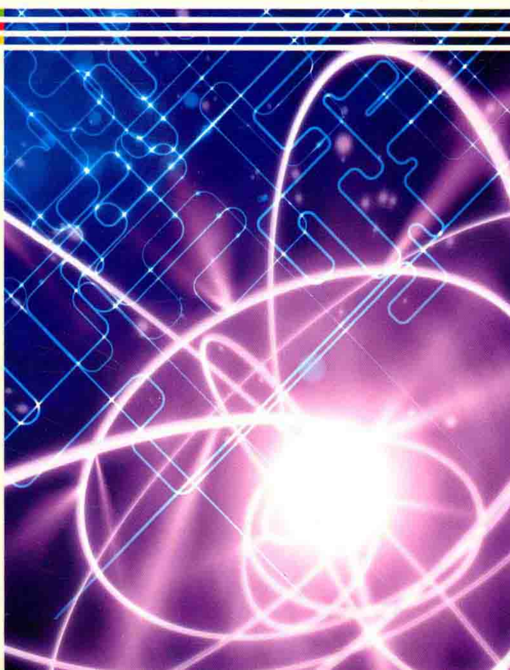
应用型本科院校“十三五”规划教材/数学类

主编　金宝胜

概率论与数理统计

（第3版）

Probability Theory and Mathematical Statistics



- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

哈爾濱工業大學出版社

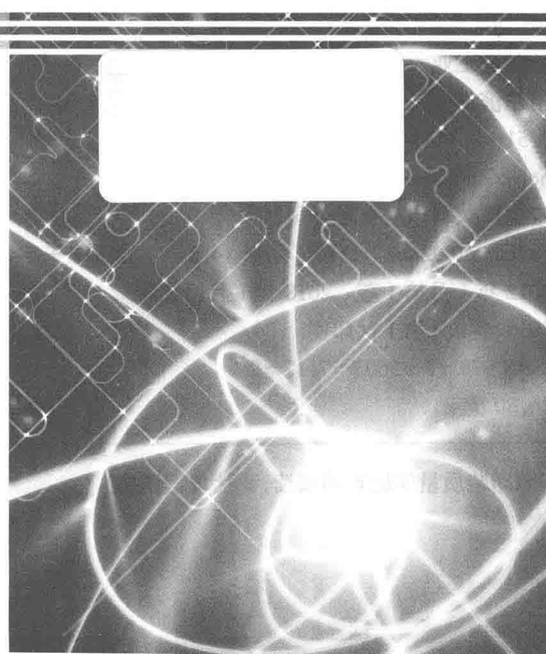
应用型本科院校“十三五”规划教材/数学类

主　编　金宝胜
副主编　段宏博　武　斌

概率论与数理统计

（第3版）

Probability Theory and Mathematical Statistics



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书主要内容包括概率论、数理统计共 8 章：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验. 本书内容由浅入深，通俗易懂，重点突出.

本书可作为应用型本科院校各有关专业概率论与数理统计课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/金宝胜主编. —3 版. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1
应用型本科院校“十三五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 5603 - 7112 - 2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①朱…②段… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 294029 号

策划编辑 杜 燕 赵文斌
责任编辑 尹 凡
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨久利印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 14.5 字数 331 千字
版 次 2012 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 3 版
2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 7112 - 2
定 价 26.80 元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十三五”规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十三五”规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据前黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十三五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

第 3 版前言

本书是应用型本科院校“十三五”规划教材。

概率论是研究随机现象规律性的科学，统计是一门关于数据资料的收集、整理、分析和推断的科学，是近代数学的重要组成部分，也是很有特色的一个数学分支。概率论与数理统计已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术和军事技术等科学中。概率论的理论较难，且统计学是以概率论为工具进行数据处理，因此初学者会感到这门课不好学，为了保证本教材适用应用型本科院校，我们努力做到：

1. 概念引入直观，定义、定理简洁，易于学生阅读。

2. 内容组织科学系统。

3. 叙述简明易懂，易于教学。

4. 书中例题较多，注意对解题方法的训练，讲课时可以有选择的讲，其余例题供学生自学使用。

5. 每节后面有一个“百花园”介绍各种类型题，给想深入学习的学生提供一个园地。

6. 每章末都有一个本章小结，对本章知识进行归纳总结，使知识条理化、系统化。

本教材共 8 章，第 1 章、第 2 章、第 3 章由金宝胜编写，第 4 章、第 5 章由段宏博编写，第 6 章、第 7 章、第 8 章由武斌编写。最后由金宝胜统稿整理。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足，敬请读者不吝指教。

编　者

2017 年 12 月

目　　录

第 1 章

随机事件及其概率

自然界中的客观现象一般可分为必然现象和随机现象,必然现象是指在一定条件下必然发生的现象,如上抛石子必然落下,而随机现象是指在一定条件下可能出现也可能不出现的现象. 概率论是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科.

概率论起源于赌博,三百多年前,一个赌博者向法国数学家帕斯卡提出了一个使他苦恼很久的问题:"两个赌徒,各出赌资 A,约定谁先胜 16 局,对方的赌资便归胜者,赌博方式就是投钱币,猜对了便是赢,甲胜了 15 局,乙胜了 10 局,由于某种原因,赌博停止,问二人的赌资应如何分配?"1654 年 7 月 29 日帕斯卡将这个问题和它的解法寄给了法国数学家费马.

这样问题引起了数学家们的注意,认为这是一片尚未开发的科学处女地,正如法国数学家拉普拉斯预言:"值得注意的是,从考虑赌博问题而起始的一门科学,将会成为人类知识宝库里最重要的主题.

下面我们将三百多年间数十代数学家们的部分工作,整理简述如下.

1.1 基本概念

1. 随机事件

定义 1.1 具备以下三个特点的试验,称为随机试验,记作 E:

(1) 可以在相同条件下重复进行(可重复性);

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能的结果(明确性);

(3) 进行试验之前不能确定本次试验哪一个结果会出现(不确定性);

本书中以后提到的试验都是随机试验.

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S,样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

定义 1.2 试验 E 的样本空间 S 的子集,称为 E 的随机事件,简称事件,用大写字母 A, B, C, $\cdots$,表示.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次试验中它总是发生,因此称为必然事件,用 Ω 表示. 空集 ϕ 不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不发生,称之为不可能事件.

例 1 掷一枚骰子,① 写出其样本空间;② 写出所有的基本事件;③$A=\{$出现偶数点$\}$;④$\{$点数 $\leqslant 6\}$;⑤$\{$点数 $>7\}$.

解 ① 样本空间为 $S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,其中 $\omega_i=$"出现 i 点" $i=1,\cdots,6$;

②$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\},\{\omega_6\}$;

③$A=\{\omega_2$ 或 ω_4 或 $\omega_6\}$;④Ω;⑤ϕ.

2. 事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的含义.

定义 1.3 事件 A,B,若 $A\subset B$,称事件 B 包含事件 A.

即事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

定义 1.4 事件 A,B,称事件 $A\cup B$ 为事件 A 与事件 B 的和事件,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 也可记作 $A+B$.

类似地称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,$ 的和事件.

定义 1.5 事件 A,B,称事件 $A\cap B$ 为事件 A 与事件 B 的积事件,当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也可记作 AB.

类似地称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,$ 的积事件.

定义 1.6 事件 A,B,称事件 $A-B$ 为事件 A 与事件 B 的差事件,当且仅当 A 发生,B 不发生时,事件 $A-B$ 发生.

定义 1.7 事件 A,B,若 $A\cap B=\phi$,称事件 A 与 B 互不相容的,或互斥的,这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

定义 1.8 事件 A,B,若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\phi$,称事件 A 与事件 B 互为逆事件,又称互为对立事件,记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

$\overline{A}=\Omega-A$,这指的是对每次试验而言,事件 $A,\overline{A}$ 中必有一个发生,且仅有一个发生,显然 $\overline{\overline{A}}=A$.

定义 1.9 若有限个或可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 满足 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$ 且 $\bigcup\limits_{i}A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组.

有人说驾驭了"集合" 等于驾驭了所有数学,研究集合的最直观的工具就是文氏图.

图 1.1(a) 是 $A \cup B$ 的 Venn 图;

图 1.1(b) 是 $A \cap B$ 的 Venn 图;

图 1.1(c) 是 $A - B$ 的 Venn 图,由图可知 $A - B = A\overline{B} = A - AB$ 这是一个重要的关系式.

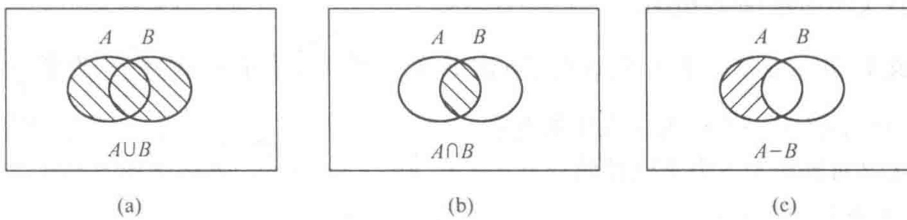


图 1.1

事件的运算与集合的运算一样,满足以下运算规律:

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\bigcup_{i=1} A_i} = \bigcap_{i=1} \overline{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1} A_i} = \bigcup_{i=1} \overline{A}_i$

(5) 吸收律　$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$

(6) 双重否定律　$\overline{\overline{A}} = A$

(7) 排中律　$A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \phi$

(8) 差积转换律　$A - B = A\overline{B}(= A - AB)$

例 2　设 A,B,C 为 3 个事件,用 A,B,C 的运算表示下列事件:

(1)A 发生而 B 与 C 都不发生:$A\overline{B}\,\overline{C} = A - B - C = A - (B \cup C)$

(2)A,B 都发生而 C 不发生:$AB\overline{C} = AB - C$

(3)A,B,C 至少有一个发生:$A \cup B \cup C$

(4)A,B,C 至少有两个事件发生:$(AB) \cup (AC) \cup (BC)$

(5)A,B,C 恰好有两个事件发生:$(AB\overline{C}) \cup (A\overline{B}C) \cup (\overline{A}BC)$

(6)A,B,C 恰好有一个事件发生:$(A\overline{BC}) \cup (\overline{A}B\overline{C}) \cup (\overline{AB}C)$

(7)A,B 至少有一个发生,而 C 不发生:$(A \cup B)\overline{C}$

(8)A,B,C 都不发生:$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

例 3　化简下列各式:

(1)$A \cup B - A$　　　　(2)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})$

解　(1)$A \cup B - A = (A \cup B)\overline{A} = (A\overline{A}) \cup (B\overline{A}) = \phi \cup (B\overline{A}) = B\overline{A}$

(2)$(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A \cup BA \cup A\overline{B} \cup B\overline{B} = A \cup [A(B \cup \overline{B})] = A \cup A = A$

3. 事件的概率

对于一个事件(ϕ 和 Ω 除外) 来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,我们希望知道这个事件发生的可能性究竟有多大,想用一个数来表示其发生的可能性的大小,为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

定义 1.10 在相同条件下,进行了 n 次试验,事件 A 发生了 n_A 次,称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$,称 n_A 为 A 发生的频数.

由定义可知频率具有下述性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

(2) $f_n(\Omega) = 1$

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

事件的频率首先具有波动性,如掷硬币 20 次,第一次正面可能出现 8 次,而第二次正面可能出现 13 次,…… 以往人们只注意了频率的波动性,而忽视了它的另一个潜在的重要性质 —— 稳定性.

历史上有一些著名的试验,列表如下:

试验者	掷硬币次数	正面次数	正面出现频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

这些先哲们,都不约而同地在验证一件事情 —— 事件频率的稳定性. 可见出现正面的频率总在 0.5 附近波动,随着试验次数增加,它逐渐稳定于 0.5, 0.5 这个数就反映正面出现可能性的大小.

每个事件都存在着一个常数与之对应,因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的常数定义为事件 A 发生的概率,这就是概率的统计定义.

定义 1.11 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k,当 n 很大时,频率 $\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 的附近波动,而随着试验次数 n 的增加,波动的幅度越小,则称数 p 为事件 A 发生的概率,记作 $P(A) = p$.

在实际中无法精确确定 p,于是多用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值. 直到 1933 年前苏联数学家柯尔莫柯洛夫将实变函数论的观念引入概率论的研究中,导致概率论公理化体系的构成.

定义 1.12 设 S 为样本空间,A 为事件,对于每一个事件 A 赋予一个实数,记作 $P(A)$,如果 $P(A)$ 满足以下条件:

(1) 非负性 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$

(3) 可列可加性　对于两两互不相容的可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的定义,可以推得概率的一些重要性质.

性质 1　$P(\phi)=0$

性质 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 3　若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,且 $P(A)\leqslant P(B)$

性质 4　$P(\bar{A})=1-P(A)\Rightarrow P(\phi)=0$

性质 5　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)-P(ABCD)$$

例 4　已知 $P(A)=0.8$,$P(B)=0.7$,证明 $P(AB)\geqslant 0.5$.

证明　$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant 0.8+0.7-1=0.5$

例 5　设 A,B,C 是三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$$

4. 古典概型(等可能概型)

在 18 世纪概率论发展初期曾主要研究以下模型:

定义 1.13　试验的样本空间只包含有限个元素,而试验中每个基本事件发生的可能性相同,这种试验称为等可能概型或古典概型.

下面我们讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设样本空间为 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$$

又因基本事件是两两互不相容的,于是由

$$P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\})=1$$

得

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}\quad i=1,2,\cdots,n$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$，这里 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{样本空间中基本事件总数}} \tag{1.1}$$

这就是古典概型中事件 A 的概率的计算公式.

例 6 （抽签问题）盒中有 a 个红球，b 个白球，每人取一球不放回，问第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 个人抽到红球的概率.

解 我们将 $a+b$ 个球作一个全排列 $(a+b)!$，先安排第 k 个人，让他抽到一个红球，共有 $C_a^1=a$ 种方法，其余的 $a+b-1$ 个球，可随意安排在其余的 $a+b-1$ 个位置上，共有 $(a+b-1)!$ 种

$$A_k=\text{“第 }k\text{ 个人抽到红球”}$$

$$P(A_k)=\frac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

显然与抽签顺序无关.

体育比赛都采用抽签法，这是公平合理的.

例 7 共有 10 本书，其中有 4 本“诗集”（1 ~ 4 卷），将这 10 本书放到书架上，求：

(1)“诗集”放到一起的概率；

(2)“诗集”按照顺序放在一起的概率.

解 (1) 设 A = 4 本“毛泽东选集”放到一起，10 本书放在书架上共有 $10!$ 种放法，将 4 本“毛选”当作一本共有 $7!$ 种放法，“毛泽东选集”内部排序有 $4!$ 种放法，故 4 本“毛泽东选集”放到一起的概率

$$P(A)=\frac{7!\ 4!}{10!}=\frac{1}{30}$$

(2) B =“毛泽东选集”按照顺序放在一起，按顺序有两种，由左到右为 1 ~ 4，由右到左为 1 ~ 4

$$P(B)=\frac{7!\times 2}{10!}=\frac{1}{360}$$

例 8 哈尔滨石油学院某班有 10 名学生是 1994 年出生的，试求下列事件的概率：

(1) 至少有两人生日相同的概率；

(2) 至少有一人在十月一日过生日.

解 作为研究者认为每个人的生日都等可能的是 365 天中的任何一天，共有 365 种，所以 10 个人的生日共有 365^{10} 种可能.

(1) A =“至少有两人生日相同”

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-9)}{365^{10}}=$$

$$1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{9}{365}\right)\approx$$

$$1-(1-\frac{1+2+\cdots+9}{365})=\frac{45}{365}\approx 0.1233$$

(2) $B=$ “至少有一人在十月一日过生日”

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{364^{10}}{365^{10}}=1-(1-\frac{1}{365})^{10}\approx\frac{10}{365}\approx 0.03$$

例 9　10 把钥匙其中有两把能打开此门，从中任取两把，问能打开此门的概率？

解　$A=$ “取 2 把能打开此门”

$$P(A)=\frac{C_2^2+C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{17}{45}$$

5. 几何概型

古典概型的试验结果是有限个，基本事件出现的概率都是等可能的. 我们做一个推广：保留其等可能性，而允许试验结果可为无限个，称这个试验模型为几何概型.

若试验 E 的样本空间 S 为几何空间中的一个区域（这个区域可以是一维，二维，三维的）且 S 中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同，此时事件 $A\subset S$ 的概率定义为

$$P(A)\triangleq\frac{A\text{ 的度量（长度，面积或体积）}}{S\text{ 的度量（长度，面积或体积）}}$$

上式计算出的概率称为几何概率.

例 10　在区间 (0,1) 内任取两个数，求这两个数的乘积小于 $\frac{1}{2}$ 的概率.

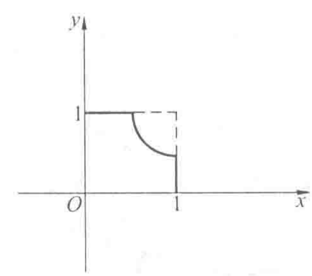


图 1.2

解　设在区间 (0,1) 内任取两个数为 x,y，则 $0<x<1$，$0<y<1$，样本空间是边长为 1 的正方形 S，其面积为 1，令 A 表示“两个数的乘积小于 $\frac{1}{2}$”，则 $A=\{(x,y)\mid 0<xy<\frac{1}{2},\ 0<x<1, 0<y<1\}$ 事件 A 所围区域如图 1.2，所求概率

$$P(A)=\frac{1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2x}}^{1}dy}{1}=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\frac{1}{2x})dx=$$

$$1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$$

1.2　条件概率及三个重要公式

1. 条件概率

一些问题中常常需要研究在某事件 A 发生的条件下，另一事件 B 发生的概率，这种概率称为条件概率，记作 $P(B\mid A)$.

例如人寿保险中，关心的是人群已活到某个年龄的条件下，在未来一年内死亡的概率.

下面我们研究 $P(B\mid A)$ 的计算方法.

设试验 E 的基本事件总数为 n，A 包含的基本事件数为 $m(m>0)$，AB 所包含的基本事件数为 k，于是有

$$P(B\mid A)=\frac{k}{m}=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

我们将上述关系式作为条件概率的定义.

定义 1.14 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

不难验证，条件概率 $P(B\mid A)$ 符合概率定义中的三个条件，即

(1)（非负性）$0\leqslant P(B\mid A)\leqslant 1$；

(2)（规范性）对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega\mid A)=1$；

(3)（可列可加性）设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$$

既然条件概率符合上述三个条件，所以概率性质的一些重要结果都适用于条件概率，例如

$$P(B_1\cup B_2\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)-P(B_1B_2\mid A)$$

又如，对于任意事件 A，有

$$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$$

例 10 某公司有 100 名职工，男职工 60 人，女职工 40 人，男职工有研究生学历的 20 人，女职工有研究生学历的 20 人，从该公司任选一名职工，问：

(1) 该职工有研究生学历的概率？

(2) 已知该职工是男职工，则他是研究生学历的概率？

解 (1)A =“任选一名职工为有研究生学历”

$$P(A)=\frac{40}{100}=0.4$$

(2)B =“该职工为男”，C =“该职工为研究生学历”

$$P(C\mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{20}{100}}{\frac{60}{100}}=\frac{1}{3}$$

2. 乘法公式

由条件概率 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$ 得下述定理：

定理 1.1 （乘法公式）设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\tag{1.2}$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\quad(P(B>0))$$

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A)=$$
$$P(B\mid AC)P(C\mid A)P(A)=\cdots$$