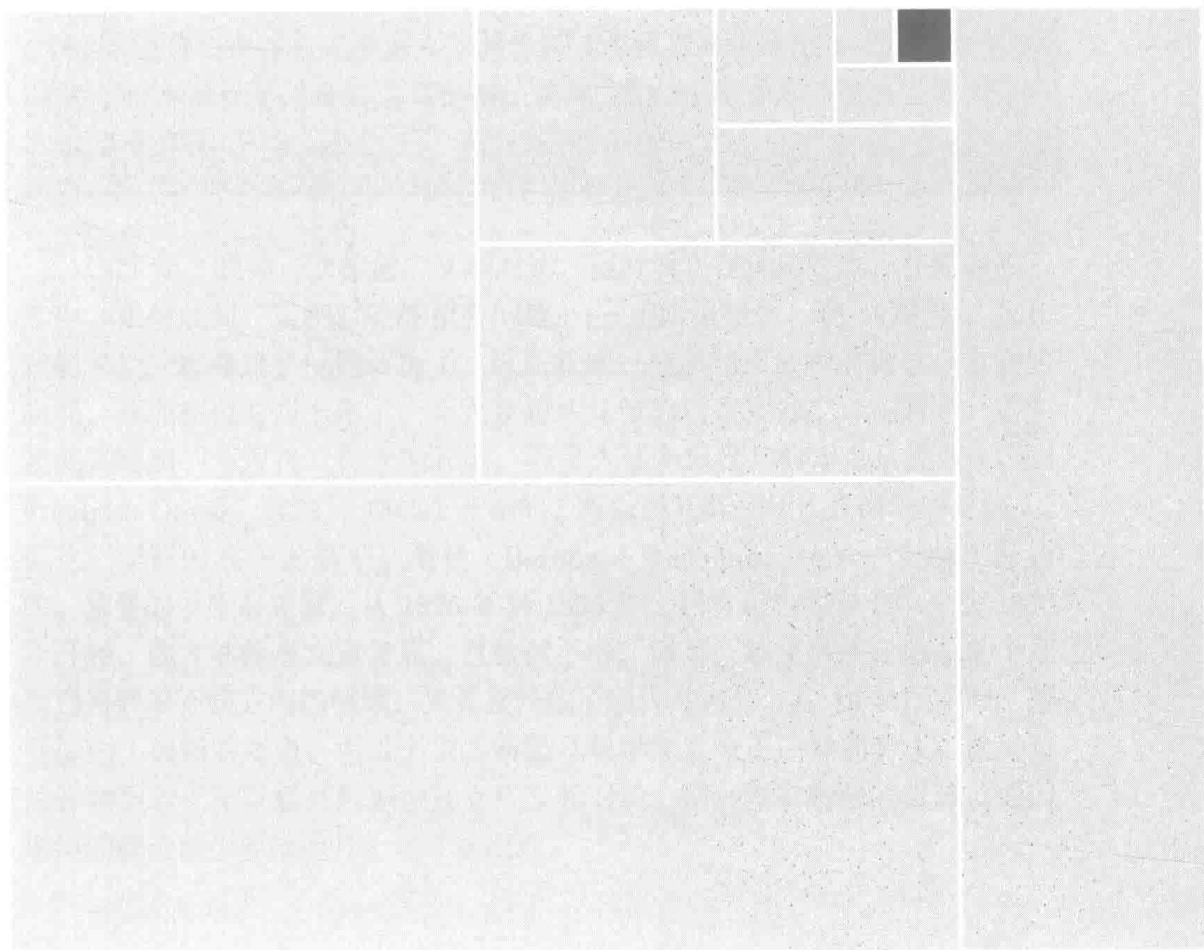
广义相对论和天文学

101 天文学与现代自然科学（张双南）

相对论在中国

137 相对论在中国的启蒙（胡大年）

名家访谈录



几何：从黎曼、爱因斯坦到弦论

丘成桐

丘成桐，当代数学大师，现任哈佛大学讲座教授，1971年师从陈省身先生在加州大学伯克利分校获得博士学位。发展了强有力的偏微分方程技巧，使得微分几何学产生了深刻的变革。解决了卡拉比（Calabi）猜想、正质量猜想等众多难题，影响遍及理论物理和几乎所有核心数学分支。年仅33岁就获得代表数学界最高荣誉的菲尔兹奖（1982），此后获得MacArthur天才奖（1985）、瑞典皇家科学院 Crafoord 奖（1994）、美国国家科学奖（1997）、沃尔夫奖（2010）等众多大奖。现为美国科学院院士、中国科学院和俄罗斯科学院的外籍院士。筹资成立浙江大学数学科学研究中心、香港中文大学数学研究所、北京晨兴数学中心和清华大学丘成桐数学科学中心四大学术机构，担任主任，不取报酬。培养的60余位博士中多数是中国人，其中许多已经成为国际上杰出的数学家。由于对中国数学发展的突出贡献，获得2003年度中华人民共和国科学技术合作奖。

1971年，我第一次接触广义相对论，当时我正在读研究生；在随后的三年中，我接触到广义相对论的重要问题——正质量猜想。到1979年，我和我的学生一起将这个问题解决了，以后我就一直参与广义相对论这个方向的研究，到现在也有四十年了。今天我想从几何的观点来看广义相对论。首先我们来回顾一下现代几何学的开始。很多人认为现代几何学是从高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777—1855）开始的，可以说高斯是现代几何学的开创人，但这门学科的真正发展是从黎曼（Bernhard Riemann, 1826—1866）开始的。黎曼的一生很短暂，从1826年到1866年，只有短短的四十年。从1850年开始，他才陆续有文章发表，且数量不多，但第一篇文章就开创了整个几何乃至数学不同方向的领域，尤其是开创了现代几何学。在19世纪中叶，黎曼提出了很新的观点，引进了与古希腊几何学家完全不一样的看法，这个看法影响到若干年以后爱因斯坦建立广义相对论。假如没有黎曼的贡献，爱因斯坦的理论至少要推迟几十年才能出现。

黎曼在 1854 年的一个报告中讲述了他读博士期间的工作。当时他并不想讲这个题目，因为他认为这篇文章并不是他最擅长的，是他的老师高斯让他讲这个题目。高斯让他讲这篇文章，也就是因为高斯本人考虑过这个问题而不够成功，所以黎曼就给了这个演讲。这是人类思想的一个重大发现，他除了用高斯的一些理论和赫尔巴特（Johann Friedrich Herbart, 1776—1841）哲学思想，没有可以参考的文献，几乎全部是他自己想象出来的。他发表的一些很重要的想法一直到现在都是影响很深刻的。不同于我们今天所看到的，事实上黎曼的想法很开放，一般的几何学家没有搞清楚黎曼当年的想法。他要量距离，要量空间种种不同的概念，要分辨空间和实体，这些实体要通过实验来反馈。一方面，我们知道宇宙是无穷大的，整个宇宙中的星体离我们非常之远；另一方面，我们也看到很小的尺度，小到量子力学、高能物理的物理现象。黎曼则认为几何既能够描述大到整个宇宙，又能够描述很小的尺度。然而，这个想法到现在仍然是个重要的问题，也是 21 世纪很重要的问题，即量子力学与广义相对论的结合。当年，黎曼不知道广义相对论和量子力学，可是他却已经想到巨大距离的几何和微小距离的几何。

黎曼开创现代几何的时候，他是想解释物理现象，而这一点到现在还在摸索，还没有成功。黎曼认为这是个重要问题，几何跟物理一定有着某种联系。我们现在的几何包括了拓扑学、分析、数学物理。黎曼当年也采用同样的方法来研究几何，可是我们以后慢慢就走远了。与黎曼同一时代的有几个重要的数学家，最重要的一个是柯西。我们在大学的时候学过复分析，其中有个柯西-黎曼方程，柯西和黎曼是复分析的奠基人，很多重要的公式是他们推导的。可是黎曼走了一条柯西没有走的路线，他从几何和微分方程的观点来研究复分析，接着引进了所谓黎曼面的基本概念，这个概念成为 19 和 20 世纪最重要的学科，它已不再是数学的一个抽象概念。其实到了今天在很多重要的物理学科里面，黎曼面也都是一个很重要的概念，这个概念影响到高能物理和种种不同的物理现象，所以值得我们去了解这个问题。

黎曼是第一个引进独立于欧氏几何的几何概念的学者，他用坐标来测量长度、面积和局部几何量；他有个很重要的观念，就是认为所有量度的几何量应该跟坐标选取无关，用坐标来量距离、面积等，但这些量又跟局部坐标无关。在广义相对论中，这个概念叫作等效原理，在物理上，从伽利略就已经开始了这样的思考。黎曼第一个将这个观念用到空间几何上。没有等效原理，广义相对论不可能成功，爱因斯坦在推导他的场方程时所用到的一个最基本的假设就是等效原理。其实比爱因斯坦早八十年，黎曼就大量引用这个原理，推导了很多重要的结果，有些是真正用到了物理上。黎曼发觉任何光滑的二维曲面都可以描述为一个黎曼面，这一发现非常重要，因为在过去的三十年来，物理学家对超弦理论很感兴趣，根据这个理论，每种实物粒子都

是时空里面振动的微小的弦。弦振动的时候就会产生一个二维的面，二维曲面本身存在一个很重要的结构，这个结构我们称之为黎曼面，对于这个二维曲面我们定义共形几何，这也就是超弦背后的一个叫作共形场理论的理论。黎曼面不仅仅对弦论很重要，同时对物理的其他方向，如凝聚态物理，也慢慢产生了重要影响。黎曼面在日常生活中也有广泛的应用，比如计算机图形学、地图学。在球面上画地图时，用共形映射到球面上去，地图就变成一个平面上的图画。共形映射有一个坐标系统，黎曼当年的想法就是用不同的坐标系统来描述它，而坐标和坐标之间的关系是共形映射，黎曼面的意思就是我们在用不同坐标来描述几何的时候，坐标与坐标之间的变换或者映射是共形的。

在 19 世纪后期，庞加莱在黎曼之后进一步推动了黎曼几何的发展，推广了黎曼的定理。有些学者是在黎曼去世以后才开始成长起来，他们成功发展了黎曼流形中的微积分。微积分在整个近代科学发挥了重要作用。牛顿发展微积分，并且利用微积分来计算天体力学和一般力学，使其成为物理上的一个最为重要的工具。对于黎曼流形我们同样需要微积分。黎曼空间中的微积分与以往的微积分大致相同，不同的是在微分向量的时候，本来是等于零的地方，对于一般流形不再等于零，因为在黎曼空间中有曲率的存在，使得微分不再等于零。这一点影响到广义相对论的发展，也影响到以后高能物理的发展。在高能物理学中，非交换规范群的结果，取决于空间本身的曲率，其中一个很重要的曲率是意大利几何学家里奇（Ricci）发现的。在物理上我们很重视守恒论，如能量守恒、动量守恒，都是力学里面最重要的理论。里奇发现在空间中也有张量是守恒的，这个重要的发现影响到广义相对论的发展，同时也是广义相对论中的重要一部分。在历史上的一个重要年份，1905 年，爱因斯坦在庞加莱、洛仑兹等人的帮助下建立狭义相对论，发现三维空间的量度和时间的量度是不可分割的。当我们量度时间时，时间量度会改变，所以速度跟时间、长度是互相影响的，也就是狭义相对论里面的主要内容。可是当时他们对时空的观念还不够了解，直到 1908 年，也就是狭义相对论发表三年之后，爱因斯坦的老师闵科夫斯基，也是当时最伟大的数学家之一，他说如果四维时空用黎曼度量来表述的话，整个狭义相对论用几何的方法表现出来会非常清晰。洛仑兹群是整个狭义相对论中最重要群，闵科夫斯基第一个发现时空是四维的，同时可以用一个黎曼度量来量度它。这启示爱因斯坦在研究狭义相对论的时候想到一个很重要的问题，虽然狭义相对论在当时被公认是对的，但牛顿力学跟狭义相对论是矛盾的。因为对于狭义相对论来讲，所有的信息不能够超光速传递，可是牛顿力学是要求超距作用，太阳对地球转动的影晌是瞬时的，根本不需要传递，因此是超光速的，这两个完全相反，一个要求超光速，一个要求以光速为极限。等效原理是一个很重要的

原理，从伽利略开始就知道等效原理，通过实验验证是对的，引力定律不受观察方式或者坐标的选择的影响，坐标的选择不能够影响到整个运动方程。这个重要的看法，通过一个物体在电梯上加速和不加速的思想实验，他知道重力的异常依赖于方向，因为一个很简单的事实，假如我们向前走，速度和光速接近的时候，我们的长度会收缩或膨胀，跟运动方向有关，但是跟运动方向垂直的方向，长度没有受到影响。在一点上描述重力场的函数依赖于方向，但函数跟方向是无关系的，这产生了一个令人困扰的矛盾。所以，爱因斯坦在 1908 年的时候，一方面看到上面的问题，另一方面知道闵科夫斯基用几何化的思想来研究狭义相对论，启发他有了一个很重要的想法，就是描述引力场不能单靠函数，但当时还不清楚他要算的东西，因为他没有足够的数学功底。于是他向年轻时候跟他一起上课的一个朋友格罗斯曼（Grossmann）问了这个问题。格罗斯曼学过一些几何，跟爱因斯坦讲了几何上发展的一套理论，同时这个概念跟闵科夫斯基提出的黎曼张量很像。就连爱因斯坦自己也说 1908 年对他来讲是重要的一年，他发现张量可以用来描述引力场，但是牛顿力学中的重力场是要对势函数进行两次微分，那么怎么对张量进行两次微分呢，于是他再次向格罗斯曼问了这个问题。格罗斯曼当时不愿意帮忙算，但在爱因斯坦的坚持下，格罗斯曼就勉为其难，跑到图书馆去帮他查找相关的书籍和资料，于是找到了里奇张量，恰好重力场方程应该包含这个量，因为这个量跟坐标选择无关。也就是说，我们要对一个二阶张量进行两次微分得到一个与坐标选择无关的二阶张量，这些思考都是完全从数学观点来看的，跟物理无关，物理的思想就是等效原理，描述引力场的是一个二阶张量，微分出来的一定是个二阶张量，最终启发爱因斯坦找到里奇张量这个事实。他们在 1912 年和 1913 年还写了两篇文章，在这两篇文章中就出现了早期爱因斯坦方程的结果，这个结果跟牛顿力学方程的结果很接近，方程的左边是里奇张量，即对黎曼度量微分两次的张量，方程的右边是物质分布的物质张量。这个方程写下来基本上是模仿牛顿力学方程。当时这个方程确实很漂亮，整个方程跟坐标选择无关，所以满足等效原理，爱因斯坦他们对这个方程很满意。但是他们发觉用这个方程来解释物理现象的时候，并不成功。因为他们当时没有注意到一个问题，物质张量满足守恒定律，但左边并不满足守恒律，所以两边并不能相等。在随后的大概两年时间里，爱因斯坦从等效原理出发，采取特殊的坐标系统来解释和观察天体问题，当时他的一个朋友叫作希尔伯特（David Hilbert），这个时候闵科夫斯基已经去世了，希尔伯特说这个方程不好，我们不能通过特殊的坐标系来找寻解释。所以在爱因斯坦最后成功地解释天体问题的时候，有人问爱因斯坦，假如观察到的现象与你的理论有不同的时候，你怎么想？他的回答是，我会为造物者惋惜，竟然不会用这么漂亮的理论。

爱因斯坦因为前面的大概一两年的时间，企图用特殊的坐标来解释物理现象，走了很多错误的冤枉路，最后还是希尔伯特带领他通过数学的美来找到正确的方程。此后，爱因斯坦都不停地讲数学的美是很重要的，从大方向来讲数学的美比实践更为重要。这一点可以讲是通过对称群来找到物理方程的一个重要方法，在推导爱因斯坦场方程的整个过程中，所用到的最重要的是等效原理。等效原理其实就是对称群的应用。对称群是从 19 世纪的伽罗瓦开始的，到 20 世纪初，一个重要的女数学家诺特（Emmy Noether）开始用对称群来推导物理方程，提出了很多重要的思想，给现代物理带来非常深远的影响，这个影响一直到今天还在发挥着作用，所有物理的推导都跟这个有关。还有 20 世纪的伟大数学家外尔（Hermann Weyl），他也同样跟爱因斯坦讲，如果让他选择实验结果和完美理论，他宁愿选择完美理论。因为实验往往会有错误，但一个完美的理论可能会有更深远的影响，同时往往是对的。所以我们可以看到爱因斯坦在完成广义相对论的时候，主要是尽量满足等效原理这样一个哲学思想。同时，要跟牛顿力学能够衔接，通过思想实验和数学思维，他才得出这样的结论，也就是说物理最基本的部分必须通过思想，同时有哲学思想和数学的思维。

广义相对论通过一百年来的检验，基本上都是正确的。爱因斯坦跟希尔伯特相互竞争也相互帮忙，而实际上，希尔伯特比爱因斯坦早十天推导出场方程，不难看出，爱因斯坦的理论受到数学家很大的影响。爱因斯坦发现他的方程可以用来解释时空跟物质的分布是互相影响的，而在牛顿力学里面，时间和空间是固定的，而且它们之间是没有关系的，他发现时空在不停地改变，其中有一个重要的发现是光通过引力场时会发生弯折，过了不到两年的时间，通过日全食的观测，证明这个效应的存在，爱因斯坦更是因此一举成名。他做了基础性概念的突破，就是讲物质的存在会产生重力，重力本身也会影响到时空的结构，时空和重力互相影响，时空几何影响物质分布，物质分布反过来影响时空几何，所以这是一个很重要的观念上的大突破。施瓦西在 1916 年发现爱因斯坦方程的一组解。爱因斯坦方程有很多不同的解，即使有场方程也并不足以估计解的唯一性，解有它的边界条件，有它的初始条件，这两个条件，爱因斯坦都没有解决。初始条件是什么，边界条件是什么，爱因斯坦并不知道，直到一百年以后的今天，我们仍然在辩论什么是对的初始条件，什么是对的边界条件。所以很有意思的是，在广义相对论发表不到一年的时候，施瓦西就发现了场方程的一个解。这个解是球对称的，球对称的解比较容易获得，因为在这样的条件下，场方程就变成了一组常微分方程，求解就相对容易。有了这样一个解，爱因斯坦就很容易计算星球的引力场或重力势，不要小看这个解，我们今天在计算全球定位的时候就要用到这个解，光线的传播会受到地球重力场的影响，假如不用这个解的话，计算出来的结

果就不对。通过施瓦西解我们知道，光线通过引力场会产生微小的偏差。

广义相对论的发展受到黎曼几何的影响，反过来，广义相对论也对微分几何的发展产生深远的影响，影响到这一百年来微分几何的发展。尤其是我们对真空方程的研究，真空方程就是爱因斯坦场方程的右端物质张量等于零。在爱因斯坦广义相对论发表以后，包括爱因斯坦本人在内的很多研究者都希望将麦克斯韦的电磁学跟重力场统一起来。麦克斯韦方程和爱因斯坦场方程表面上看来并不接近，要想将它们统一起来，会有什么做法？麦克斯韦方程是 19 世纪最伟大的一个电磁理论，广义相对论也是 20 世纪最重要的引力理论，因此希望将二者统一。此时就出现各种不同的建议，其中一个最重要的建议，就是刚才讲过的伟大数学家外尔，他将麦克斯韦电磁理论变成规范场理论，规范场这个名字是外尔在 1918 年最先提出的，他当时提出一个规范群是不保持长度的，爱因斯坦不高兴，觉得长度在平行移动的时候不可以改变，外尔接受了这个批评。但是直到十年后，在这期间量子力学产生，量子力学对纤维丛的理论有很深的影响，也给外尔带来很大的影响，因此完成了规范理论，终于将电磁学变成所谓的规范场理论。从这个过程来看，是广义相对论的产生对外尔带来影响，进而产生了规范场论，整个理论在 1928 年完成，这是一个非常伟大的工作，麦克斯韦电磁场变成规范场，带来了巨大的影响。规范理论在数学上是一个非常普遍的理论，当运用到物理上以后变成一个非常重要的理论。从数学上，嘉当等人推广了规范理论，他们提出了所谓的纤维丛或向量丛的观念。他们认为空间的每点上都有一个线性空间，这个线性空间可以任意扭动，这给物理和几何提出了新的观点，这个观点影响到陈省身和庞加莱。在 1945 年，陈先生引进陈氏示性类，一直到 1954 年，杨振宁和米尔斯推广了规范场，从可交换的规范群到非交换的，就是一般数学家讲的向量丛的微分问题。从这以后，规范理论影响了现代物理的一些重要的结果，我们发现自然界中所有基本的相互作用是由规范场来决定的。所以纵观历史，我们可以看到从广义相对论开始，影响到外尔，最后由杨振宁和米尔斯推广外尔理论得出了重要结果。这个结果本身也同时影响到数学的发展，这些发展成为近三十年来重要的开创性工作，可是重要的理论还是没有全部被发展出来。

广义相对论除了影响到外尔规范场理论以外，还产生了一个很重要的理论。卡鲁扎（Kaluza）是个数学家，克莱因曾推广了卡鲁扎的理论形成卡鲁扎-克莱因理论，这是个什么理论呢？当时，爱因斯坦提出的相对论是四维时空理论，爱因斯坦很想从四维时空理论推导出电磁场，但并不知道怎么样能够推导出来电磁场，卡鲁扎尝试了一个大胆的做法，干脆到五维时空去研究广义相对论。那么五维时空是怎么产生的呢？他的做法是将四维时空中的每一点加上一个圆圈，这样就变成五维时空了，在这样一个五维时空中我