三角代数及其相关代数上的映射问题

王宇 著

科学出版社

三角代数及其相关代数上的映射问题

王　宇　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了近几年关于三角代数及其相关代数上映射问题的研究成果. 前 9 章介绍了多重交换化映射、强交换保持广义导子、Lie 多重导子、双导子、Lie 同构、Jordan 满同态等结果. 后 3 章介绍了函数恒等式和极大左商环在三角环上的应用. 具有一定近世代数基础的读者能够阅读本书的大部分内容.

本书可供代数方向的研究生和相关研究人员使用，也可作为数学专业大学生的专业课以及毕业论文写作参考书.

图书在版编目（CIP）数据

三角代数及其相关代数上的映射问题/王宇著. —北京: 科学出版社, 2018. 1
ISBN 978-7-03-055901-2

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①三角-映射-研究 Ⅳ. ①O124

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 306183 号

责任编辑: 李 欣／责任校对: 彭珍珍
责任印制: 张 伟／封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张: 17 1/4
字数: 331 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

素环和半素环上的映射问题研究在 21 世纪初就已经取得了实质性的成果. 通过使用极大左商环以及环上函数恒等式理论, 素环和半素环上的一些复杂映射问题已经被完全解决. 例如, 素环上 Lie 同态已经被完整地刻画出来. 人们开始把兴趣投入到非半素环上.

三角代数是一类结构简单的非半素代数, 它包括上三角矩阵代数和套代数这两类常见的代数. 其中, 套代数是一类重要的算子代数. 三角代数上映射问题研究始于 Cheung 在 2001 年发表的一篇论文, 他在若干假设条件下给出了三角代数上交换化线性映射的刻画, 同时确定了三角代数上映射问题的研究模式. 从那时起, 关于三角代数及其相关代数上的映射问题研究成果大量出现. 近几年, 人们开始把三角代数上的映射结果推广到广义矩阵代数以及具有幂等元代数上, 取得了丰富的研究成果. 满足一定条件的具有幂等元代数 (包括广义矩阵代数) 除了包括三角代数, 还包括最常见的全矩阵代数和具有幂等元的素代数.

本书按照所讨论的映射类型分成 12 章.

第 1 章介绍三角代数以及具有幂等元代数的定义及例子.

第 2 章介绍关于三角代数上多重交换化线性映射的结果, 此结果是三角代数上交换化线性映射结果的推广.

第 3 章介绍关于三角环上强交换保持广义导子的一个结果. 此结果无论从假设条件还是从证明过程来看, 都展示了三角代数上映射问题研究的一般步骤.

第 4 章介绍具有幂等元代数上 Lie 导子和 Lie 多重导子的研究成果. 由于 Lie 3-导子包括了 Lie 导子和 Jordan 导子, 研究 Lie 多重导子包括了 Jordan 导子的研究. 此外, 具有幂等元代数上存在奇异 Jordan 导子, 而三角代数不存在奇异 Jordan 导子. 说明了具有幂等元代数上 Lie 多重导子结果不是三角代数上相应结果的平凡推广.

第 5 章介绍广义矩阵代数上非线性 Lie 多重导子的一个结果, 此结果是三角代数上相应结果的推广. 由于非线性映射要比线性映射难处理, 这种推广需要施加新的假设条件以及相对复杂的证明过程.

第 6 章介绍广义矩阵代数上双导子结果, 此结果是三角代数上双导子结果的推广. 和素环上双导子结果不同的是, 三角代数和广义矩阵代数上存在极端双导子. 该章还介绍了三角代数上多重导子的一个结果.

第 7 章介绍了使用弱忠诚双模概念给出的三角代数上 Lie 三重同构与 Lie 同

构的重新刻画, 从而改进了 Benkovič 的结果. Lie 同构问题相对 Lie 导子来说要复杂许多, 需要使用双线性映射的交换迹才能解决, 也就是需要使用环上函数恒等式处理映射的研究方法.

第 8 章讨论了上三角矩阵环上的 Jordan 满同态问题. Jordan 同构在三角环上已经有研究成果出现, 但 Jordan 满同态在三角环上还没有研究成果出现. 该章在上三角矩阵环上取得了两个结果, 为下一步研究三角环上 Jordan 满同态打下了一定的基础.

第 9 章介绍了三角代数上 Jordan σ-导子和 Lie σ-导子. 通过使用左 (右) 弱忠诚双模改进了 Benkovič 关于三角代数上 Jordan σ-导子的一个结果. Lie σ-导子目前只在三角代数上获得了刻画, 素环上还没有研究成果出现.

第 10 章介绍三角环以及具有宽幂等元环上 2 个变量函数恒等式的研究成果. 2 个变量函数恒等式是最基本的函数恒等式, 目前三角环上多个变量函数恒等式还没有研究成果出现. 具有宽幂等元环是通过模来定义的. 如果把环看成自身模时, 具有宽幂等元环是广义矩阵环, 它更接近于全矩阵环和具有幂等元的素环. 具有宽幂等元环上的 2 个变量函数恒等式的标准解形式和素环是一样的. 该章也给出了 2 个变量函数恒等式的一些应用. 通过使用函数恒等式, 改进了已有的关于三角环上交换化可加映射和广义双导子结果. 此外, 使用宽幂等元环上 2 个变量函数恒等式结果改进了 Brešar 关于值包含可加映射结果.

第 11 章介绍关于上三角矩阵代数上函数恒等式的一个有趣结果. 主要结果讨论了上三角矩阵代数的 d-自由子集. 确定一个环的子集是否是 d-自由子集是函数恒等式理论的基本内容.

第 12 章首先介绍了有 “1” 环的极大左商环的定义与性质, 然后介绍了三角环的极大左商环的性质, 最后给出了极大左商环在三角环上映射研究中的两个应用例子. 一是使用三角环的极大左商环, 得到任意三角环上 2 个变量函数恒等式的一种刻画, 从而去掉了原有结果的全部假设条件. 作为应用, 给出了任意三角环上交换化可加映射的一个刻画, 从而去掉了 Cheung 的经典结果中的全部假设条件. 二是使用三角环的极大左商环给出了三角环上双导子的一种刻画, 从而改进了 Benkovič 的一个结果. 说明了三角环和半素环一样, 可以使用极大左商环来处理映射问题.

每章最后一节是一个注记, 用来说明所讨论的映射类型的研究背景、研究现状、创新点，以及有待解决的问题. 其中, 在第 2 章的注记中, 说明了研究三角代数上映射问题的一般步骤. 在每章章末附有所引用的参考文献. 以上各章内容选自作者五年来的研究结果, 其中包括了两个没有公开发表的结果. 本书各章内容基本上是相互独立的, 读者可以选择感兴趣的章节阅读.

三角代数及其相关代数上映射问题研究不仅选题丰富, 所需要的代数基础知识也不多. 只要对近世代数有一定基础的人员可通过阅读本书内容加上所附的参考

文献就可以从事此项研究工作. 需要指出的是, 本书中所涉及的映射结果在三角代数与三角环上是通用的. 同样地, 在具有幂等元代数和具有幂等元环上的映射结果也是通用的.

本书可供代数方向的研究生和相关研究人员使用, 也可作为数学专业本科生的专业课以及毕业论文写作参考书.

本书得到了上海师范大学数学高峰学科建设经费的资助. 在本书写作过程中, 得到了杭州电子科技大学朱军教授和山西大学齐霄霏教授的大力支持. 在此表示衷心的感谢!

由于作者的水平有限, 不足之处在所难免, 恳切希望本书出版后, 能得到同行及广大读者的批评指正.

王宇

2017 年 7 月 16 日于上海师范大学

目　　录

第 1 章　三角代数及其相关代数 ········ 1
1.1　三角代数与三角环的定义及例子 ········ 1
1.2　具有幂等元代数 ········ 5
1.3　具有宽幂等元环 ········ 8
1.4　注记 ········ 11
参考文献 ········ 11
第 2 章　三角代数上多重交换化线性映射 ········ 13
2.1　k-交换化线性映射的定义 ········ 13
2.2　主要结果 ········ 14
2.3　应用 ········ 21
2.4　注记 ········ 23
参考文献 ········ 24
第 3 章　三角环上的强交换保持广义导子 ········ 26
3.1　定义及性质 ········ 26
3.2　三角环上导子与广义导子 ········ 26
3.3　主要结果 ········ 31
3.4　应用 ········ 38
3.5　注记 ········ 41
参考文献 ········ 41
第 4 章　具有幂等元代数上的 Lie 导子与 Lie 多重导子 ········ 43
4.1　定义与性质 ········ 43
4.2　广义矩阵代数上的 Lie 导子 ········ 45
4.3　具有幂等元代数上的 Lie 多重导子 ········ 52
4.4　注记 ········ 63
参考文献 ········ 63
第 5 章　广义矩阵代数上非线性 Lie 多重导子 ········ 65
5.1　定义与性质 ········ 65
5.2　主要结果 ········ 66
5.3　应用 ········ 82
5.4　注记 ········ 83

参考文献 ······ 83
第 6 章 双导子与多重导子 ······ 85
6.1 定义与性质 ······ 85
6.2 广义矩阵代数上导子 ······ 88
6.3 广义矩阵代数上双导子 ······ 92
6.4 全矩阵代数上双导子 ······ 107
6.5 三角代数上多重导子 ······ 108
6.6 注记 ······ 116
参考文献 ······ 116
第 7 章 三角代数上 Lie 三重同构与 Lie 同构 ······ 118
7.1 定义与性质 ······ 118
7.2 三角代数上双线性映射的交换化迹 ······ 123
7.3 三角代数上双线性映射的中心化迹 ······ 133
7.4 三角代数上 Lie 三重同构 ······ 135
7.5 三角代数上 Lie 同构 ······ 143
7.6 注记 ······ 145
参考文献 ······ 146
第 8 章 上三角矩阵环上的 Jordan 满同态 ······ 148
8.1 定义及性质 ······ 148
8.2 主要结果一 ······ 149
8.3 主要结果二 ······ 157
8.4 注记 ······ 165
参考文献 ······ 166
第 9 章 三角代数上 Jordan σ-导子与 Lie σ-导子 ······ 168
9.1 定义与性质 ······ 168
9.2 三角代数上 Jordan σ-导子 ······ 171
9.3 三角代数上 Lie σ-导子 ······ 173
9.4 上三角矩阵代数上 Lie σ-导子 ······ 181
9.5 套代数上 Lie σ-导子 ······ 183
9.6 注记 ······ 186
参考文献 ······ 187
第 10 章 三角环与具有幂等元环上 2 个变量函数恒等式及其应用 ······ 188
10.1 基本概念 ······ 188
10.2 三角环上 2 个变量函数恒等式 ······ 189
10.3 三角环上中心化可加映射 ······ 201

10.4 具有宽幂等元环上 2 个变量的函数恒等式 ······ 203
10.5 具有宽幂等元环上广义内双导子 ······ 214
10.6 具有宽幂等元环上值包含映射 ······ 215
10.7 注记 ······ 217
参考文献 ······ 218
第 11 章 上三角矩阵代数上函数恒等式 ······ 219
11.1 定义及性质 ······ 219
11.2 主要结果 ······ 222
11.3 注记 ······ 231
参考文献 ······ 232
第 12 章 极大左商环在三角环上映射研究中的应用 ······ 234
12.1 环的极大左商环 ······ 234
12.2 三角环的极大左商环 ······ 236
12.3 极大 (右) 左商环与三角环上 2 个变量函数恒等式 ······ 240
12.4 极大左 (右) 商环与三角环上交换化映射 ······ 250
12.5 极大左 (右) 商环与三角环上广义内导子 ······ 252
12.6 极大左商环与三角环上双导子 ······ 253
12.7 极大左商环与上三角矩阵环上双导子 ······ 261
12.8 注记 ······ 261
参考文献 ······ 262
索引 ······ 264

第 1 章　三角代数及其相关代数

本章首先介绍三角代数的定义和例子, 然后介绍具有幂等元代数的几个常见例子, 其中包括广义矩阵代数的定义. 接下来介绍具有宽幂等元环的定义及例子.

1.1　三角代数与三角环的定义及例子

本书中的代数均指一个有 “1” 的交换环上的代数. 设 A 是一个代数. 1_A 代表 A 的单位元, $Z(A)$ 代表 A 的中心. 在不发生误解的前提下, 我们可用 1 代表 A 的单位元.

首先给出素代数的定义.

定义 1.1.1　设 A 是一个代数. 任取 $a, b \in A$, 若 $aAb = 0$, 则有 $a = 0$ 或者 $b = 0$. 称 A 是一个素代数.

定义 1.1.2　设 A 是一个代数. 任取 $a \in A$, 若 $aAa = 0$, 则有 $a = 0$. 称 A 是一个半素代数.

易见, 素代数一定是半素代数. 反过来不一定成立. 例如, 若 A 是一个素代数, 则 $A \oplus A$ 是半素代数, 但不是素代数. 半素代数是素代数的亚直和.

下面给出模的定义.

定义 1.1.3　设 A 是一个有 “1” 的环. 设 M 是一个可加子群. 假设 $\circ$ 是 $A \times M$ 到 M 的映射. 为了方便, 我们规定, $a \circ x = ax$ 对任意的 $a \in A$, $x \in M$. 若下面条件成立:

(1) $a(x + y) = ax + ay$,

(2) $(a + b)x = ax + bx$,

(3) $(ab)x = a(bx)$,

(4) $1x = x$,

对所有的 $a, b \in A$, $x, y \in M$, 则称 M 为左 A-模. 类似地, 可以定义右 A-模.

下面给出双模的定义.

定义 1.1.4　设 A 与 B 是两个有 “1” 的环. 若 M 既是左 A-模, 又是右 B-模, 且满足条件

$$(am)b = a(mb)$$

对所有的 $a \in A$, $b \in B$, 以及 $m \in M$, 则称 M 是一个 (A, B)-双模.

下面给出忠实双模的定义.

定义 1.1.5　设 A 与 B 是两个有 “1” 的代数, M 是一个 (A,B)-双模. 若 $aM=0, a\in A$, 可得 $a=0$, 则称 M 是忠实左 A-模. 类似地, 若 $Mb=0, b\in B$, 可得 $b=0$, 则称 M 是忠实右 B-模. 若 M 既是忠实左 A-模, 又是忠实右 B-模, 则称 M 是忠实 (A,B)-双模.

下面给出三角代数的定义.

定义 1.1.6　设 A 与 B 是两个有 “1” 的代数, M 是一个忠实 (A,B)-双模. 则

$$U=\mathrm{Tri}(A,M,B)=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & m \\ & b \end{array}\right) \middle| \ a\in A, m\in M, b\in B\right\}$$

在通常的矩阵加法与乘法下构成的代数称为三角代数.

为了减少使用矩阵符号, 在不发生误解前提下可规定

$$A=\left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ & 0 \end{array}\right),\quad M=\left(\begin{array}{cc} 0 & M \\ & 0 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ & B \end{array}\right).$$

则有

$$U=A+M+B.$$

这样, U 中每一个元素 x 可唯一表成

$$x=a+m+b,$$

这里, $a\in A, m\in M, b\in B$. 易见

$$AM, MB\subseteq M,\quad MA=0,\quad AB=BA=0,\quad BM=0,\quad M^2=0.$$

下面定义两个自然投射 $\pi_A: U\to A$ 和 $\pi_B: U\to B$ 如下

$$\pi_A:\left(\begin{array}{cc} a & m \\ & b \end{array}\right)\mapsto a \quad \text{以及} \quad \pi_B:\left(\begin{array}{cc} a & m \\ & b \end{array}\right)\mapsto b.$$

为了方便, 用 $a\oplus b$ 代表

$$\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ & b \end{array}\right).$$

性质 1.1.1　设 $U=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数. 则 U 的中心

$$Z(U)=\{a\oplus b \mid am=mb \text{ 对任意的 } m\in M\}.$$

并且 $\pi_A(Z(U))\subseteq Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(U))\subseteq Z(B)$, 存在一个代数同构 $\tau:\pi_A(Z(U))\to \pi_B(Z(U))$ 使得 $am=m\tau(a)$ 对任意的 $m\in M$.

证明 任取 $x=a+n+b\in Z(U)$, 这里 $a\in A, b\in B, n\in M$. 由 $x1_A=1_Ax$ 可得 $n=0$. 对任意 $m\in M$, 由 $mx=xm$ 可得 $am=mb$. 由此可见

$$Z(U)\subseteq\left\{a\oplus b\mid am=mb\text{ 对任意的 }m\in M\right\}.$$

反过来, 任取 $a\oplus b$, 满足条件 $am=mb$ 对任意 $m\in M$. 我们首先指出 $a\in Z(A)$, $b\in Z(B)$. 任取 $a'\in A$, 可得

$$\begin{aligned}(aa'-a'a)m&=a(a'm)-a'(am)\\&=a'(mb)-a'mb=a'am-a'am=0\end{aligned}$$

对所有的 $m\in M$. 由于 M 是一个忠实左 A-模, 得到 $aa'-a'a=0$. 可见 $a\in Z(A)$. 类似地, 可得 $b\in Z(B)$.

对任意的 $x=a'+m'+b'\in U$, 有

$$\begin{aligned}(a+b)x&=(a+b)(a'+m'+b')\\&=aa'+am'+bb'\\&=a'a+m'b+b'b\\&=(a'+m'+b')(a+b)\\&=x(a+b).\end{aligned}$$

由此可见, $a\oplus b\in Z(U)$. 因此

$$Z(U)\subseteq\left\{a\oplus b\mid am=mb\text{ 对任意的 }m\in M\right\}.$$

任取 $a\oplus b\in Z(U)$, 定义 $\tau(a)=b$. 根据 M 的忠实性, 易知 b 是由 a 唯一决定的. 因此, τ 为从 $\pi_A(Z(U))$ 到 $\pi_B(Z(U))$ 的一个映射. 反过来, 每一个 $b\in\pi_B(Z(U))$, 由 M 的忠实性可知, 只有唯一的 $a\in\pi_A(Z(U))$ 对应 b. 可见, τ 是双射. 下面证明 τ 是一个代数同构.

任取 $a_1,a_2\in\pi_A(Z(U))$, 有

$$\begin{aligned}(a_1+a_2)m&=a_1m+a_2m\\&=m\tau(a_1)+m\tau(a_2)\\&=m(\tau(a_1)+\tau(a_2))\end{aligned}$$

对所有的 $m\in M$. 由此可见

$$(a_1+a_2)\oplus(\tau(a_1)+\tau(a_2))\in Z(U).$$

由 τ 的定义可见

$$\tau(a_1+a_2)=\tau(a_1)+\tau(a_2).$$

接下来, 有

$$(a_1a_2)m=a_1m\tau(a_2)=m\tau(a_1)\tau(a_2)$$

对所有的 $m\in M$. 由 τ 的定义可见, $\tau(a_1a_2)=\tau(a_1)\tau(a_2)$. 故 τ 是一个代数同构.

□

性质 1.1.2　三角代数是非半素代数.

证明　设 $U=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数. 易见, $mUm=0$ 对每个 $m\in M$. 由此可见, U 是非半素代数. □

性质 1.1.3　三角代数不包含非零中心理想.

证明　设 $U=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数. 设 I 是 U 的一个中心理想. 对任意的 $a\oplus b\in I$, 则 $(a\oplus b)M\subseteq I$. 可见, $aM\subseteq I$. 由性质 1.1.1 得, $aM=0$. 由于 M 是忠实左 A-模, 可得 $a=0$, 从而 $a\oplus b=0$. 可见, $I=0$. □

下面给出三角代数的几个常见例子.

例 1.1.1　设 A 是一个有 "1" 的代数. $T_n(A)$ 表示 A 上的 $n\times n$ 上三角矩阵代数 $(n\geqslant 2)$. $T_n(A)$ 可表成如下的三角代数.

$$\begin{pmatrix} A & A^{n-1} \\ & T_{n-1}(A)\end{pmatrix}.$$

易见, $Z(T_n(A))=Z(A)\cdot I_n$, 这里, I_n 表示 $T_n(A)$ 的单位元.

例 1.1.2　设 A 为一个有 "1" 的代数. n 是一个正整数. 假设 $\bar{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ 是一个由正整数构成的 m-序列, 且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$. 则下面的块上三角矩阵代数 $B_n^{\bar{k}}(A)$ 可看成全矩阵代数 $M_n(A)$ 的一个子代数.

$$B_n^{\bar{k}}(A)=\begin{pmatrix} M_{k_1}(A) & M_{k_1\times k_2}(A) & \cdots & M_{k_1\times k_m}(A) \\ 0 & M_{k_2}(A) & \cdots & M_{k_2\times k_m}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{k_m}(A)\end{pmatrix}.$$

若 $n\geqslant 2$, $B_n^{\bar{k}}(A)\neq M_n(A)$ 时, 易见, $B_n^{\bar{k}}(A)$ 可表成一个三角代数. 当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=1$ 时, 则 $B_n^{\bar{k}}(A)$ 就是一个上三角矩阵代数.

例 1.1.3　设 H 是复数域 C 上的一个 Hilbert 空间. $B(H)$ 为 H 上全体有界线性算子组成的代数. 若 $\mathcal{N}$ 是 H 的一些闭子空间组成的集合, 并且满足 $\{0\}$, $H\in\mathcal{N}$, 以及 $\mathcal{N}$ 中子空间的交与线性生成是封闭的, 则称 $\mathcal{N}$ 是 H 上的一个套. 集合

$$\mathcal{T}(\mathcal{N})=\{T\in B(H)\mid T(N)\subseteq N \text{ 对所有的 } N\in\mathcal{N}\}$$

构成 $B(H)$ 的一个子代数. 称 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 为关于套 $\mathcal{N}$ 的套代数.

我们知道, $Z(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=C\cdot 1$ (参见 [1, 推论 19.5]).

一个套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 称为平凡的, 如果 $\mathcal{N}=\{0,H\}$. 一个非平凡套代数可看成一个三角代数: 取一个 $N\in\mathcal{N}\setminus\{0,H\}$ 以及 H 到 N 的正交投射 E, 则 $\mathcal{N}_1=E(\mathcal{N})$ 和 $\mathcal{N}_2=(1-E)(\mathcal{N})$ 分别为 N 和 $N^{\perp}$ 的套, 易见, $\mathcal{T}(\mathcal{N}_1)=E\mathcal{T}(\mathcal{N})E$, $\mathcal{T}(\mathcal{N}_2)=(1-E)\mathcal{T}(\mathcal{N})(1-E)$ 均为套代数. 并且

$$\mathcal{T}(\mathcal{N})=\begin{pmatrix}\mathcal{T}(\mathcal{N}_1) & E\mathcal{T}(\mathcal{N})(1-E)\\ & \mathcal{T}(\mathcal{N}_2)\end{pmatrix}.$$

下面给出三角环的定义.

定义 1.1.7 设 R 是一个具有非平凡幂等元 e 的有 “1” 的环. 令 $f=1-e$. 若 eRf 是一个忠实的 (eRe,fRf)-双模, 且 $fRe=0$, 则 R 称为一个三角环. 每一个三角环 R 存在如下的 Peirce 分解式:

$$R=eRe+eRf+fRf.$$

下面指出: 每个三角代数可看成一个三角环.

设 $U=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数. 令

$$e=\begin{pmatrix}1_A & 0\\ & 0\end{pmatrix}\quad 以及\quad f=\begin{pmatrix}0 & 0\\ & 1_B\end{pmatrix}.$$

易见 e 是一个非平凡幂等元. 易见 $e+f=1$ 且 $fUe=0$. 故 U 是一个三角环.

使用性质 1.1.1 的证明方法可得如下结论.

性质 1.1.4 三角环 R 的中心

$$Z(R)=\{c\in eRe+fRf\mid c(exf)=(exf)c\ 对所有的\ x\in R\},$$

且有 $Z(R)e\subseteq Z(eRe)$, $Z(R)f\subseteq Z(fRf)$, 存在唯一的环同构 $\tau: Z(R)e\to Z(R)f$ 使得

$$ece(exf)=(exf)\tau(ece)$$

对任意的 $x\in R$.

1.2 具有幂等元代数

设 A 是一个具有非平凡幂等元 e 的有 “1” 的代数. 令 $f=1-e$. 这样, A 有如下的 Peirce 分解式

$$A=eAe+eAf+fAe+fAf,$$

这里 eAe 和 fAf 是 A 的两个子代数, eAf 是一个 (eAe, fAf)-双模, fAe 是一个 (fAf, eAe)-双模. 这样, 对每一个 $x \in A$, 都有如下表达式

$$x = a + m + n + b,$$

这里, $a \in eAe$, $m \in eAf$, $n \in fAe$, $b \in fAf$.

具有幂等元代数需要施加一定的假设条件. 下面给出具有幂等元代数上施加的两个常见条件:

假定 eAf 是一个忠实 (eAe, fAf)-双模, 也就是, 对每一个 $x \in A$, 下面条件成立:

$$\begin{aligned} exe \cdot eAf = 0 \quad &\text{推出} \quad exe = 0, \\ eAf \cdot fxf = 0 \quad &\text{推出} \quad fxf = 0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

易见, 下列集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{对任意的 } a \in eAe, m \in eAf, n \in fAe, b \in fAf \right\}$$

关于矩阵的加法与乘法构成一个代数. 我们称满足条件 (1.2.1) 的代数为广义矩阵代数. 特别地, 当 $fAe = \{0\}$ 时, 满足条件 (1.2.1) 的代数就是三角代数.

例 1.2.1　有 "1" 的代数上的全矩阵代数是广义矩阵代数.

证明　设 A 是一个有 "1" 的代数. 设 $M_n(A)$ $(n \geqslant 2)$ 是 A 上全矩阵代数. 用 e_{ij} 代表通常的矩阵单位. 令 $e = e_{11}$, $f = 1 - e$. 假设 $a \cdot eM_n(A)f = 0$, 这里 $a \in eM_n(A)e$. 取 $e_{12} \in eM_n(A)f$, 则有, $ae_{12} = 0$, 进而, $a = 0$. 即 $eM_n(A)f$ 是一个忠实左 $eM_n(A)e$-模. 类似地, 可得 $eM_n(A)f$ 是忠实右 $fM_n(A)f$-模. 因此, $M_n(A)$ 是广义矩阵代数. □

由素代数的定义可知, 具有非平凡幂等元的有 "1" 的素代数是广义矩阵代数. 特别地, Hilbert 空间上全体有界线性算子构成一个广义矩阵代数.

另一个假设条件是, 对每一个 $x \in A$, 恒有

$$\begin{aligned} exe \cdot eAf = 0 = fAe \cdot exe \quad &\text{推出} \quad exe = 0, \\ eAf \cdot fxf = 0 = fxf \cdot fAe \quad &\text{推出} \quad fxf = 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

易见, 条件 (1.2.2) 要比条件 (1.2.1) 弱一些, 它包括了 $eAf = 0$ 的情况. 由于条件 (1.2.2) 具有对称性, 在处理映射问题时会更加方便.

性质 1.2.1　设 A 是满足条件 (1.2.2) 的代数. 则 A 的中心

$$Z(A) = \{a + b \in eAe + fAf \mid am = mb, na = bn \text{ 对任意的 } m \in eAf, n \in fAe\}.$$

并且, 存在唯一的代数同构 $\tau: Z(A)e \to Z(A)f$ 使得 $am = m\tau(a)$ 以及 $na = \tau(a)n$ 对任意的 $m \in eAf$, $n \in fAe$, $a \in Z(A)e$.

证明 设 $x = a_0 + m_0 + n_0 + b_0 \in Z(A)$. 由于

$$[x, e] = n_0 - m_0 = 0,$$

可得, $m_0 = 0$ 以及 $n_0 = 0$. 这样, $x = a_0 + b_0$. 进一步, 由 $[x, m] = 0$ 以及 $[x, n] = 0$ 得到

$$a_0 m = m b_0, \quad n a_0 = b_0 n$$

对所有的 $m \in eAf$, $n \in fAe$. 下面指出, $a_0 \in Z(eAe)$ 以及 $b_0 \in Z(fAf)$. 任取 $a \in eAe$, 可得

$$[a, a_0]m = a(a_0 m) - a_0(am) = amb_0 - amb_0 = 0,$$
$$n[a, a_0] = (na)a_0 - (na_0)a = b_0 na - b_0 na = 0$$

对所有的 $m \in eAf$, $n \in fAe$. 由条件 (1.2.2) 可得

$$[a, a_0] = 0$$

对所有的 $a \in eAe$, 从而, $a_0 \in Z(eAe)$. 类似地, 我们可得, $b_0 \in Z(fAf)$, 因此, $Z(A)$ 就是希望的形式.

显然, $Z(A)e$ 是 $Z(A)$ 的子代数, $Z(A)f$ 也是 $Z(A)$ 的子代数. 对任意的 $a \in Z(A)e$, 存在 $b \in Z(A)f$ 使得 $a + b \in Z(A)$. 定义 $\tau(a) = b$, 可见

$$am = m\tau(a) \quad 以及 \quad na = \tau(a)n$$

对所有的 $m \in eAf$, $n \in fAe$. 容易验证, $\tau: Z(A)e \to Z(A)f$ 是一个代数同构. □

性质 1.2.2 **设 A 是满足条件 (1.2.2) 的代数. 则 A 不包含非零的中心理想.**

证明 设 I 是 A 的一个非零中心理想. 取 $a + b \in I$, 且 $a + b \neq 0$, 这里, $a \in Z(A)e$, $b \in Z(A)f$. 可见

$$(a + b)eAf, \quad fAe(a + b) \subseteq I.$$

由性质 1.2.1 知,

$$aeAf = 0 = fAea.$$

由条件 (1.2.2) 得, $a = 0$. 进而, $b = 0$, 矛盾. □

由性质 1.2.2 可知, 广义矩阵代数不包含非零中心理想. 特别地, 我们有如下结论.

性质 1.2.3　上三角矩阵代数、非平凡套代数, 以及全矩阵代数均不包含非零的中心理想.

下面的假设条件将在后面几章使用.

$$[x, A] \subseteq Z(A) \Longrightarrow x \in Z(A) \tag{1.2.3}$$

对所有的 $x \in A$. 交换代数当然满足条件 (1.2.3). 由 [2, 定理 2] 可知, 任意素代数满足条件 (1.2.3).

性质 1.2.4　满足条件 (1.2.2) 的代数一定满足条件 (1.2.3).

证明　设 $A = eAe + eAf + fAe + fAf$ 是满足条件 (1.2.2) 的代数. 假设对于 $x = exe + exf + fxe + fxf \in A$ 使得

$$[x, A] \subseteq Z(A).$$

由 $[x, e] \in Z(A)$ 得, $fxe - exf \in Z(A)$. 根据性质 1.2.1 得

$$exf = 0 = fxe.$$

由 $[x, eAf] \subseteq Z(A)$ 可见

$$exe \cdot eyf = eyf \cdot fxf$$

对所有的 $y \in A$. 类似地, 可得

$$fye \cdot exe = fxf \cdot fye$$

对所有的 $y \in A$. 再由性质 1.2.1 得, $x = exe + fxf \in Z(A)$. □

特别地, 可得如下性质.

性质 1.2.5　上三角矩阵代数、非平凡套代数, 以及全矩阵代数一定满足条件 (1.2.3).

1.3　具有宽幂等元环

设 A 是一个 "1" 的结合环, M 是一个 A-双模. 令 $[m, a] = ma - am$, $m \in M$, $a \in A$. 对于 $A' \subseteq A$ 和 $M' \subseteq M$, 令

$$C(A', M') = \{m \in M' \mid [m, A'] = 0\}.$$

为了简洁, 令 $C = C(A, M)$ 表示 M 的中心. 特别地, 当 $M = A$ 时, $C = Z(A)$ 为 A 的中心.