

数学化

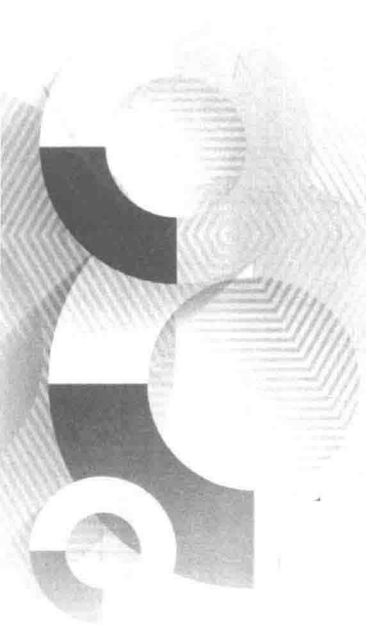
思想视角下的 教学再设计

SHUXUEHUA SIXIANG SHIJIAO XIA DE
JIAOXUE ZAI SHEJI

蔡虹◎著



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS



数学化

思想视角下的 教学再设计

SHUXUEHUA SIXIANG SHIJIAO XIA DE
JIAOXUE ZAI SHEJI

蔡虹◎著



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目 (CIP) 数据

数学化思想视角下的教学再设计/蔡虹著. —广州:暨南大学出版社, 2018. 12

ISBN 978 - 7 - 5668 - 2484 - 4

I. ①数… II. ①蔡… III. ①小学数学课—教学设计
IV. ①G623. 502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 267862 号

数学化思想视角下的教学再设计

SHUXUEHUA SIXIANG SHIJIAO XIA DE JIAOXUE ZAISHEJI

著 者: 蔡 虹

.....

出 版 人: 徐义雄

策划编辑: 杜小陆

责任编辑: 杜小陆 陈 梦

责任校对: 陈俞潼 吴 庆

责任印制: 汤慧君 周一丹

出版发行: 暨南大学出版社 (510630)

电 话: 总编室 (8620) 85221601

营销部 (8620) 85225284 85228291 85228292 (邮购)

传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)

网 址: <http://www.jnupress.com>

排 版: 广州良弓广告有限公司

印 刷: 广州市穗彩印务有限公司

开 本: 850mm × 1168mm 1/32

印 张: 7.625

字 数: 220 千

版 次: 2018 年 12 月第 1 版

印 次: 2018 年 12 月第 1 次

定 价: 36.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社总编室联系调换)

序

近年来出版的基础教育数学论著百花齐放，大致有数学教学思想和教学案例、数学学科课程与教学方法、数学学科课堂教学与教学模式、数学教学评价与案例、学生数学学习心理和素养培养、数学教育史和数学文化、数学教师教学技能和专业发展、数学教学研究与方法等。蔡虹老师作为广州市越秀区教师进修学校（越秀区教育发展中心）培训部部长、数学教研员，不仅有多年的第一线教学经验，还长期从事教师培训和数学教学研究工作。她的专著《数学化思想视角下的教学再设计》即为蔡老师在学习、教学、培训等多元研究工作经历中生成的数学化思想的理论研究和实践应用的心血结晶。近三十年的耕耘，终成硕果，很好地体现了广东教师在“学思行著”等方面励精图治、砥砺奋进的成长轨迹，令人欣喜！

《数学化思想视角下的教学再设计》整本书文体严谨，主线清晰，结构合理，观点新颖，案例得当，是具有含金量的理论和实践指向的小学数学教学专著。它给予我深刻印象的主要有：

1. 构建自成一体的数学化教学应用框架，凸显时代性和可操作性

蔡老师和她的研究团队在弗赖登塔尔关于数学化思想的理论研究基础上，认真学习和准确领会《义务教育数学课程标准（2011年版）》的精髓，以小学数学课堂教学实践为载体，从理论和实践两个层面开展卓有成效的研究；紧扣“概念理解”“技能习得”和“问题解决”三个小学数学教学的关键领域，从感悟数学化思想、展开数学化思考、预设数学化活动、筛选数学化

策略，到开展相关的单元及典型课例教学再设计研究，最终生成了具有自身特点的、相对完善的数学化教学应用框架。此框架缘自广州市中心城区的区域教学研究，并在一线课堂教学实践中得以逐步修改完善，点面结合，相得益彰，符合现代教育理念，具有较强的时代性和可操作性。

2. 践行自创优效的数学化教学样式，落实核心知识和关键能力

与常见的小学一线教学实践成果不同，此专著注重理论研究。不仅从教师的角度出发，还基于学生发展需求，在数学教学关键领域探索课堂教学的变革，推陈出新，创造性设计并生成了分别与“概念理解”“技能习得”和“问题解决”三个关键领域相对应的六种教学样式：“爬梯式”（“概念的形成”教学样式）、“导图式”（“概念的同化”教学样式）、“支架式”（“操作性技能习得”教学样式）、“螺旋式”（“心智性技能习得”教学样式）、“抛锚式”（“纯数学问题解决”教学样式）、“驱动式”（“现实问题解决”教学样式）。通过进一步的课堂教学实践，研究团队印证了这六种教学样式在引领教师围绕核心知识展开深度教学活动、引导学生主动经历数学学习活动，以及拓宽认知体验、积累数学化活动经验、发展学生的数学学科关键能力等过程中显现的优质高效。这六个教学样式符合现代认知学习理论，具有丰富的理论内涵和实践价值，此项成果相信可为一线教师实现小学数学教学的提质增效提供有价值的借鉴和启发。

3. 分享丰实多型的数学化教学资源，发展教师素质和专业能力

同样令人眼前一亮的自然就是此专著中收录的丰富且多课型的单元课例和案例，这些丰实多型的数学化教学资源是由蔡虹老师及其研究团队通过多年开展课型教学再设计研究及课例实践应

用，逐渐积累整理而成。因为植根于一线课堂，课例及案例可信、可学、可操作。已开发的课例和案例优质资源既有来自开课、结课、核心知识教学情境的再设计，又有由“概念理解”“技能习得”和“问题解决”教学方式再设计生成，或者通过“选择教学内容”“筛选教学方法”“指导学生学习”等教学过程再设计生成，以及在越秀区众多小学数学教师日常教学或区域教研活动中产生。这些数学化优质资源的设计、制作、应用、分享的过程，体现了教师的成长缩影，充分印证了教师的基本素质和专业能力的提升和发展。

本书的付印，体现了蔡虹老师站在教育教学研究的前沿，朝着专家型教师方向不懈努力并在成功之路上不断开拓进取。

是为序。

广东省教育研究院



2018年4月于广州

目 录

序	1
第一章 数学化思想	1
第一节 数学化思想的理论构建	1
一、数学化思想的溯源	1
二、数学化思想的构建	2
三、传统数学教育与弗赖登塔尔数学教育运用数学思想方 法的比较	7
第二节 数学化思想的实践应用	8
一、“概念理解”：指导学生开展“自由创造”，实现数学 知识再创造	9
二、“技能习得”：指导学生开展渐进式学习，形成“有序 化”数学现实结构	16
三、“问题解决”：指导学生辨析数学问题，发展数学问 题表征能力	23
第二章 教学再设计的理论基础	32
第一节 现代学习理论	32
一、传统认知主义学习理论	33
二、建构主义学习理论	36
第二节 可持续教育领导力理论	42
一、可持续教育领导对教学再设计的实践意义	42

数学化思想视角下的教学再设计

二、可持续教育领导的思想来源·····	44
三、可持续教育领导力的理论内涵·····	46
第三章 小学数学化教学情境的再设计·····	51
第一节 开课情境的再设计·····	51
一、开课情境的界定·····	52
二、开课情境再设计的价值要求·····	54
三、数学化视角下开课情境再设计的路径·····	57
第二节 核心知识（重难点）教学情境的再设计·····	67
一、核心知识教学的内涵和外延·····	68
二、核心知识教学再设计的价值要求·····	73
三、核心知识教学情境再设计的路径·····	77
第三节 结课情境的再设计·····	101
一、结课情境的界定·····	101
二、结课情境再设计的价值要求·····	104
三、数学化视角下结课情境再设计的路径·····	107
第四章 小学数学化教学方式的再设计·····	113
第一节 “概念理解”教学样式·····	113
一、爬梯式：“概念的形成”教学样式·····	114
二、导图式：“概念的同化”教学样式·····	127
第二节 “技能习得”教学样式·····	139
一、支架式：“操作性技能习得”教学样式·····	140
二、螺旋式：“心智性技能习得”教学样式·····	150
第三节 “问题解决”教学样式·····	160
一、抛锚式：“纯数学问题解决”教学样式·····	161
二、驱动式：“现实问题解决”教学样式·····	171

第五章 小学数理化教学过程的再设计	183
第一节 “概念理解”教学过程的再设计	183
一、案例与评析	184
二、教学再设计中应着重考虑的环节	190
第二节 “技能习得”教学过程的再设计	196
一、案例与评析	197
二、教学再设计中应着重考虑的环节	205
第三节 “问题解决”教学过程的再设计	209
一、案例与评析	210
二、教学再设计中应着重考虑的环节	216
第六章 小学数学教学设计发展的新视角	222
第一节 数学素养的发展轨迹	222
一、国内对数学素养的研究历程	223
二、国外对数学素养的代表性认识及其观点	227
三、数学素养的内涵界定及其相关比较	229
第二节 数学素养视角下的教学再设计	231
一、数学素养视角下教学再设计的原则	231
二、数学素养视角下教学再设计的步骤	233

第一章 数学化思想

“数学化”并非由某个人独创，也并没有具体化的概念。现在对数学化的解释是：从数学的角度去认识、了解世界，分析和研究具体事物和现象的一种过程。如古代的结绳记事，现代的测量、绘画等过程，都是数学化。可见，数学化的出现带动了数学的产生与发展，而数学的发展进步促进了整个数学化的进程。两者之间是一种辩证关系，数学与数学化是相互影响、相互作用的。

第一节 数学化思想的理论构建

一、数学化思想的溯源

从 15 世纪开始，数学的重要性逐渐得到了科学家们的重视，数学化思想成为 15 世纪到 17 世纪时期的一股强劲潮流。哥白尼和开普勒是这股潮流的开路先锋，他们注重数学理论的优越性，且将数学应用到天文学和力学的研究中。真正系统、全面的自然科学的数学化是从伽利略时代开始的，牛顿是其集大成者，莱布尼茨则不仅将数学应用于自然科学的研究，而且应用于社会科学的研究。

（一）应用于自然科学的数学化思想

近代科学的奠基人之一伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）将数学方法与实验结合在一起，定量地分析了自然现象和自然规律，认为宇宙是按照数学规律建立起来的，只有用数学的语言才能书写完成宇宙这部巨著。

与伽利略同时代的笛卡尔（René Descartes，1596—1650）也是数学化思想的主要代表，他认为宇宙是由数学设计而成的机器，而

且数学是科学的本质。笛卡尔宣称：“既不承认也不希望物理学中有任何原理不同于几何学和抽象数学中的原理，因为后者能解释一切自然现象，并且能对其中一些现象给出证明。”^①

数学化思想的集大成者牛顿（Isaac Newton，1643—1727）十分重视数学的方法。在其力学体系中，他系统地引进数学方法，极大地推进了自己的研究，并写出了科学史上不朽名著——《自然哲学的数学原理》。通过他和莱布尼茨对微积分的发明，数学化的进程被推进到算术化、形式化和符号化。

（二）应用于社会科学的数学化思想

莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）是近代数学化思想的登峰造极者。他在1675—1676年间发明了“无穷小算法”（即微积分），并于1714年将自己思想的发展过程记载在《微积分的历史和起源》（*Historia et Origo Calculi Differentialis*）一文中。对于数学的性质，莱布尼茨是在其哲学论述中涉及的。他认为，数学（主要是算术和几何学）是一种真理，它是以一种潜在的方式存在于我们的心中，是具有天赋性的学科。

莱布尼茨不仅从哲学视角对数学的本性进行了解读，还重视数学方法和符号的普遍效力，并将其应用于逻辑问题的研究，由此形成了自己独特的数学化思想。莱布尼茨的数学化思想是以数学为基础并超越数学方法，是一种形式化、模式化、严谨的思维方式。^②

二、数学化思想的构建

汉斯·弗赖登塔尔（Hans Freudenthal，1905—1990）是荷兰著名数学家、数学教育家，是公认享有国际盛名的数学教育权威。作

① 莫里斯·克莱因. 古今数学思想：第一册 [M]. 张理京，等译. 上海：上海科学技术出版社，2014.

② 王琦. 莱布尼茨的语言数学化思想 [J]. 自然辩证法研究，2016（6）：106-111.

为一名数学家，他的主要研究领域是拓扑学和李代数，同时也涉及其他数学分支及哲学和科学史领域。作为一名数学教育家，他非常关注教育问题，很早就把学习和教学作为自己思考和研究的对象。在随后长期的数学教育研究实践中，逐步形成了适应儿童心理发展、符合教育规律、经得起实践检验并具有自己独特风格的数学教育思想体系。他的这一体系，不仅在很大程度上改变了荷兰数学教育的面貌，也通过世界范围内的相互交流，极大地推动了国际数学教育研究的发展，尤其是他的“数学化”和“再创造”思想对各国中小学数学教育的改革产生了巨大的推动力。

弗赖登塔尔从 20 世纪 50 年代后期开始研究数学教育，一生关于数学教育的著作与论文共有 140 余篇（部）。其数学教育思想主要体现于《作为教育任务的数学》《数学教育再探——在中国的讲学》两部著作中。

（一）“数学化”的定义

数学化这个术语首先出现于非正式谈话和讨论中，然后才出现在著作与文献当中，因此不能考证是谁的首创。类似的术语还有公理化、形式化、图式化等。数学作为一种活动，其主要特征就是数学化，也即用数学方法把实际材料组织起来。数学的发展过程就是将现实世界不断数学化，而现实世界是不断发展的，因此数学化也就随之变化、拓展、深入。无论是从计数的产生开始，形成运算法则，进行数系的扩充，进而发展出变数，还是几何学从图形绘画开始，发展出欧式几何，进而产生后来的非欧式几何，整个数学体系都是在随着不断发展数学化形成的。

弗赖登塔尔把“数学化”作为数学教学的基本原则之一。何为“数学化”？弗翁指出：“笼统地讲，人们在观察现实世界时，运用数学方法研究各种具体现象，并加以整理和组织的过程，我称之为

数学化。”^① 并指出：“……没有数学化就没有数学，没有公理化就没有公理系统，没有形式化也就没有形式体系。……因此数学教学必须通过数学化来进行。”^②

具体而言，弗赖登塔尔的观点是学习数学化和学习数学同样重要。数学化就是学习数学的目的，将变化多端的世界事物，通过整理总结，归化为有数学意义的符号与图形，从而对量化的世界进行数学计算，得出我们想要的结果，这就是数学化。因不同个体对数学现实世界持有不同理解，可将数学化分为不同层次。这种数学化对现实世界进行抽象与形式的加工，再应用于现实世界，产生新的数学概念，推动数学科学不断发展。

弗赖登塔尔的“数学化”一直被作为一种优秀的教育思想影响着数学教育界人士的思维方式与行为方式，对全世界的数学教育都产生了极其深刻的影响。

（二）“数学化”的分类——横向与纵向的数学化

1978年，特莱弗斯（Treffers）在他的论文中提出了并不严格的数学化分类，他们将数学化分为横向、纵向这两种类型。^③ 弗赖登塔尔强调数学化的对象分为两类：一类是现实客观事物，另一类是数学本身，以此为依据，在他们的基础上对这一分类进行了进一步发展。弗赖登塔尔指出，横向数学化是指运用数学的方式阐述现实问题，即实现从现实问题或情境问题向数学问题转化的过程。纵向数学化是指通过相关数学工具的使用，实现材料的进一步处理过程，即对已经符号化的问题做进一步抽象化处理的过程，是实现符

① 曹一鸣. 数学教学中的“生活化”与“数学化” [J]. 中国教育旬刊, 2006 (2): 46-48.

② 刘静, 杨新鹏. 谈数学教学中的“数学化” [J]. 聊城大学学报 (自然科学版), 2005 (2).

③ 弗赖登塔尔. 数学教育再探: 在中国的讲学 [M]. 刘意竹, 杨刚, 等译. 上海: 上海教育出版社, 1999: 57.

号到概念转化的过程。^①

展开来说,横向数学化指对客观世界进行数学化,它把生活世界符号化,也就是将现实中蕴含的数学知识抽象出来形成数学符号、概念、图式。比如,由“原来有2只羊,后来又来了3只羊,一共有多少只羊”这个问题抽象出“ $2+3=?$ ”这个算式的过程就是横向的数学化,是同一个问题在现实与数学世界的不同体现。

数学化不仅仅是将现实世界抽象成数学知识,还需要将这些数学知识进行组织。随着现实世界的不断发展与数学知识的不断增加,需要不断更新数学的组织方式。这个在数学内部进行符号的生成、重塑、重组的过程就是纵向的数学化。例如,人们认识到“ $5+5+5+5+5=?$ ”这个问题可以转化为“ $5\times5=?$ ”时,就生成了乘法运算,将数学向深处发展,进行了纵向的数学化。概括而言,纵向数学化是指横向数学化后,将数学问题转化为抽象的数学概念与数学方法,以形成公理体系与形式体系,使数学知识体系更系统、更完美。

(三)“数学化”的重要原则

1. “有指导的再创造”原则

再创造是将数学作为一种活动来看待,即将让学生学习的数学知识通过现实情境再次“创造”出来的一种教学方法。弗赖登塔尔认为,不应该将教的内容以现成的知识强加给学生,学习的过程应该有直接创造的侧面,即是学生主观层面的创造,通过再创造获得的知识更容易理解也更易保持。在教授数学知识时,至少应该让学生参与基本的分析,以便让学生知道这些分析的砖块究竟在建造什么样的大厦。^②

“有指导的再创造”原则:再创造不是意味着仅仅由学生自己

① 唐瑞芬. 数学教学理论选讲 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001: 26.

② 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学 [M]. 陈昌平, 唐瑞芬, 译. 上海: 上海教育出版社, 1995: 110.

完成整个学习过程，而是应该由学生发现自己的标准，经过一定的指导探索能达到这个标准的道路。由于每个学生的实际情况都不尽相同，所以这个标准与指导的程度都应视情况而定。教师应该在学生再创造过程中给予恰当的指导，使学生既能满足创造的乐趣，又能达到教学的要求。

2. “学生为主体的反思”原则

弗赖登塔尔认为，“从别人那里反射自己，就像白天和黑夜，自己反射自己，也就是反省或反思”^①。反思思维是数学创造的强有力动力。反思的内容有很多，包括自己曾经做过的、想象过的、思考过的，或者是正在做的、正在思考的、正在感受到的等。对于学生来说，在数学学习中的反思活动比正常的思考更难以主动进行。而作为教师，不仅要课堂情况、教学行为等进行个人反思，更重要的是引导学生进行反思。

“学生为主体的反思”原则：①弗赖登塔尔认为，一个人内心的反思是被别人内心的反思激发的，并且模仿同样始于反思，是自身的行为在他人身上的反映。表现在数学教育中就是学生的反思行为需要由教师的反思行为来带动，从而发展到学生自己能独立进行反思，这个过程无疑需要长时间发展。②学会反思的先决条件是学会观察，首先是观察别人，然后才是观察自己。因此，在教学学生反思之前，要让学生学会观察。学生应学会自觉地进行观察并反思，使所学的知识不断得到加强，使新学习的知识与已学习的知识建立更多的联系，最终建立整个知识体系，这样的学习过程才是成功的。

3. “渐进式的数学现实结构”原则

弗赖登塔尔研究的基本观点认为数学依据现实需要而产生，随着现实而发展，最终回归现实。弗赖登塔尔还指出：“学习过程是由各种层次构成的，用低层次的方法组织的活动就成了高层次的分

^① 弗赖登塔尔. 数学教育再探：在中国的讲学 [M]. 刘意竹，杨刚，等译. 上海：上海教育出版社，1999：142.

析对象；低层次的运算内容又成为高层次的题材。”^① 因此，数学化作为一种学习过程，表现出具有渐进式的数学现实结构。首先，学生活动应该从情境层次（Situation Level）开始。这个层次跟问题情境是息息相关的，它针对某一专题范畴，促使脉络化知识及策略能够在情境中运用；第二层次是指涉层次（Referential Level），这个层次涉及利用具体数学模型去代表特定的数学对象，所用到的数学模型和策略必须指涉问题所衍生的情境；第三层次是普遍层次（General Level），这是一种过渡性层次，主要是使用去脉络化的、具普遍性的数学模型去分析蕴含的关系，重点是范式化地解决问题程序而不是问题情境；第四个层次，也是最高的形式层次（Formal Level），这个层次容许学习者进行纯粹的思维、反思及欣赏活动。^②

“渐进式的数学现实结构”原则：①数学化应该从一种原始的现实开始，原始的现实产生了问题的许多不同答案，这些问题和答案都是再创造的对象。除了需要考虑知识来源的“原始的现实”外，在创造背景丰富的数学教学时还需要考虑到学习者所处的现实环境与脑中原有的知识——即每个人都有自己的数学现实，不同的人有着不同的数学现实。②数学化的过程伴随着学生理解层次的逐渐深化。从情境层次到指涉层次，再到普遍层次，最后到达形式层次；从非正式的、与问题情境相联系的结论的寻求，到对所得结论的系统化梳理，再到对隐藏在情境背后的一般性原理的深层理解，由此实现透过部分获得对整体的把握。

三、传统数学教育与弗赖登塔尔数学教育运用数学思想方法的比较

（一）传统数学教育中数学思想方法的运用

在传统数学教育过程中，往往简化了探寻过程，偏重现成思想

① 弗赖登塔尔，作为教育任务的数学 [M]，陈昌平，唐瑞芬，译，上海：上海教育出版社，1995：115-116。

② 张国祥，数学化与数学现实思想 [J]，数学教育学报，2005（1）。

方法的应用。在传统数学课堂中,由于课时和进度等原因的限制,教学过程中往往不能把数学思想方法的探寻和发现过程交给学生自己经历,而是由教师直接把某种思想方法灌输给学生。

(二) 弗赖登塔尔数学教育思想指导下的数学思想方法运用

弗赖登塔尔数学教育关注数学思想方法的探寻和生成过程,即注重引导学生“再创造”数学和逐步“数学化”的过程。注重从学生关注和喜欢的方面以及学生自己的现实出发,设计一个情境问题,激发学生主动思考和探究。关注学生的理解方式,尊重学生的思维过程和语言表述,给学生运转自己的思维进行反思的机会,同时也给学生把自己的想法表达出来的机会。为了实现“数学化”,合理设计教学内容,对教材的处理要依据教材并超越教材。这要求教师以教材为依托并对教材内容进行灵活的、更符合学生实际的再创造设计,按照学生的理解方式和认识规律来重新设计教学的内容和过程。弗赖登塔尔认为,学生学习数学是一种再创造的活动,教师设计教学也应该是一种再创造的活动。应尽量给学生充分发挥自己思维的空间和机会,让他们的思维总是处于运转和活动的状态,积极引导反思,为学生创造更多的机会,充分表达自己想法、描述自己的思维过程、获得现实数学的应用经验。

第二节 数学化思想的实践应用

伟大的教育家夸美纽斯(Comenius)有一句名言:“教一个活动的最好方法是演示。”弗赖登塔尔在夸美纽斯理论的基础上进一步指出:“学一个活动的最好方法是实践。”显然,弗赖登塔尔把夸美纽斯的教育理论将“教”转向“学”,将教师的行为转向学生的活动,将感觉效应转为运动效应,这无疑是对夸美纽斯教育理论的发展与创新。

“数学化”的成分主要包括形式化、公理化、模式化、图式化等,其中最常见的是形式化和公理化。“形式化”主要是对数学语